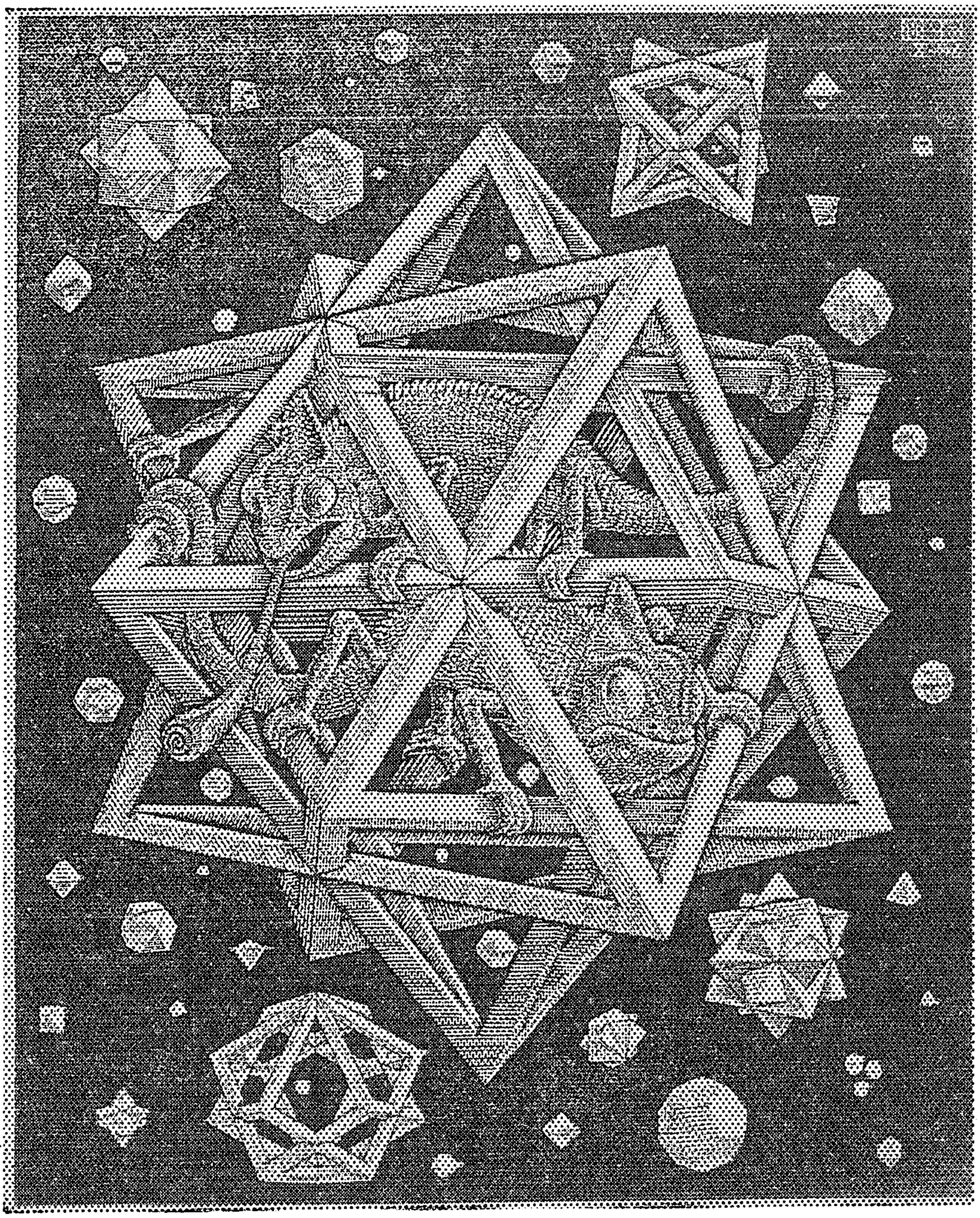
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס' 14

חשון תשמ"ט - יוני 1989



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון וייצמן למדע
רחובות

תוכן העניינים

אתגר - גליונות מתמטיקה ISSN 0334 - 0201
מוצא לאור ע"י הפקולטות למתמטיקה במכון וייצמן ובטכניון.
המערכת: פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שימושית, מכון וייצמן.
פרופ' א. ברמן וד"ר צ. הראל, הפקולטה למתמטיקה, הטכניון.
מען המערכת: היחידה לפעולות נוער, מכון ויצמן למדע, רחובות, 76150,
טל. 08-482970.
עיבוד תמלילים והדפסה: קתדרה - הוצאה לאור טל. 08-411690

דבר המערכת

Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ
Σ Σ
Σ גליון זה מופיע עם סיום שנת הלימודים Σ
Σ ותחילת חופשת הקיץ. Σ
Σ אנו מאחלים לכל קוראינו חופשה נעימה Σ
Σ ומעניינת. כתרומה צנועה למטרה זו אנו Σ
Σ מגישים בזה גליון גדול ומגוון, הרבה Σ
Σ יותר מהרגיל. Σ
Σ בהזדמנות זו אנו פונים אל הקוראים Σ
Σ בבקשה שיציעו בעיות מעניינות, Σ
Σ המתאימות לעיתון. נשמח לפרסם Σ
Σ אותן כל אחת, כמובן, בשם המציע. Σ
Σ Σ
Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ Σ

13 הוכחות של משפט הממוצעים

(200 שנה להולדתו של קושי, A.L. CAUCHY)

י. גרשוביץ (ירושלים)

מבוא

משפט: עבור $a_1,a_2,\ldots,a_n$ חיוביים כלשהם, קיים

$$\frac{a_1+a_2\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1,a_2,\ldots,a_n}$$

עם שוויון אך ורק כאשר $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.
ההוכחה הראשונה של משפט זה פורסמה בספר "קורס באנליזה" של קושי (CAUCHY) שיצא לאור בצרפת בשנת 1821. לפיכך נתחיל את סדרת ההוכחות בתצלום מספר זה. אנו מניחים כי הקורא יצליח להבין את רעיון ההוכחה, הגם שהיא כתובה צרפתית. לגבי כמה מההוכחות האחרות, במיוחד הוכחה מס' 2 וגם מס' 13, נצטרך לתת בסיס תאורטי קצר, שיוכל לשמש גם למטרות אחרות.

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

Iʳᵉ PARTIE. *Analyse algébrique.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez Debure frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821

Démonstration. — Soit n le nombre des lettres A, B, C, D, ... Il suffira de prouver qu'on a généralement

$$\sqrt[n]{ABCD\ldots} < \frac{A+B+C+D+\ldots}{n} \qquad (35)$$

ou, ce qui revient au même,

$$ABCD\ldots < \left(\frac{A+B+C+D+\ldots}{n}\right)^n. \qquad (36)$$

Or, en premier lieu, on aura évidemment, pour $n = 2$,

$$AB = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2,$$

et l'on en conclura, en prenant successivement $n=4$, $n=8$, ..., enfin $n=2^m$,

$$ABCD < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2\left(\frac{C+D}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4,$$

$$ABCDEFGH < \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4\left(\frac{E+F+G+H}{4}\right)^4 < \left(\frac{A+B+C+D+E+F+G+H}{8}\right)^8,$$

....,

$$ABCD\ldots < \left(\frac{A+B+C+D+\ldots}{2^m}\right)^{2^m}. \qquad (37)$$

En second lieu, si n n'est pas un terme de la progression géométrique

2, 4, 8, 16, ...,

on désignera par 2^m un terme de cette progression supérieur à n, et l'on fera

$$K = \frac{A+B+C+D+\ldots}{n};$$

puis, en revenant à la formule (37), et supposant dans le premier membre de cette formule les $2^m - n$ derniers facteurs égaux à K, on trouvera

$$ABCD\ldots K^{2^m-n} < \left[\frac{A+B+C+D+\ldots+(2^m-n)K}{2^m}\right]^{2^m}$$

ou, en d'autres termes,

$$ABCD\ldots K^{2^m-n} < K^{2^m}.$$

On aura donc par suite

$$ABCD\ldots < K^n = \left(\frac{A+B+C+D+\ldots}{n}\right)^n,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. — On conclut généralement de la formule (36)

$$A+B+C+D+\ldots > n\sqrt[n]{ABCD\ldots}, \qquad (38)$$

quel que soit le nombre des lettres A, B, C, D, ... Ainsi, par exemple,

$$\left\{\begin{array}{l} A+B > 2\sqrt{AB}, \\ A+B+C > 3\sqrt[3]{ABC}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \qquad (39)$$

הוכחה II. (סדרות מסודרות)

נתחיל בשני משפטי עזר.

משפט עזר 1: נתונות שתי סדרות $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n$, $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n$
עבור תמורה כלשהי $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ של המספרים $\{1,2,\ldots,n\}$
יהיה:

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1 \le a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \ldots + a_nb_{i_n} \le$$

$$\le a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

משפט עזר 2: יהיו $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ שתי סדרות
מסודרות באופן נגדי, דהיינו שעבור כל $1 \le i \le j \le n$: אם $a_e \le a_k$ אז $b_e \ge a_k$,

אזי $a_1b_1 + a_2b_2 \ldots + a_nb_n \le a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} \ldots + a_nb_{i_n}$

כאשר $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ היא תמורה כלשהי של המספרים $\{1,2,\ldots,n\}$
יוכל הקורא לראות ללא כל קושי שניתן להסיק את משפט עזר 2 מהמשפט
הראשון, אולם גם את הוכחת משפט עזר 1 נשאיר לקוראים כתרגיל.

כדי להוכיח את משפט קושי נגדיר:

$$G = \sqrt[n]{a_1, a_2, \ldots, a_n}$$

$$A = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$$

ונתבונן בשתי הסדרות

$$(\text{א}) \quad \frac{a_1}{G}, \frac{a_1a_2}{G^2}, \frac{a_1a_2a_3}{G^3}, \ldots\ldots, \frac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{G^n} = 1$$

$$(\text{ב}) \quad \frac{G}{a_1}, \frac{G^2}{a_1a_2}, \frac{G^3}{a_1a_2a_3}, \ldots\ldots, \frac{G^n}{a_1a_2a_3\ldots a_n} = 1$$

הסדרות הללו מקיימות את תנאי משפט עזר 2, ולכן

$$n = \frac{a_1}{G}\cdot\frac{G}{a_1} + \frac{a_1a_2}{G^2}\cdot\frac{G^2}{a_1a_2} + \ldots\ldots$$

$$\leq \frac{a_1}{G}\cdot 1 + \frac{a_1a_2}{G^2}\cdot\frac{G}{a_1} + \frac{a_1a_2a_3}{G^3}\cdot\frac{G^2}{a_1a_2} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{a_1a_2\ldots a_n}{G^n}\cdot\frac{G^{n-1}}{a_1a_2\ldots a_{n-1}} =$$

$$= \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{G}$$

דהיינו - $A \geq G$

וגם התנאי לשויון ברור.

<u>הוכחה III (אינדוקציה)</u>.

באופן כללי נגדיר:

$$A_n = (a_1+a_2+\ldots+a_n)/n$$

$$G_n = \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

נניח כי עבור n כלשהו $A_n \geq G_n$. ברור שזה נכון עבור $n=2$. נסתכל בקבוצה בעלת n איברים. האחד הוא a_{n+1} ו- $(n-1)$ האחרים שווים כולם ל- A_{n+1}. מהנחת האינדוקציה נקבל:

$$a = \frac{a_{n+1}+(n-1)A_{n+1}}{n} \geq \sqrt[n]{a_{n+1}\cdot A_{n+1}^{\,n-1}} = g$$

עכשיו נשים לב לכך ש-

$$(1) \quad (n+1)A_{n+1} = nA_n + a_{n+1}$$

ומכאן ש-

$$(2)\quad A_{n+1} = \frac{A_n+a}{2}$$

{נשאיר לקורא להצדיק את המעבר מ- (1) ל-(2)}

ולכן

ומכאן ש-

$$A_{n+1} \geq (A_n \cdot a)^{1/2} \geq \sqrt{G_r \cdot g} = \sqrt[2n]{(G_{n+1})^{n+1} \cdot (A_{n+1})^{n+1}}$$

$$(A_{n+1})^{2n} \geq (G_{n+1})^{n+1} \cdot (A_{n+1})^{n-1}$$

$$A_{n+1} \geq G_{n-1} \qquad .N.I$$

<u>הוכחה IV (אינדוקציה).</u>

נניח כי $A_n \geq G_n$ וכי a_{n+1} הוא המספר הגדול ביותר מבין המספרים

$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$

במקרה זה יהיה: $a_{n+1} = A_n + \varepsilon$

כאשר $\varepsilon \geq 0$ ושווה אך ורק כאשר כל האיברים שווים.

יהיה אפוא

$$A_{n+1} = \frac{nA_n + a_{n+1}}{n+1} = A_n + \frac{\varepsilon}{n+1}$$

ולכן, לפי פיתוח בינום:

$$A_{n+1}^{n+1} = \left[A_n + \frac{\varepsilon}{n+1}\right]^{n+1} \geq A_n^{n+1} + (n+1)A_n^n \cdot \frac{\varepsilon}{n+1}$$

$$= A_n^n(A_n+\varepsilon) = A_n^n \cdot a_{n+1} \geq$$

$$\geq G_n^n \cdot a_{n+1} = G_{n+1}^{n+1}$$

ומכאן שוב $A_{n+1} \geq G_{n+1}$

הוכחה V (אינדוקציה).

נניח כי: א) $A_n \ge G_n$.

במיוחד: ב) $$\frac{a_{n+1}+(n-1)G_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_{n+1}\cdot G_{n+1}^{\,n-1}}$$

אם נחבר את (א) ו- (ב) נקבל:

$$A_n+\frac{a_{n+1}+(n-1)G_n}{n} \ge G_n+\sqrt[n]{a_{n+1}\cdot G_{n+1}^{\,n-1}}$$

ז.א. $$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}+(n-1)G_{n+1}}{n} \ge 2\cdot\sqrt{G_n\cdot\sqrt[n]{a_{n+1}\cdot G_{n+1}^{\,n-1}}}$$

$$= 2\sqrt[2n]{G_n^{\,n}a_{n+1}\cdot G_{n+1}^{\,n-1}} = 2G_{n+1}$$

ומכאן: $a_1+a_2+\ldots+A_n+A_{n+1} \ge 2nG_{n+1}-(n-1)G_{n+1}=(n+1)G_{n+1}$

דהיינו $\boxed{A_{n+1} \ge G_{n+1}}$

הוכחה VI (אינדוקציה).

תרגיל: הוכח את אי השוויון:

$$\boxed{a^n+\frac{n}{a} \ge n+1}$$ (a חיובי n טבעי)

נתונה סדרה: $a_1,a_2,\dots,a_{n+1}$

נגדיר:

$$a=\sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{G_{n+1}}} \qquad \text{נניח כי} \quad A_n \ge G_n$$

ואז, לפי הנחת האינדוקציה -

$$\frac{a\cdot a_1+a\cdot a_2+\dots+a\cdot a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a^n\cdot a_1\cdot a_2\dots a_n} =$$

$$=\sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{G_{n+1}}\,a_1\dots a_n} = G_{n+1}$$

אז

$$a_1+a_2+\dots+a_n+a_{n+1} = \frac{a\cdot a_1+a\cdot a_2+\dots+a\cdot a_n}{a} + a_{n+1} \ge$$

$$\ge \frac{n}{a}\,G_{n+1}+a^nG_{n+1} = G_{n+1}\left[\frac{n}{a}+a^n\right] \ge (n+1)G_{n+1}$$

אז

$$\boxed{A_{n+1} \ge G_{n+1}}$$

הוכחה VII (אינדוקציה).

עבור כל a,b,n חיוביים קיים $(a-b)(a^n-b^n) \ge 0$

דהיינו $$a^{n+1}+b^{n+1} \ge a^n b+b^n a \qquad (\text{א})$$

עם שוויון אך ורק כאשר a=b. אם נכתוב $a_i=x_i^n$ $(1\le i\le n)$
יקבל משפט קושי את הצורה:

$$x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n \ge n x_1 x_2 \ldots x_n$$

ושוויון רק כאשר $x_1=x_2=\ldots=x_n$

אם נציב $a=x_i$, $b=x_j$ ב-(א) נקבל:

$$x_i^{n+1}+x_j^{n+1} \ge x_i^n x_j+x_i x_j^{n+1}$$

נחבר את אי השוויון הזה עבור כל $1\le i\le j\le n+1$ ונקבל:

$$n(x_1^{n+1}+x_2^{n+1}+\ldots+x_n^{n+1}) \ge$$

$$\ge x_1(x_2^n+x_3^n+\ldots+x_{n+1}^n)+$$

$$+x_2(x_1^n+x_3^n+\ldots+x_{n+1}^n)+$$

$$\vdots$$

$$+x_{n+1}(x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n)$$

$$\ge x_1x_2x_3x_4\ldots x_{n+1}$$

$$+x_2x_1x_3x_4\ldots x_{n+1}\cdot n$$ (בגלל הנחת האינדוקציה)

$$+x_3x_1x_2x_4\ldots x_{n+1}\cdot n$$

$$\vdots$$

$$+x_{n+1}x_1x_2x_3\ldots x_{n+1}\cdot n$$

$$= n(n+1)x_1x_2\ldots x_{n+1}$$

ולכן גם

$$x_1^{n+1}+x_2^{n+1}\ldots\ldots+x_{n+1}^{n+1} \ge (n+1)x_1x_2\ldots x_{n+1}$$

הוכחה VIII: אי שויון יותר חזק.

$$\boxed{\left[\frac{A_k}{G_k}\right]^{k} \le \left[\frac{A_{k+1}}{G_{k+1}}\right]^{k+1}} \qquad (\text{א})$$

הוכחה:

$$\left[\frac{A_{k+1}}{G_{k+1}}\right]^{k+1} = \left[\frac{kA_k+a_{k+1}}{k+1}\right]^{k+1} \cdot \frac{1}{(G_k)^k \cdot a_{k+1}} =$$

$$= \left[\frac{A_k}{G_k}\right]^{k} \cdot \frac{A_k}{a_{k+1}} \cdot \left[\frac{k+\frac{a_{k+1}}{A_k}}{k+1}\right]^{k+1}$$

עבור τ, k חיוביים קיים

$$\left[\frac{K+\tau}{K+1}\right]^{K+1} = \left[1+\frac{\tau-1}{K+1}\right]^{K+1}$$

$$\ge 1+\frac{\tau-1}{K+1}\cdot(K+1) \quad =\tau$$

לפי אי-שוויון Bernoulli.

ולכן

$$\left[\frac{A_{k+1}}{G_{k+1}}\right]^{k+1} = \left[\frac{kA_k+a_{k+1}}{k+1}\right]^{k+1} \cdot \frac{1}{(G_k)^k \cdot a_{k+1}} =$$

$$= \left[\frac{A_k}{G_k}\right]^{k} \cdot \frac{A_k}{a_{k+1}} \cdot \left[\frac{k+\frac{a_{k+1}}{A_k}}{k+1}\right]^{k+1} \ge$$

$$\geq \left[\frac{A_k}{G_k}\right]^k \cdot \frac{A_k}{a_{k+1}} \cdot \frac{a_{k+1}}{A_k} \Bigg] = \left[\frac{A_k}{G_k}\right]^k$$

$$\left[\frac{A_n}{g_n}\right]^n \geq \left[\frac{A_n}{g_n}\right]^{n-1} \geq \ldots \geq \left[\frac{A_1}{G_1}\right]^1 = 1$$

ולכן $\quad A_{n+1} \geq G_{n+1}$

<u>הוכחה IX (נגזרת).</u>

יהיה

$$f(x) = \frac{1}{n} G_n \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{a_i}{G_n}\right]^x$$

ואז מספיק להוכיח כי: $\boxed{f(1) \geq f(0)}$

$$f'(x) = \frac{G_n}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{a_i}{G_n}\right]^x \ln \frac{a_i}{G_n} \qquad ;$$

$$f''(x) = \frac{G_n}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{a_i}{G_n}\right]^x \ln^2 \frac{a_i}{G_n} \qquad .$$

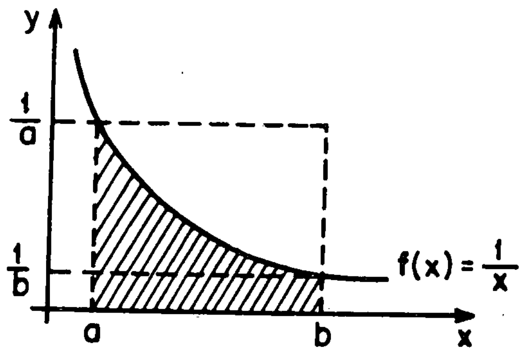
$$f'(0) = \frac{G_n}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{a_i}{G_n} = \frac{G_n}{n} \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{G_n} = \frac{1}{n} G_n \ln 1 = 0$$

מצד שני $f''(x) \geq 0$ לכל $0 \leq x \leq \infty$ ולכן $f'(x)$ היא פונקציה עולה בתחום $(0,\infty)$.
אבל $f'(0)=0$ ולכן $f'(x) \geq 0$ בתחום $(0,\infty)$, ומכאן $f(x)$ עולה באותו תחום:

במיוחד $\quad \boxed{f(1) > f(0)}$

הוכחה X (בעזרת אינטגרל)

$$\frac{b-a}{b} < \int_a^b \frac{dx}{x} < \frac{b-a}{a}$$



$$\boxed{\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}} \qquad \text{(א}$$

נניח כי המספרים $\{a_n\}$ מסודרים, ו- A_n נמצא בקטע
$a_k \le A_n < a_{k+1}$

$$\boxed{a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_k \le A_n \le a_{k+1} \le \ldots \le a_n} \qquad \text{(ב}$$

מ-(א') ו-(ב') נקבל כי:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{A_n - a_i}{A_n} \le \sum_{i=1}^{k} \ln\frac{A_n}{a_i}$$

ז.א.

$$\boxed{M = \frac{kA_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)}{A_n} \le \ln\frac{A_n^k}{a_1 \cdot a_2 \ldots a_k}} \qquad \text{(ג)}$$

באופן דומה

$$\boxed{\ln\frac{a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot \ldots \cdot a_n}{A_n^{n-k}} \le \frac{(a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n) - (n-k)A_n}{A_n} = N}$$

קל להיווכח כי $M=N$, ולכן (ה)

$$\boxed{\ln \frac{a_{k+1}\cdot a_{k+2}\cdot\ldots\cdot a_n}{A_n^{n-k}} \le \ln \frac{A^k}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k}}$$

$$a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}\ldots a_n \le A_n^n$$

$$\boxed{G_n \le A_n}$$

הוכחה XI

הרעיון של ההוכחה: אם שני מספרים חיוביים מתקרבים זה לזה כך שסכומם נשאר קבוע, מכפלתם גדלה.

אם כל האיברים $a_1a_2\ldots a_n$ שווים, אז ברור כי גם A_n,G_n יהיו שווים לאותו ערך משותף ו- $A_n=G_n$. אם אין כולם שווים, יהיה:

$$\text{Min } a_i<A_n<\text{Max } a_i$$

נניח למשל כי $a_\alpha<A_n<a_\beta$. נשנה את האיברים בזה שנכתוב A_n במקום a_α ו $a_\beta+a_\alpha-A_n$ במקום a_β. ברור כי טרנספורמציה זו לא תשנה את הסכום Σa_i.

מאידך -
$$A_n(a_\alpha+a_\beta-A_n) - a_\alpha a_\beta = (A_n-a_\alpha)(a_\beta-A_n) > 0$$

ולכן -
$$A_n(a_\alpha+a_\beta-A_n) > a_\alpha a_\beta$$

יוצא, כי בלי לשנות את סכום האיברים, הגדלנו את מכפלתם. אם אחרי פעולה זו עוד נשארו בקבוצה איברים שונים מ- A_n נוכל להמשיך, וכך, תוך מספר סופי של צעדים, נגיע לקבוצה אשר כל איבריה שווים ל-A_n. בכל צעד הגדלנו את הממוצע ההנדסי, כאשר בכל שלב השארנו את הממוצע החשבוני ללא שינוי. כמו כן ברור כי בסידור הראשון של המספרים היה בודאי $A_n > G_n$. והשוויון יושג אך ורק כאשר כל האיברים שווים.

הוכחה XII (קצרה מאוד)

עבור כל x ממשי קיים

$$e^x \ge 1+x$$

עם שוויון אך ורק כאשר x=0, מאחר ש-

$$A_n = \frac{1}{n}\Sigma a_i$$

יוצא כי

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A_n} = n = \Sigma 1$$

ולכן

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_i}{A_n} - 1\right] = 0$$

ומכאן ש -

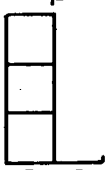
$$1 = e^0 = \exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_i}{A_n} - 1\right]\right\} = \prod_{i=1}^{n}\exp\left[\frac{a_i}{A_n} - 1\right]$$

$$\ge \prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{A_n} = \left[\frac{G_n}{A_n}\right]^n$$

הוכחה XIII (מי יודע?)

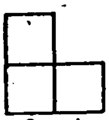
טבלאות Young ואי-שוויונות סימטריים.

נתבונן תחילה בכמה דוגמאות וננסה למצוא בהן התאמות וחוקיות, ורק אחר כך נעבור למסקנות.



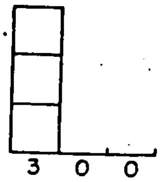
3 0

$$P_{(3,0)}(x,y) = x^3y^0+y^3x^0 = x^3+y^3 \qquad (1)$$

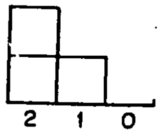


2 1

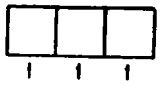
$$P_{(2,1)}(x,y) = x^2y^1+y^2x^1 \qquad (2)$$



$$P_{(3,0,0)}(x,y,z)=x^3y^0z^0+x^3z^0y^0+y^3z^0x^0+y^3x^0z^0+z^3x^0y^0+z^3y^0x^0=2(x^3+y^3+z^3) \qquad (3)$$



$$\begin{aligned} P_{(2,1,0)}(x,y,z) &= x^2y^1z^0+x^2z^1y^0+z^2y^1x^0+z^2x^1y^0+y^2x^1z^0+y^2z^1x^0=x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y \\ &= 2(x^3+y^3+z^3) \end{aligned} \qquad (4)$$



$$P_{(1,1,1)}(x,y,z) = 6xyz \qquad (5)$$

עתה ננסה לנסח את תצפיותינו באופן שיטתי.

I. משמאל אנו רואים טבלאות בצורת סולמות. יחד עם זאת, מספר הקוביות בכל עמודה, בתנועה משמאל לימין <u>איננו עולה</u>. טבלאות בצורה הזו נקראות טבלאות או דיאגרמות ייאנג (Young).

II. לכל טבלה מתאים פולינום במספר משתנים (בדוגמאות שלנו ישנם רק פולינומים של שניים או שלושה משתנים $P(x,y)$ $P(x,y,z)$.

III. כל פולינום בנוי בצורה הבאה:

א. בונים תמורות של משתנים (במקרה של שני משתנים: x,y ו y,x ובמקרה של שלושה משתנים: z,y,x z,x,y y,x,z y,z,x x,z,y x,y,z)

ב. לוקחים סדרת מספרים (α,β,γ) כאשר α,β,γ הם מספרי הקוביות בכל עמודה משמאל לימין בהתאמה ומציבים אותם בכל תמורה בתפקיד מעריכי חזקות.

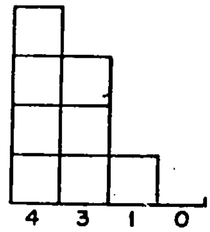
ג. האיברים המתקבלים מחוברים ביניהם וכך מתקבל פולינום. פולינום כזה נקרא <u>פולינום סימטרי</u> כיוון שהוא הופך לעצמו בכל החלפות המשתנים.

בפולינום שלנו יש $n!$ חד-איברים. אם חלק מן המעריכים שווים זה לזה ניתן לכנס איברים דומים (דוגמאות 5,3).

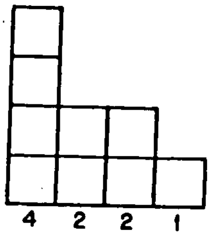
וכך: <u>לכל טבלה של Young מתאים פולינום סימטרי בעל n משתנים כאשר n הוא מספר העמודות (כולל עמודה בגובה 0)</u>

השוואת טבלאות Young

כל טבלה ניתן לבטא בצורה מקוצרת:



~ (4,3,1,0)



~ (4,2,2,1)

נניח שיש לנו שתי טבלאות (דהיינו, למעשה, שתי סדרות של מספרים שלמים <u>לא שליליים</u>).

$$\alpha = (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n) \quad \beta = (\beta_1\beta_2\ldots\beta_n)$$

כך שמתקיימים התנאים הבאים:

$$\alpha_1 \geq \beta_1$$
$$\alpha_1+\alpha_2 \geq \beta_1+\beta_2$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1} \geq \beta_1+\beta_2+\ldots\beta_{n-1}$$
$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n = \beta_1+\beta_2+\ldots\beta_n$$

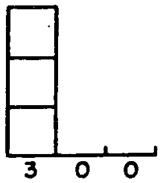
את המצב הזה נציין בסימן $\beta \prec \alpha$, כאשר היחס "$\succ$" נקרא יחס "מז'וריזציה".

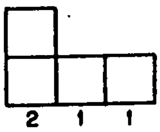
α majorizes β פירושו $\alpha \succ \beta$ (majorization)

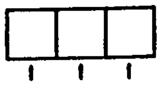
במילים אחרות, $\alpha \succ \beta$ אם טבלה β יכולה להתקבל מ-α ע"י <u>הפלת קוביות</u> (לבנים) מלמעלה למטה בכיוון משמאל לימין..

דוגמאות:

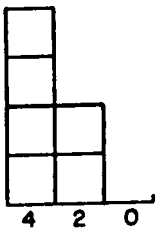
(6)

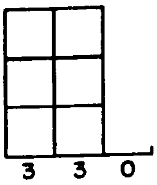


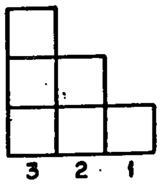


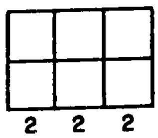


(3)









היחס "$\succ$" הינו בעל התכונות הבאות:

(1) עבור כל α, $\alpha \succ \alpha$.

(2) אם $\alpha \succ \beta$ וגם $\beta \succ \gamma$, אזי $\alpha \succ \gamma$.

אולם סדר זה הינו סדר חלקי בלבד מכיון שלא כל זוג טבלאות ניתנות להשוואה לפי היחס של $\succ$. לדוגמא: $\alpha = (4,1,1)$ ו- $\beta = (3,3,0)$ אי אפשר לומר ש- $\alpha \succ \beta$ או $\beta \succ \alpha$!

אי שוויונות סימטריים ומשפט Muirhead.

בשנת 1903 כאשר עסק המתמטיקאי הסקוטי מיורהד (R.F Muirhead) בהכללת משפט הממוצעים, הוכיח את המשפט הבא, שניתן להשתמש בו בהצלחה רבה לקבלת אי-שוויונות סימטריים חדשים.

משפט Muirhead

נניח ש- $\alpha = (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$ ו- $\beta = (\beta_1\beta_2\ldots\beta_n)$ נמצאים ביחס $\alpha \succ \beta$ אזי, עבור $x=\{x_1x_2\ldots x_n\}$ כאשר $x_i \ge 0$ $(1 \le i \le n)$, יהיה:

$$P_\alpha(x) \ge P_\beta(x)$$

נכון גם המשפט ההפוך. (הוכחת המשפט ההפוך נדחית לגליון הבא).

אי שוויון קושי בעזרת משפט Muirhead וטבלאות Young

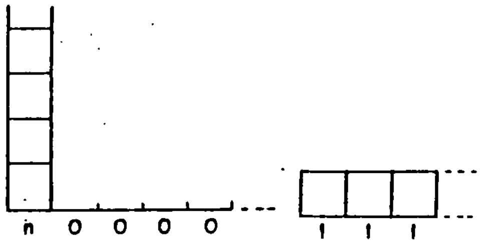
מדוגמאות $n=3$ 3,4,5,6 יוצא:

$$P_{(3,0,0)}(x,y,z) \ge P_{(2,1,0)} \ge P_{(1,1,1)}$$

$$2(x^3+y^3+z^3) \ge x^2y+x^2z+y^2z+y^2x+z^2x+z^2y \ge 6xyz$$

אם נסמן $x^3=a$ $y^3=b$ $z^3=c$ אז:

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$$



<u>באופן כללי (מגדל נופל)</u>

$\alpha=(n,0,0,\dots,0) \quad \beta=(1,1,\dots,1)$

$x=(x_1x_2\dots x_n)$

$P_\alpha(x) \ge P_\beta(x)$

או

$$(n-1)!(x_1^n x_2^n+\dots x_n^n) \ge n!\cdot(x_1x_2\dots x_n)$$

אם נסמן $(x_i)^n=a_i$ אז נקבל:

$$\boxed{\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}}$$

<u>סוף דבר</u>

אי-השוויון בין הממוצע החשבוני והממוצע ההנדסי נקרא אי-שוויון קושי, כיוון שהוא פורסם ב- 1821 בספרו של קושי - "אנליזה אלגברית". לספר זה היה תפקיד מכריע בהיווצרות האנליזה המתמטית של המאה ה-19.
בספר הובאה הוכחה מקורית של המשפט שלנו, והיא נקראה "אינדוקציה למעלה ולמטה".

ההוכחה השניה חשובה לנו לא רק בפני עצמה אלא בשל שיטתה. שיטה זו של סידור מוקדם של המספרים ניתנת לשימוש בהצלחה ניכרת בהוכחת אי-שוויונים שונים.
ההוכחה ה-13 - ההוכחה האחרונה, לה קראנו "המגדל הנופל", הינה הברורה (שקופה) ביותר.
הוכחה זו מראה בראש ובראשונה שכל הממוצעים הסימטריים נמצאים בין A ו-G.
דבר זה הובינו כבר מקלורן (Maclaurin) וניוטון (Newton) (ראה אתגר 7).
טבלאות Young בשיתוף עם משפט Muirhead הופכות את העובדה הנ"ל לטריויאלית.

האולימפיאדה הישראלית

במתמטיקה לנוער תשמ"ט

על התחרות הנ"ל ועל תוצאותיה כבר דיווחנו בגליון מס' 13. אנו מקווים כי קוראינו מצאו ענין בשאלון וגם הצליחו לפתור לפחות חלק מהבעיות. להלן מוגשים פתרונות לכל השאלות שהוצגו בפני משתתפי האולימפיאדה.

.1 $f(x)=|x-a|+|bx-1|$

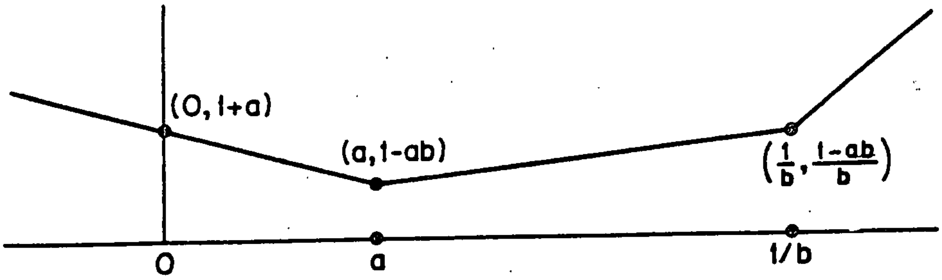
כאשר $0\le a\le 1/2$, $0\le b\le 1$. הוכח כי ניתן למצוא x_0,x_1 ממשיים כך ש- $x_1\ge x_0+2$ ואילו עבור כל $x_0\le x\le x_1$, תהיה $f(x)\le 2$.

פתרון:

לא קשה לראות כי

$$
\begin{aligned}
f(x)&= (1+a) - (1+b)x && x\le a\\
&= 1-a+(1-b)x && a\le x\le 1/b\\
&= (1+a) + (1+b)x && x\ge 1/b
\end{aligned}
$$

מכאן שהגרף של $f(x)$ יהיה כדלקמן:



מאחר ש- $f(a)<1$ ואילו $f(x)$ שואף לאינסוף כאשר $x\to\pm\infty$, ברור כי יתקיים $x_0<a$ וגם $x_1>a$ כך ש- $f(x_0)=f(x_1)=2$; וכי $f(x)\le 2$ בכל האינטרוול $[x_0,x_1]$. נשאר להוכיח כי $x_1-x_0\ge 2$.

אבל

$$(1+a) - (1+b)x_0=2$$

גורר $x_0 = -\dfrac{1-a}{1-b}$

אם $x_1 \le 1/b$, נקבל

$$(1+a) + (1-b)x_1 = 2$$

ז.א. $x_1 = \dfrac{1+a}{1-b}$

ואז יהיה $x_1 - x_0 = \dfrac{2}{1-b} > 2$

אם $x_1 > 1/b$, יהיה

$$-(1+a)+(1+b)x_1=2$$

ואז $x_1 = \dfrac{3-a}{1+b}$

ונקבל.

$$x_1 - x_0 = \frac{3-a}{1+b} + \frac{1-a}{1-b} = \frac{2(2-a-b)}{1-b^2} \ge \frac{2(3/2-b)}{1-b^2}$$

$$=2\left[\frac{1-b+½}{1-b^2}\right] = 2\left[\frac{1}{1+b} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-b^2}\right] \ge 2(½+½)=2$$

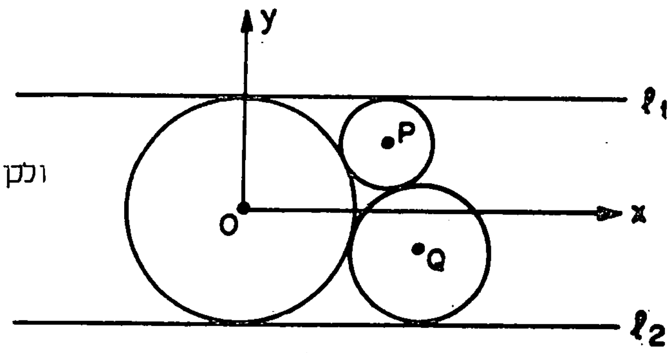
2. ℓ_1, ℓ_2 הם ישרים מקבילים המשיקים למעגל בעל רדיוס R ומרכז X. בונים שני מעגלים נוספים, האחד בעל רדיוס r_1 המשיק למעגל X וגם לישר ℓ_1, השני בעל רדיוס r_2, המשיק לישר ℓ_2 ולשני המעגלים האחרים. מצא את R כפונקציה של r_1, r_2.

<u>פתרון</u>:

ניקח צירים O_x, O_y כאשר O הוא מרכז המעגל הגדול, ו OX מקביל לישרים ℓ_1 ו- ℓ_2. יהיו P,Q מרכזי המעגלים הקטנים והרדיוסים r_1, r_2 בהתאמה.

יהיו שיעורי P: $(h,R-r_1)$ ושל Q: $(k, -R+r_2)$,

ברור כי



$OP=R+r_1$

$OQ=R+r_2$

$PQ=r_1+r_2$

ולכן

$h^2+(R-r_1)^2 = (R+r_1)^2$

$k^2+(-R+r_2)^2 = (R+r_2)^2$

$(h-k)^2+(2R-r_1-r_2)^2 = (r_1+r_2)^2$

לא קשה לחלץ את h,k משלוש משוואות אלה ואנו מקבלים: $R=2\sqrt{r_1,r_2}$

3. מצא את כל הזוגות של מספרים שלמים x,y המקיימים

$$x^2+x=y^4+y^3+y^2+y$$

<u>פתרון</u>:

נכתוב $z=2x+1$, ואז

$$\begin{aligned} z^2 = 4(x^2+x)+1 &= 4y^4+4y^3+4y^2+4y+1 \\ &= (2y^2+y)^2+3y^2+4y+1 \\ &= (2y^2+y+1)^2 - y^2+2y \end{aligned}$$

אם $y>2$ או $y<-1$, יהיו $3y^2+4y+1$ וגם y^2-2y שניהם חיוביים. במקרה זה יימצא z^2 בין שני ריבועים סמוכים, דבר שלא יתכן. נבדוק אפוא את המספרים השלמים בתחום $-1\le y\le 2$.

<u>$y=-1,0$</u>. בשני המקרים האלה מקבלים $x^2+x=0$

ולכן $x=0,-1$

$\underline{y=1}$. במקרה זה מקבלים $x^2-x-4=0$

ולמשוואה זו אין פתרונות שלמים.

$\underline{y=2}$. עכשיו מקבלים $x^2+x-30=0$

ולכן $x=5,-6$.

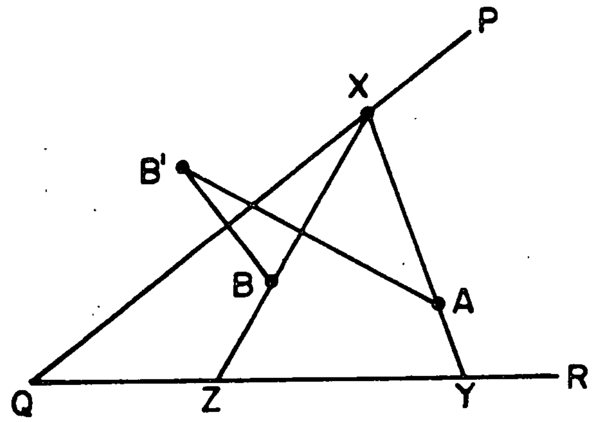
הפתרונות הם: $(-1,-1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(0,0)$, $(5,2)$, $(-6,2)$.

4. נתונה זוית חדה $\sphericalangle PQR$ ובפנים לה שתי נקודות A,B. מצא נקודה X על השוק QP של הזוית, כך שאם נמשיך את XA,XB עד שיפגשו את השוק QR ב-Y,Z, בהתאמה, אז יהיה $XY=XZ$.

<u>פתרון</u>:

יהיה B' השיקוף של B בישר PQ ונחבר AB'. X היא נקודה על PQ כך ש- $\sphericalangle B'XA = 180^\circ - 2\cdot\sphericalangle PQR$

עכשיו נראה כי



$$180^\circ - 2\sphericalangle PQR = B'XA$$
$$= 2\sphericalangle QXZ + \sphericalangle ZXY$$
$$= 2\{180^\circ - \sphericalangle PQR - \sphericalangle ZXQ\} + \sphericalangle ZXY$$

ולכן

$$180^\circ = 2\sphericalangle XZQ - \sphericalangle ZXY$$
$$= 2\{180^\circ - \sphericalangle XZY\} - \sphericalangle ZXY$$

יוצא כי

$$\sphericalangle ZXY + 2\cdot\sphericalangle XZY = 180^\circ = \sphericalangle XZY + \sphericalangle XYZ + \sphericalangle ZXY$$

ולכן $\sphericalangle XZY = \sphericalangle XYZ$

5. המספרים החיוביים $(a_1,a_2.........,a_{2m+1})$ מהווים סדרה הנדסית.

אם X הוא הממוצע החשבוני של $(a_1,a_3....,a_{2m+1})$ ו- Y זה של

$(a_2,a_4.....,a_{2m})$ הוכח כי $X \geq Y$.

באילו תנאים יתקיים שוויון ?

<u>פתרון</u>:

יהיה q המנה הקבועה של הסדרה ההנדסית. ברור כי $q>0$. עבור $q=1$ יהיו כל האיברים $\{a_1a_2,...,a_{2m+1}\}$ שווים ולכן $X=Y$. נוכיח כי בכל מקרה אחר יתקיים $X>Y$ (פרט למקרה $m=0$, כי הרי אז Y אינו קיים בכלל). מספיק להגביל את הדיון למקרה $q>1$, כי כאשר $q<1$ נוכל להפוך את סדר האיברים ו-q יהפוך ל-$1/q$ בלי לשנות את X או את Y.

ובכן, יהיה m מספר טבעי כלשהו, ו- $q>1$.

$$X=\frac{1}{m+1}(a_1+a_1q^2+...+a_1q^{2m})$$

$$=\frac{a_1(q^{2m+2}-1)}{(m+1)(q^2-1)}$$

בעוד

$$Y=\frac{1}{m}(a_1q+a_1q^3+...+a_1q^{2m-1})$$

$$=\frac{a_1q}{m}\ \frac{q^{2m-1}}{q^2-1}$$

ומכאן ש-

$$X/Y=\frac{m(q^{2m+2}-1)}{(m+1)q(q^{2m}-1)}$$

יוצא כי עלינו להוכיח שעבור כל m טבעי וכל $q>1$

$$F_m(q)=m(q^{2m+2}-1)-(m+1)q(q^{2m}-1)>0$$

זאת נוכיח בעזרת אינדוקציה.

ראשית כל

$$F_1(q)=(q^4-1)-2q(q^2-1)$$
$$=(q^2-1)(q^2+1-2q)$$
$$=(q+1)(q-1)^3>0$$

מאידך

$$F_{m+1}(q)-q^2F_m(q)=(m+1)(q^{2m+4}-1)-(m+2)q(q^{2m+2}-1)$$
$$-mq^2(q^{2m+2}-1)+(m+1)q^3(q^{2m}-1)$$
$$=(q-1)G_m(q)$$

כאשר

$$G_m(q)=q^{2m+3}-(m+1)q^2-q+(m+1)$$
$$=q^3(q^{2m}-1)+q^3-(m+1)q^2-q+(m+1)$$
$$=q^3(q^{2m}-1)+(q^2-1)\{q-(m+1)\}$$
$$>(q^{2m}-1)+(q^2-1)\{q-(m+1)\}$$
$$=(q^2-1)\{q^{2m-2}+q^{2m-4}+\ldots+q^2+1+q-(m+1)\}$$
$$>(q^2-1)\{(m+1)+q-(m+1)\}$$

מאחר ש- $q>1$, ולכן

$$F_{m+1}(q)-q^2F_m(q)>G_m(q)>q(q^2-1)>0$$

מכאן נובע ש- $F_m(q)>0$ גורר גם $F_{m+1}(q)>0$, מה שמשלים את ההוכחה האינדוקטיבית.

6. יהיו $A_1,A_2,\ldots\ldots,A_n$ n קבוצות, ו- P קבוצת אותם האיברים השייכים, כל אחד, למספר אי-זוגי מבין הקבוצות הנתונות. הוכח כי עבור $s=1,2,\ldots\ldots,n$, יהיה המספר

$$|P|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+2\sum_{1\le i\le j\le n}A_i\cap A_j-2^2\sum_{1\le i\le j\le k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots+(-2)^{s-1}\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_s\le n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_s}|$$

כפולה שלמה של 2^s.

(נ.ב. עבור כל קבוצות X,Y,....... מסמן $|X|$ מספר איברי X, $X \cap Y$ מסמן את החיתוך של X,Y).

<u>פתרון</u>:

עבור כל k בין 1 ל- n נגדיר B_k, שהיא קבוצת האיברים השייכים, כל אחד, בדיוק ל-k מבין הקבוצות $A_1,A_2,\dots,A_n$.

תרומת כל איבר של B_k לסכום

$$\Sigma \; |A_{i1},A_{i2n},\dots,A_{is}|$$

תהיה בדיוק $\begin{bmatrix}k\\ \ell\end{bmatrix}$. מאידך תרומתו של איבר כזה ל-$|P|$ תהיה 1 עבור k אי-זוגי ו-0 עבור k זוגי, או באופן כללי: $\frac{1}{2}\{1-(-1)^k\}$. יוצא כי התרומה של כל אחד מאברי B_k לסכום הכולל תהיה

$$\tfrac{1}{2}\{1-(-1)^k\} + \sum_{\ell=1}^{s}(-2)^{\ell-1}\begin{bmatrix}k\\ \ell\end{bmatrix}$$

$$=\tfrac{1}{2}\{1-(-1)^k\} - \tfrac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{s}(-2)^{\ell}\begin{bmatrix}k\\ \ell\end{bmatrix}$$

$$= (-1)^{k-1}/2 + \tfrac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{s}(-2)^{\ell}\begin{bmatrix}k\\ \ell\end{bmatrix}$$

$$= (-1)^{k-1}/2 + \tfrac{1}{2}\{(1-2)^k+R_s\cdot 2^s\}=2^{s-1}R_s$$

כאשר R_s הוא מספר שלם.

מאחר שזה נכון, עבור כל אברי B_k ועבור כל k, המסקנה מיידית.

7. נתונה מערכת משוואות:

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 +\dots+ \sin x_n = 0$$
$$\sin x_1 +2 \sin x_2 +3 \sin x_3 +\dots+ n\sin x_n = 100$$

מהו הערך הקטן ביותר של n, כך שלמערכת זו יהיו פתרונות ממשיים? נמק.

<u>פתרון</u> :

נניח כי קיים פתרון עבור n כלשהו. אם נכפיל את המשוואה הראשונה בקבוע k כלשהו ונחסר מהשניה, נקבל:

$$100=\{(1-k)\sin x_1+(2-k)\sin x_2\ldots$$
$$\ldots+(-1)\cdot\sin x_{k-1}\}+\{\sin x_{k+1}+2\sin x_{k+2}\ldots$$
$$\ldots+(n-k)\sin x_n\}\le\{1+2+3\ldots+(k-1)\}+\{1+2+\ldots+(n-k)\}$$

$$=\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}=\{n^2-(2k-1)n+2k(k-1)\}/2$$

ברור כי המינימום של הנוסחה האחרונה מתקבל בסביבת $k=n/2$. נציב $k=n/2$ ונקבל:

$$100\le\frac{n^2-n(n-1)+n(\tfrac{1}{2}n-1)}{2}=n^2/4$$

ולכן $n\ge20$. מאידך קל לפתור את המשוואה במקרה $n=20$ על-ידי

$$\sin x_1=\sin x_2=\ldots=\sin x_9=-1\ ,\ \sin x_{10}=0$$
$$\sin x_{11}=\sin x_{12}=\ldots=\sin x_{20}=+1$$

מצולעים חסומים במעגל

(מאת א. ב. סיגלר - נהריה)

1. מטרתינו העיקרית היא להוכיח את המשפט הבא:

<u>משפט:</u> יהא נתון מצולע אשר אורכי צלעותיו הם $\{a_1a_2,\dots,a_n\}$. אזי ניתן לשנות את זוויותיו, בלי לשנות את אורכי הצלעות, כך שיווצר מצולע קמור שהוא בר חסימה במעגל.

למעשה נוכיח כי מבין כל המצולעים בעלי אותן צלעות, זה שקמור וחסום במעגל - הוא בעל השטח המרבי. אבל משיקולים כלליים ברור כי קיים מצולע מרבי כזה, ומכאן נובע משפט 1.

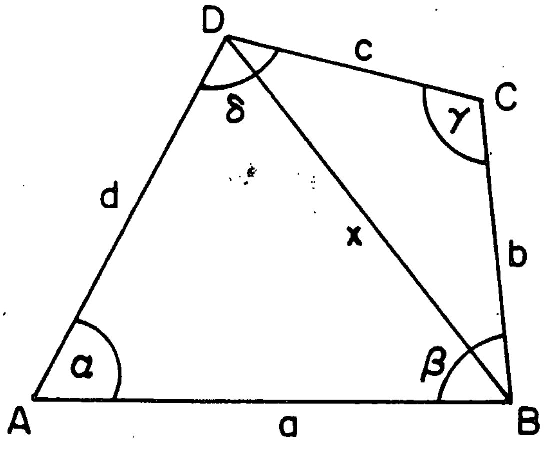
2. בסעיף זה נוכיח נוסחה המיוחסת למתמטיקאי ההודי ברמהגופתא מהמאה הששית לספירה.

<u>נוסחת ברמהגופתא</u>

במרובע קמור ABCD יהיו a,b,c,d אורכי הצלעות AB,BC,CD,DA ו-$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ יהיו הזוויות שבקדקודים A,B,C,D, בהתאמה.

אם נגדיר $p=(a+b+c+d)/2$ אזי שטח המרובע הוא

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}$$



<u>הערות:</u>

(i) הנוסחה מניחה כי $P>\max(a,b,c,d)$. האם זה חייב תמיד להתקיים, ואם כן למה?

(ii) מה יקרה אם נחליף את האיבר $\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}$ באיבר הסימטרי $\cos^2\frac{\beta+\delta}{2}$?

עכשיו נוכיח את הנוסחה.

נגדיר $BD=x$. ממשפט הקוסינוס אנו מקבלים:

$$a^2+d^2-2ad\cos\alpha = x^2 = b^2+c^2-2bc\cos\gamma$$

ולכן

$$ad\cos\alpha-bc\cos\gamma = \tfrac{1}{2}(a^2+d^2-b^2-c^2)$$

מאידך

$$S = S_{ABD}+S_{CBD} = \tfrac{1}{2}(ad\sin\alpha+bc\sin\gamma)$$

ומכאן

$$ad\sin\alpha+bc\sin\gamma = 2S$$

יוצא כי

$$4S^2+\tfrac{1}{4}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2 = (ad\sin\alpha+bc\sin\gamma)^2+(ad\cos\alpha-bc\cos\gamma)^2$$

$$= a^2d^2+b^2c^2-2abcd(\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma)$$

$$= a^2d^2+b^2c^2-2abcd\cos(\alpha+\gamma)$$

$$= a^2d^2+b^2c^2-2abcd\left[2\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}-1\right]$$

$$= (ad+bc)^2-4abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

ולכן

$$16S^2 = 4(ad+bc)^2-16abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$$

$$= \{2(ad+bc)+a^2+d^2-b^2-c^2\}\{2(ad+bc)-a^2-d^2+b^2+c^2\}-16abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

$$= \{(a+d)^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-(a-d)^2\}-16abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

$$= (a+d-b+c)(a+d+b-c)(b+c+a-d)(b+c-a+d)-16abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2} =$$

$$= 16\left[(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}\right]$$

בזה הוכחנו את הנוסחה. מסקנה אחת ממנה היא כי, עבור a,b,c,d נתונים יהיה שטח המרובע מרבי כאשר $\cos(\alpha+\gamma)/2=0$, דהיינו כאשר המרובע חסום במעגל.

3. עכשיו נחזור למטרתנו המקורית. יהיה נתון מצולע אשר אורכי צלעותיו הם: $\{a_1a_2,\dots,a_n\}$. נשנה (במידת הצורך) את זויות המצולע, בלי לשנות את אורכי הצלעות, עד שנגיע למצולע בעל שטח מרבי. נוכיח כי המצולע שהתקבל מטיפול זה הוא בהכרח בר חסימה במעגל.

<u>הוכחה.</u>

נניח כי כבר השגנו שטח מרבי, ויהיו A_1,A_2,A_3,A_4 ארבעה קדקודים עוקבים. אם אין ארבעה אלה נמצאים על מעגל אחד, אזי נוכל להזיז את A_2A_3 בלי להזיז את A_1A_4 ובלי לשנות את אורכי הצלעות A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, עד שנקבל מרובע $A_1A_2A_3A_4$ החסום במעגל. מנוסחת ברמהגופתא נובע כי המצולע החדש יהיה בעל שטח גדול מזה של המצולע הקודם, בסתירה להנחה כי זה האחרון היה בעל שטח מרבי. יוצא אפוא כי במצב המרבי, הנקודות A_1,A_2,A_3,A_4 נמצאות על מעגל. באופן כללי הוכחנו כי המעגל, העובר דרך שלושה קדקודים עוקבים, עובר גם דרך הקדקוד הבא, ומכאן שכל קדקודי המצולע נמצאים על מעגל.

פתרון משוואה מסדר 5.

ליאת מנדל (נתניה, תלמידת כיתה ח')

1. כבר לפני למעלה מ-3000 שנה ידעו הבבלים לפתור משוואות ריבועיות. מאידך, היה זה רק לפני כ- 400 שנה שמתמטיקאים באיטליה פיתחו שיטות לפתור משוואות מסדר 3 ו-4. אבל בזאת נעצרה ההתקדמות. אמנם במחצית הראשונה של המאה הקודמת הוכח כי גם באופן תיאורטי אין למצוא (ולכן גם לא כדאי לחפש) נוסחאות אלגבריות כלליות לפתרון משוואות מסדר 5 ומעלה. אבל העובדה, שאין קיימות נוסחאות כלליות, אינה שוללת את האפשרות לפתור לפעמים משוואות מיוחדות. מטרת מאמר זה היא להציג משוואה מסדר 5 הניתנת לפתרון.

2. <u>המשוואה</u>.

$$2x^5+x^4-5(a+1)x^3+2(5a+1)x^2+3a^2-(3a+5)ax = 0$$

$$2x^5-5ax^3-5x^3+x^4+10ax^2+2x^2+3a^2-3a^2x-5ax = 0$$

נסדר משוואה זו כך ש-a יהיה המשתנה במשוואה הריבועית.

$$(3-3x)a^2-(5x^3-10x^2+5x)a+(2x^5+x^4-5x^3+2x^2) = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{5x^3-10x^2+5x\pm\sqrt{(5x^3-10x^2+5x)^2-4(3-3x)(2x^5+x^4-5x^3+2x^2)}}{2(3-3x)} =$$

$$= \frac{5x^3-10x^2+5x\pm\sqrt{25x^6-100x^4+25x^2-100x^5+50x^4-100x^3(-12+12x)(2x^5+x^4-5x^3+2x^2)}}{6-6x} =$$

$$= \frac{5x^3-10x^2+5x\pm\sqrt{25x^6-100x^5+150x^4-100x^3+25x^2-24x^5-12x^4+60x^3-24x^2+24x^6+12x^5-60x^4+24x^3}}{6-6x} =$$

$$= \frac{5x^3-10x^2+5x\pm\sqrt{49x^6-112x^5+78x^4-16x^3+x^2}}{6-6x} =$$

כדי לפשט את הביטוי הזה ננסה להציג את הביטוי שמתחת לשורש כריבוע של מספר שלם, וכך ניפטר מהשורש, ונמצא את הערך של a כפונקציה של x.

נצא מתלת איבר כללי: $(bx^3+cx^2+x)^2$

ידוע ש- $b=7$ מפני ש- $b^2x^6 = 49x^6$,

$$(7x^3+cx^2+x)^2 = 49x^6+c^2x^4+x^2+14cx^5+14x^4+2cx^3,$$

$$49x^6-112x^5+78x^4-16x^3+x^2 = 49x^6+14cx^5+(c^2+14)x^4+2cx^3+x^2$$

נשווה את שני האגפים ונקבל:

$$-112=14c \qquad 78=c^2+14 \qquad -16=2b$$

$$c=-8 \qquad 78=14+64 \qquad -16=2\cdot(-8)$$

$$(7x^3+bx^2+x)^2 = \boxed{(7x^3-8x^2+x)^2}$$

$$\frac{5x^3-10x^2+5x \pm \sqrt{(7x^3-8x^2+x)^2}}{6-6x} =$$

$$a_1 = \frac{5x^3-10x^2+5x+7x^3-8x^2+x}{6-6x} = \frac{12x^3-18x^2+6x}{6-6x} = \frac{2x^3-3x^2+x}{1-x}$$

$$a_2 = \frac{5x^3-10x^2+5x-7x^3+8x^2-x}{6-6x} = \frac{-2x^3-2x^2+4x}{2(3-3x)} = \frac{-x^3-x^2+2x}{3-3x}$$

$$a_1 = \frac{2x^3-3x^2+x}{1-x} = \frac{(2x^3-2x^2)-(x^2-x)}{1-x} = \frac{2x^2(x-1)-x(x-1)}{1-x} =$$

$$= \frac{(x-1)(2x^2-x)}{1-x} = \frac{(x-1)(2x^2-x)}{(-1)(x-1)} = -2x^2+x$$

$$a_2 = \frac{-x^3-x^2+2x}{3-3x} = \frac{-x^3+x^2-2x^2+2x}{3-3x} = \frac{(x^2-x^3)+(2x-2x^2)}{3-3x} =$$

$$= \frac{x^2(1-x)+2x(1-x)}{3-3x} = \frac{(1-x)(x^2+2x)}{3(1-x)} = \frac{x^2+2x}{3}$$

$a=-2x^2+x$

$2x^2-x+a=0$

$$x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-8a}}{4}$$

$$a = \frac{x^2+2x}{3}$$

$3a = x^2+2x$

$x^2+2x-3a = 0$

$$x_{3,4} = \frac{-1\pm\sqrt{1+3a}}{1} = -1\pm\sqrt{1+3a}$$

מצאנו ארבעה פתרונות, אבל המשוואה הראשונית היא מדרגה 5, כלומר, x^5,
לכן קיים עוד פתרון אחד:

$$2x^5-5(a+1)x^3+x^4+2(5a+1)x^2+3a^2-(3a+5)ax = 0$$

סכום המקדמים שווה:

$$2-5(a+1)+1+2(5a+1)+3a^2-(3a+5)a =$$
$$2-5a-5+1+10a+2+3a^2-3a^2-5a =$$
$$5-10a-5+10a+3a^2-3a^2 = 0$$

אבל במשוואה אשר בה סכום המקדמים שווה 0 יהיה תמיד $x=1$ אחד הפתרונות,
ולכן $x_5=1$

3. או אחרת, יכולנו להעיר, כי לפי נוסחת ויטה, סכום חמשת הפתרונות של המשוואה הוא ½. מאידך-

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = -1\tfrac{1}{2}$$

ולכן

$$x_5 = +1$$

תשובה:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{1-8a}}{4}$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{1-8a}}{4}$$

$$x_3 = 1+\sqrt{1+3a}$$

$$x_4 = 1-\sqrt{1+3a}$$

$$x_5 = 1$$

על משוואה מיוחדת, קוביות, תיבות והקשר שביניהן

(מאת ד. רימר - רחובות)

I. המשוואה $x^3+y^3=z^2$ כאשר $x,y,z\epsilon N$

1°. כידוע, למשוואה

$$x^2+y^2=z^2 \qquad (x,y,z\epsilon N) \qquad (1)$$

יש אינסוף פתרונות. כל פתרון יכול להתקבל משלושה מספרים טבעיים m,n,p, עם $m>n$, בעזרת הנוסחאות

$$x=(m^2-n^2)p, \quad y=2mnp, \quad z=(m^2+n^2)p \qquad (2)$$

כי הרי $[(m^2-n^2)p]^2+(2mnp)^2 = [(m^2+n^2)p]^2$, (בדוק!) דוגמאות:

$x=5,\ y=12,\ z=13 \longrightarrow (m^2-n^2)p=5,\ 2mnp=12,\ (m^2+n^2)p=13 \longrightarrow m=3,\ n=2,\ p=1$

$x=9,\ y=12,\ z=15 \longrightarrow m=2,\ n=1,\ p=3$

<u>הערה</u>. כאשר $p=1$ (כמו בדוגמה הראשונה), z,y,x מתקבלים, למעשה, מהמספרים m ו-n בלבד.

מזווית ראיה אחרת, יכולים לפרש, את המשוואה (1) בצורה גאומטרית, כמו שעשה המתמטיקאי, דיופנט,[1] בן יוון העתיקה: לבטא ריבוע (z^2) לשני ריבועים (x^2 ו- y^2), וזהו למעשה משפט פיתגורס. בכל ספר לימוד לגאומטריה נמצא ציור הממחיש את משפט פיתגורס: הריבוע הבנוי על היתר של משולש ישר זוית שווה בשטחו לסכום שטחי הריבועים הבנויים על ניצבי אותו המשולש. קיימות שיטות שונות "לחתוך" את הריבועים הבנויים על הניצבים ול"צרפם" חזרה כך שיתקבל הריבוע הבנוי על היתר.

2°. מהמשוואה (1) הגיעו המתמטיקאים באופן טבעי למשוואות מסוג

$$(*) \qquad x^n+y^n=z^n, \qquad (x,y,z\in N)\ n\in N-\{1,2\}$$

המתמטיקאי הצרפתי הדגול פרמה[2] ניסח, ללא כל הוכחה, את ההשערה כי למשוואה (*) אין כל פיתרון. את המקרה $n=3$ הוכיח המתמטיקאי השוויצרי אוילר[3]. מתמטיקאים מפורסמים אחרים הוכיחו את המשפט עבור ערכים אחרים של n, אבל איש לא הצליח עד עכשיו להוכיח את המשפט עבור כל n. יש להדגיש כי השערה זאת לא התבדתה עד היום [1].

3°. להלן נעסוק במשוואה הנמצאת בין המשוואה (1) אשר לה אינסוף פתרונות שניתן לקבלם בעזרת הנוסחאות (2), והמשוואות מסוג (*) אשר להן אין פתרון, דהיינו מין יצור כלאיים של השתיים,

$$(3)\ x^3+y^3=z^2 \qquad (x,y,z\in N).$$

למעשה, אנו נוקטים כאן שיטה מקובלת במחקר בכלל והמחקר המתמטי בפרט: כאשר אנו מציבים לנו כמטרה לפתור בעיה בתנאים מסוימים ולא מצליחים, אזי "משנים" את קבוצת התנאים.אבל אוילר כבר הוכיח, כאמור, שזה בלתי אפשרי ולכן אנחנו עוברים מ-z^3 ל-z^2. בשפה גאומטרית, אפשר לפרש את המשוואה (*), עבור $n=3$, גם באופן הבא:

יש למצוא שלוש קוביות X,Y,Z, שאורכי מקצועותיהן x,y,z, הינם מספרים טבעיים, ושנפח הקוביה Z יהיה שווה לסכום נפחי הקוביות X ו-Y. היות שלפי הוכחת אוילר אין זה קיים במציאות, נסתפק בדרישה "חלשה" יותר: במקום ש-Z תהיה קוביה, נסתפק בכך ש-Z תהיה תיבה ריבועית, ז.א. כי רק שניים ממימדיה יהיו שוים זה לזה, והממד השלישי ישמש כיחידת מידה עבור השתיים האחרות.

מההתבוננות הראשונה על משוואה (3) מוצאים שני פתרונות: $z=3$, $y=2$, $x=1$ ו- $z=4$, $x=y=2$ (בדוק!). נשאלות, באופן טבעי, השאלות:

א. במקרה של המשוואה (1), אם (a,b,c) מהווה פתרון, אז גם (ka,kb,kc), עם $k\epsilon N$ מהווים פתרונות. האם קיימת תוצאה דומה גם בנוגע למשוואה (3), ואם כן, מהי?

ב. במקרה של המשוואה (1) קיימות הנוסחאות (2) המובילות לכל פתרון של המשוואה. האם ניתן למצוא שיטות לקבל פתרונות של המשוואה (3), ואם כן, מהן?

<u>התשובות חיוביות והנה הן להלן</u>:

א. <u>משפט 1</u>. אם (a,b,c) מהווה פתרון של המשוואה (3), אז (k^2a,k^2b,k^3c) עם $k\epsilon N$ מהווה גם הוא פתרון של המשוואה (3).

<u>הוכחה</u>. נתון כי $a^3+b^3=c^2$. נכפיל את שני אגפי השוויון הזה ב- $k^6(k\epsilon N)$ ונקבל: $k^6a^3+k^6b^3 = k^6c^2$ דהיינו $(k^2a)^3+(k^2b)^3=(k^3c)^2$

מ.ש.ל.

<u>דוגמאות</u>: $(1,2,3)$ ו- $(2,2,4)$ מהווים פתרונות של המשוואה (3). וכך גם $(k^2,2k^2,3k^3)$ ו- $(2k^2,2k^2,4k^3)$ $k\epsilon N$ מהווים פתרונות של <u>אותה</u> משוואה.

<u>הגדרה 1</u>. אם (a,b,c) מהווה פתרון של המשוואה (3) ול-a ול-b אין ריבוע של מספר טבעי $k>1$ כגורם משותף, נגדיר את (a,b,c) <u>כפתרון קדום</u> של המשוואה (3) ואת (k^2a,k^2b,k^3c) <u>כהכללת הפתרון הקדום (a,b,c)</u>. בדוגמאות דלעיל $(1,2,3)$ ו- $(2,2,4)$ מהווים פתרונות קדומים

ו- $(k^2,2k^2,3k^3)$, $(2k^2,2k^2,4k^3)$ הכללות של אותם הפתרונות הקדומים.

<u>הגדרה 2</u>. שני פתרונות (a_1,b_1,c_1) ו- (a_2,b_2,c_2) נקראים פתרונות תלויים אם $a_1/a_2=b_1/b_2=t^2(t\epsilon Q)$, ונקראים פתרונות בלתי תלויים אם $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$.

<u>דוגמאות</u>: $(4,8,24)$ ו- $(9,18,81)$ מהווים פתרונות תלויים (בדוק!) למעשה הם מתקבלים מהכללת <u>אותו</u> פתרון קדום $(1,2,3)$ עבור $k=2$ ו-$k=3$ בהתאמה. לעומת זאת הפתרונות $(4,8,24)$ ו- $(8,8,32)$ מהווים פתרונות בלתי תלויים (בדוק!). הם מתקבלים מהכללות הפתרונות הקדומים השונים $(1,2,3)$ ו- $(2,2,4)$ בהתאמה.

ברור כי בראש ובראשונה מעוניינים אנו לגלות פתרונות בלתי תלויים. כי אח"כ אין כל קושי למצוא את הפתרונות התלויים. נדון אפוא בשיטות למציאת פתרונות קדומים, ז.א. פתרונות בלתי תלויים.

ב. בפעולה זו נשתדל למצוא כללים. הדבר ימנע מאיתנו לעבור פעמים באותו המקום או "להתפרץ לדלתות פתוחות".

<u>הערה 1</u>. השלשה $(2,2,4)$ מהווה את הפתרון הקדום היחיד (x,y,z) עם $y=x$. כי אם נציב ב-(3)

$y=x$, נקבל $2x^3=z^2$, ומכאן $z=x\sqrt{2x}$ והפתרון הקטן ביותר של משוואה זו הוא $z=4$, $x=2$. כל פתרון אחר עם $y=x$ יתקבל מהכללת פתרון זה בעזרת k כלשהו.

מכאן נובע כי מיותר לבדוק אם זוגות מסוג (a,a) עם $a>2$ מובילים לפתרונות קדומים של (3) או לא.

<u>הערה 2</u>. אם שלשה (a,b,c) עם $a\neq b$, מהווה פתרון של המשוואה (3), אז גם (b,a,c) מהווה פתרון. מכאן נובע כי מספיק לבדוק אם זוגות (a,b) עם $a<b$, מובילים לפתרונות של המשוואה (3) או לא.

מאחר שאנו כבר יודעים להיזהר מפעולות מיותרות, נראה איך נוכל לבנות באופן שיטתי פתרונות קדומים.

<u>משפט 2</u>. אם שני מספרים טבעיים (a,b) מקיימים את התנאים:

(i) אין להם גורם משותף ריבועי גדול מ-1,

(ii) $a^3+b^3=p$, כאשר p אינו ריבוע וגם אין לו גורם ריבועי,

אזי השלשה (pa,pb,p^2) מהווה פתרון קדום של המשוואה (3).

<u>הוכחה</u>. $(ap)^3+(bp)^3=p^3(a^3+b^3)=p^3\cdot p=p^4=(p^2)^2$ לכן (ap,bp,p^2) מהווה פתרון, ולמעשה פתרון קדום כי הרי יש ל-(ap,bp) הגורם המשותף p שאינו ריבוע, לפי הנחת המשפט.

דוגמה: יהיו $b=3$, $a=2$. אז $a^3+b^3=35$ ו-$p=35$ אינו ריבוע. בונים את השלשה $(ap=70, bp=105, p^2=35^2=1225)$ והיא מהווה פתרון קדום של (3).

משפט 3. אם שני מספרים טבעיים a ו-b מקיימים את התנאים:

$a=ma', b=mb'$, $m\in N-\{1\}$, $m\neq k^2$, $a'^3+b'^3=mc'^2$, $c'\in N$.

אז השלשה (ma',mb',m^2c') מהווה פתרון קדום של המשוואה (3).

הוכחה. $(ma')^3+(mb')^3=m^3(a'^3+b'^3)=m^3\cdot mc'^2=m^4c'^2=(m^2c')^2$

לכן $(ma'=a,mb'=b,m^2c')$ מהווה פתרון של (3) ואף פתרון קדום, מפני שהגורם המשותף m של a ו-b אינו ריבוע.

דוגמה: $a=14=14\cdot 1$, $b=70=14\cdot 5$,

לכן $m=14$, $a'=1$, $b'=5$ $(c'=3)$ $1^3+5^3=126=3^2\cdot 14$

בונים את השלשה $m^2c'=14^2\cdot 3=588$, $mb'=70$, $ma'=14$ ו- $(14,70,588)$ מהווה פתרון קדום של המשוואה (3) (בדוק!).

הערה 3. לסכום a^3+b^3 ישנן רק שלוש אפשרויות ביחס לריבוע:

(i) הוא עצמו ריבוע, (ii) יש לו גורם ריבועי, (iii) אין לו גורם ריבועי. נציין כי הבחנו לעיל בכל שלוש האפשרויות ובהשלכותיהן.

הערה 4. מספר הפתרונות הקדומים איננו גדול מדי.

לדוגמא: עבור $a<b<10$ ישנם רק שני הפתרונות (1,2,3) ו-(2,2,4).

עבור $10<a<b<100$ ישנם שישה פתרונות: (11,37,228), (14,70,588), (22,26,168), (33,88,847), (56,65,671), (65,91,1014),

עבור $9000<a<b<10.000$ אין אף פתרון.

II. הפרדת ריבוע לסכום שתי חזקות שלישיות
(הפרדת תיבה ריבועית לשתי קוביות)

נתייחס בהמשך לפירוש השני של המשוואה (3), כאשר קוראים את המשוואה "בעברית", מימין לשמאל. במקרה זה מפרידים את c^2 ל-a^3 ו- b^3 כך ש-c^2 יהיה שווה לסכום a^3+b^3, או נפח תיבה ריבועית בעלת המקצועות $(c,c,1)$ יהיה שווה לסכום נפחי שתי הקוביות בעלות המקצועות a ו-b בהתאמה. זהו למעשה, מקרה פרטי של בעיה הרבה יותר כללית, הידועה בשם ההשערה של ווארינג[4] לפיה כל מספר טבעי n ניתן להפריד לסכום של תשע חזקות שלישיות

לכל היותר. לדוגמה, את 75 ניתן להפריד ל-5 חזקות שלישיות, $75=1\cdot4^3+1\cdot2^3+3\cdot1^3$. או את 39,998 ניתן להפריד ל-4 חזקות שלישיות $39,998=1\cdot34^3+2\cdot7^3+1\cdot2^3$ [1]. למעשה מתייחסת השערתו של וארינג לא רק לחזקות שלישיות, אלא לכל חזקה k, אבל לא נאריך יותר בענין זה. נוסיף כי במשך הזמן הוכחה השערת וארינג עבור כל החזקות, אבל עד היום נשארה הבעיה "כמה מחוברים לכל היותר דרושים עבור החזקות השונות", פתוחה.

הבעיה שבה אנו עוסקים כאן היא מוגבלת יותר, היות שלא מדובר בהפרדת (i) כל מספר טבעי אלא רק בריבועים, (ii) ולא למספר כלשהו של חזקות שלישיות, אלא רק לשתי חזקות שלישיות, לדוגמה, מבין הריבועים הקטנים מ-10^2 ניתן להפריד רק שניים $3^2(=1^3+2^3)$ ו- $4^2(=2^3+2^3)$. מהריבועים בין 10^2 ו-100^2 ניתן להפריד רק 4; את $24^2(=4^3+8^3)$, $32^2(=8^3+8^3)$, $81^2(=9^3+18^3)$, $98^2(=7^3+21^3)$

נוכל לנסח שיטה אלגוריתמית לביצוע הפרדה זו.

נניח כי נתון ריבוע מסוים c^2.

מחשבים $n_1=\sqrt[3]{c^2-1^3}$. אם $n_1\in N$, אז $c^2=1^3+n_1^3$.

אם $n_1\notin N$, מחשבים $n_2=\sqrt[3]{c^2-2^3}$. אם $n_2\in N$, אז $c^2=2^3+n_2^3$,

ואם לא, עוברים ל- $n_3=\sqrt[3]{c^2-3^3}$. וכן הלאה, עד ל- $\sqrt[3]{c^2-i^3}$, כאשר $i^3<c^2<(i+1)^3$. ודאי שיכולים לקצר את התהליך, בדילוג על ערכים מסוימים של i, אם רואים מלכתחילה כי "באזור" זה לא תתקבל תשובה חיובית.

דוגמה 1: יהיה $c^2=2496^2=6230016$. מחשבים, זה אחר זה, לפי הצורך:

(1) $\sqrt[3]{2496^2-1^3}=184.005$, (2) $\sqrt[3]{2496^2-10^3}=183.995$

(3) $\sqrt[3]{2496^2-9^3}=183.99$, (4) $\sqrt[3]{2496^2-8^3}=184$

לכן התשובה היא: $2496^2=8^3+184^3$

דוגמה 2: יהיה $c^2=39^2=1521$. היות שלא מוצאים אף זוג (a,b) המתאים, התשובה היא: לא ניתן להפריד את 39^2 לסכום של שתי חזקות שלישיות.

ישנם מקרים רבים, בהם ניתן לדעת מראש כי את c^2 אי אפשר להפריד ל- x^3+y^3, ולכן יהיה מיותר להפעיל את האלגוריתם הנ"ל לגבי c^2. נשתמש ברעיון הקונגרואנציות, כפי שעושים במאמר [2].

<u>משפט 4</u>.

אם $c\equiv\pm2 \pmod 9$, אז לא קיימים $x,y\in N$ כך ש- $c^2=x^3+y^3$.

<u>הוכחה</u>: עבור כל מספר $a\in N$ קיימות הקונגרואציות $a\equiv0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4 \pmod 9$, לכן $a^2\equiv0,1,4,-2 \pmod 9$ ו- $a^3\equiv0\pm1 \pmod 9$.

מכאן נובע כי $a^3+b^3\equiv0,\pm1,\pm2 \pmod 9$, היות שלא קיימת הקונגרואנציה $a^3+b^3\equiv4 \pmod 9$, נובע כי לא קיים השוויון $c^2=x^3+y^3$ אם $c^2\equiv4 \pmod 9$, ז.א. אם $c\equiv\pm2 \pmod 9$ מ.ש.ל.

<u>דוגמאות</u>:

$c^2=7^2=49$; $c^2=542^2=293,764$

$c^2=1,111,111^2=1,234,567,654,321$

<u>נספח 1</u>. המשוואה $x^3+y^3=z^2$ מאפשרת גישה למשוואות אחרות כמו: $x^3+y^3=z^5$, $x^3+y^3=z^8$, וכדומה. את $x^3+y^3=z^5$ ניתן להביא לסוג $u^3+v^3=z^2$, אם מחלקים את שני האגפים ב-z^3 ומסמנים $u=x/z$, $v=y/z$.

דוגמה: $x^3+y^3=228^5$. $(z=228)$

$$\left[\frac{x}{228}\right]^3+\left[\frac{y}{228}\right]^3=228^2 \quad , \quad u=\frac{x}{228},\ v=\frac{y}{228}$$

אז $\left[\frac{x}{228}\right]^3+\left[\frac{y}{228}\right]^3=228^2$, מסמנים: $u=\frac{x}{228}$, $v=\frac{y}{228}$

ולכן יש לפתור את המשוואה $u^3+v^3=228^2$. הפתרון הוא $v=37$, $u=11$ ולכן הפתרון הקודם הוא: $x=11\cdot228=2508$ $y=37\cdot228=8436$.

<u>נספח 2</u>. אנו מציעים לקורא לפתור את התרגילים דלהלן .

1) נתון $b=3$, $a=1$. בנה בעזרתם שלשה המהווה פתרון קדום למשוואה (3).

2) נתון $b=4$, $a=3$. בנה בעזרתם שלשה המהווה פתרון קדום למשוואה (3).

3) המספרים $b=84$, $a=28$ מובילים לפתרון של המשוואה (3) וגם הרבעים שלהם 7,21 מובילים לפתרון . הסבר מדוע.

4) המספרים $b=26$, $a=22$ מובילים לפתרון של המשוואה (3), לעומת זאת, מחציותיהם - 13, 11 אינן מובילות לפתרון . הסבר מדוע.

5) פתור את המשוואה $x^3+y^3=243$.

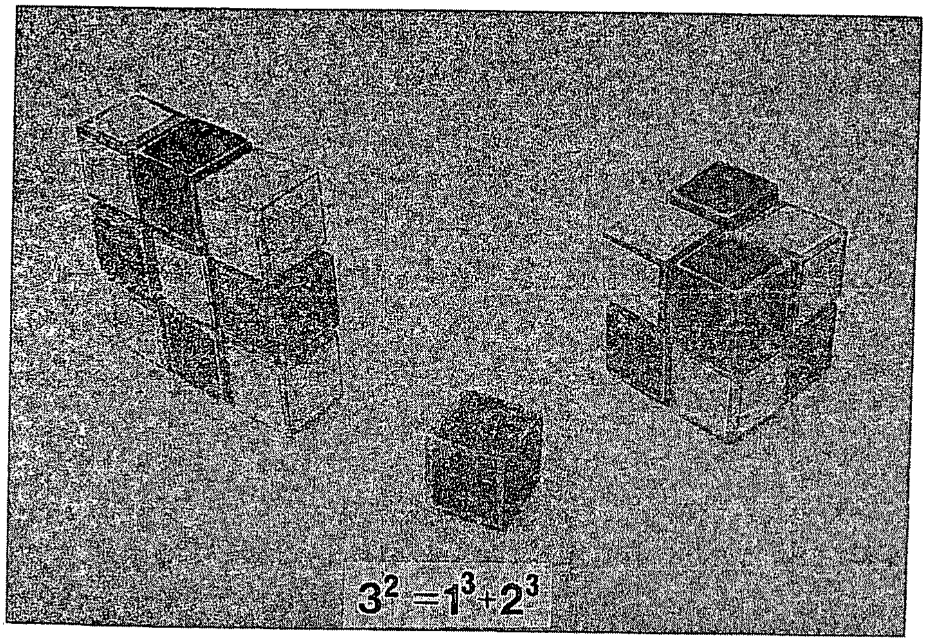
הדרכה: ראה נספח 1.

6) פתור את המשוואה: $8x^3+27y^3=192^6$

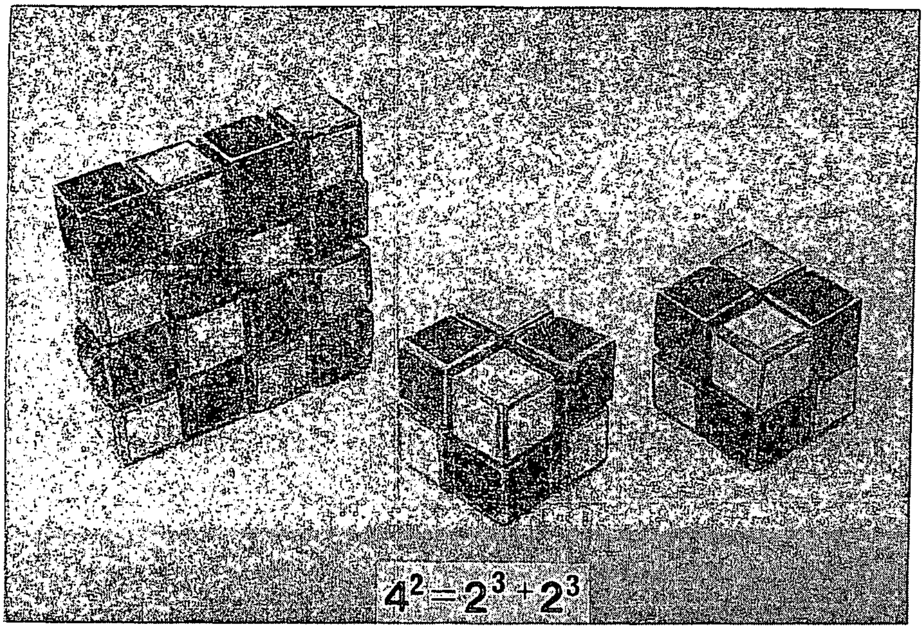
הדרכה: חלק את שני האגפים ב- 192^6.

7) קח 100 קוביות שוות.

(i) סדר 9 קוביות בשכבה אחת, כך שתקבל תיבה בעלת המקצועות 3,3,1, עכשיו פרק את המבנה והפרד אותו לשתי קוביות בעלות המקצועות 1,2, בהתאמה.

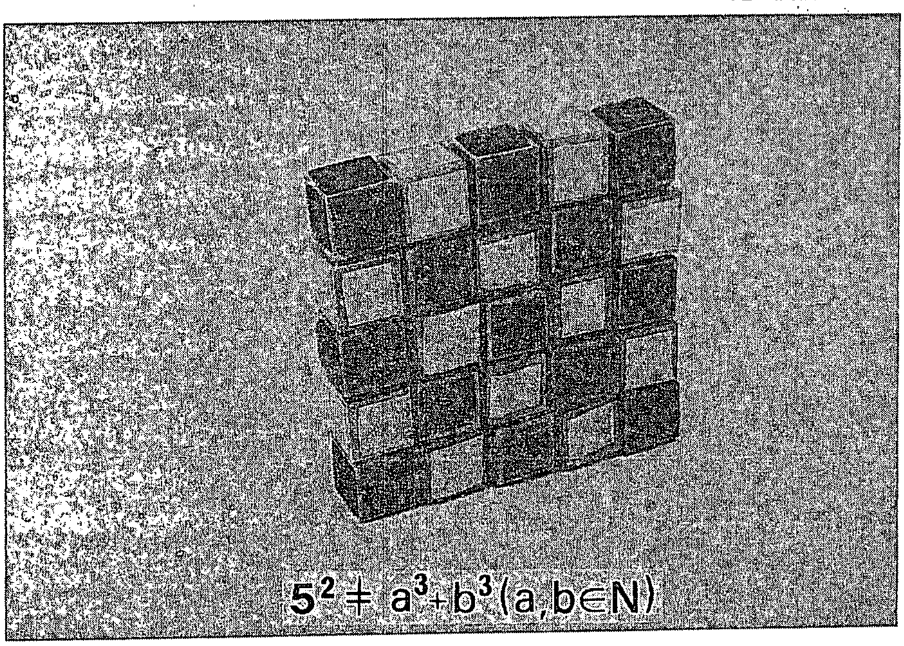


(ii) בצע דבר דומה,אך עם 16 קוביות.



(iii) בצע דבר דומה עם 4, 25, 36, 49, 64, 81, 100 קוביות.

נמק מדוע הצלחת בשני המקרים הראשונים ולא הצלחת בכל המקרים האחרים.



<u>הבעת תודה</u>. תודתנו נתונה לגבי' יטי ורון מהמחלקה להוראות המדעים של מכון
ויצמן למדע, שהפיקה עבורנו באמצעות המחשב את כל הפתרונות ל-
a<b<10,000

כמו כן נתונה תודתנו לעמיר עמיאל וברנט קראנטר, מבית המלאכה של היחידה לפעולות נוער של מכון ויצמן, אשר בנו את הקוביות מהן הורכבו הגופים שבתמונות 1,2,3 לעיל.

(1) Diophantos (360 לפני הספירה)

(2) Pierre Fermat (1601-1665)

(3) Leonhard Euler (1707-1783)

(4) E. Waring (1734-1798)

<u>בבליוגרפיה</u>:

1. Georg Wolff u.a., Handbuch der Schulmathematik Band 2, Hermann Schroedel Verlag, Hannover
2. Davenport H. and Landau E., On the representation of positive integers as sums of three cubes of positive rational numbers, In: Number theory and analysis, Deutscher Verlag, Berlin (1968).

<u>פתרון בעיות מגלירן מס' 12</u>

67. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ הם שתי סדרות של מספרים טבעיים המוגדרות כדלקמן :

$$\left.\begin{array}{l} X_0 = 0 \\ X_1 = 1 \\ \text{עבור כל } n>0 \\ X_n+1=4X_n-X_n-1-1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} y_0 = 1 \\ y_1 = 2 \\ \text{עבור כל } n>0 \\ .y_{n+1} = 4y_n-y_n-1 \end{array}$$

הוכח כי עבור כל $n\geq 0$, $Y_n{}^2-3x_n{}^2=1$.

<u>פתרון</u>: נניח כי β, α הם שורשי המשוואה

$$(1) \qquad \varepsilon^2-4\varepsilon+1 = 0$$

דהיינו $\alpha,\beta = 2\pm\sqrt{3}$

עבור h,k קבועים שרירותיים תקיים הסדרה $\{h\alpha^n+k\beta^n\}$ את משוואת הרקורסיה. ולכן נשאר רק לבחור ב-h,k כך שקיימו את תנאי ההתחלה. בדרך זו נקבל את הסדרות

$$\left.\begin{array}{l} x_n = (\alpha^n-\beta^n)/2\sqrt{3} \\ y_n = (\alpha^n+\beta^n)/2 \end{array}\right\} \quad (n= 0,1,\ldots)$$

רואים מיד כי

$$\begin{aligned} y_n{}^2-3x_n{}^2 &= \tfrac{1}{4}\{(\alpha^n+\beta^n)^2-(\alpha^n-\beta^n)^2\} \\ &= \alpha^n\beta^n \\ &= (\alpha\beta)^n = 1 \end{aligned}$$

68. S היא קבוצה סופית של נקודות במישור, והן צבועות, כל אחת, כחול או לבן. בין הנקודות אין אף תת-קבוצה אחת של שלוש נקודות על ישר אחד, שהן כולן בעלות אותו הצבע. הוכח כי ניתן למצוא שלוש נקודות A,B,C על S, כולן צבועות באותו הצבע, כך שבמשולש ABC יש לפחות צלע אחת אשר אין עליה נקודה בעלת הצבע השני.

<u>פתרון</u>:

נסתכל באותם המשולשים אשר כל שלושת קדקודיהם בעלי אותו הצבע. מאחר שמספרם סופי, יהיה לפחות אחד מהם בעל שטח מינימלי. נניח כי ABC הוא משולש כזה וכי A,B,C הן כולן לבנות. אם על כל אחת מצלעותיו של משולש זה יש נקודה כחולה, נניח כי A' על BC, B' על CA ו-C' על AB הן כולן כחולות. אבל אז יהיה השטח של A'B'C' קטן מזה של ABC, בניגוד להנחה.

בעיות נוספות

72. כל המקדמים בפולינום נתון $P(x)$ הם מספרים שלמים ו-a הוא מספר שלם. אם נתון כי:

$$P(a)=b$$
$$P(b)=c$$
$$P(c)=d$$
$$P(d)=e$$
$$P(e)=a$$

הוכח כי $a=b=c=d=e$!

73. בסדרה החשבונית $\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}$ וההפרש הקבוע בין מספרים עוקבים הוא אי-זוגי. הוכח כי הסכום

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$$

לא יוכל להיות מספר שלם.

74. המרובע ABCD חוסם מעגל ו- $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$. הוכח כי שטח המרובע הוא:

$$\left[abcd\right]^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\sphericalangle A+\sphericalangle C}{2}$$