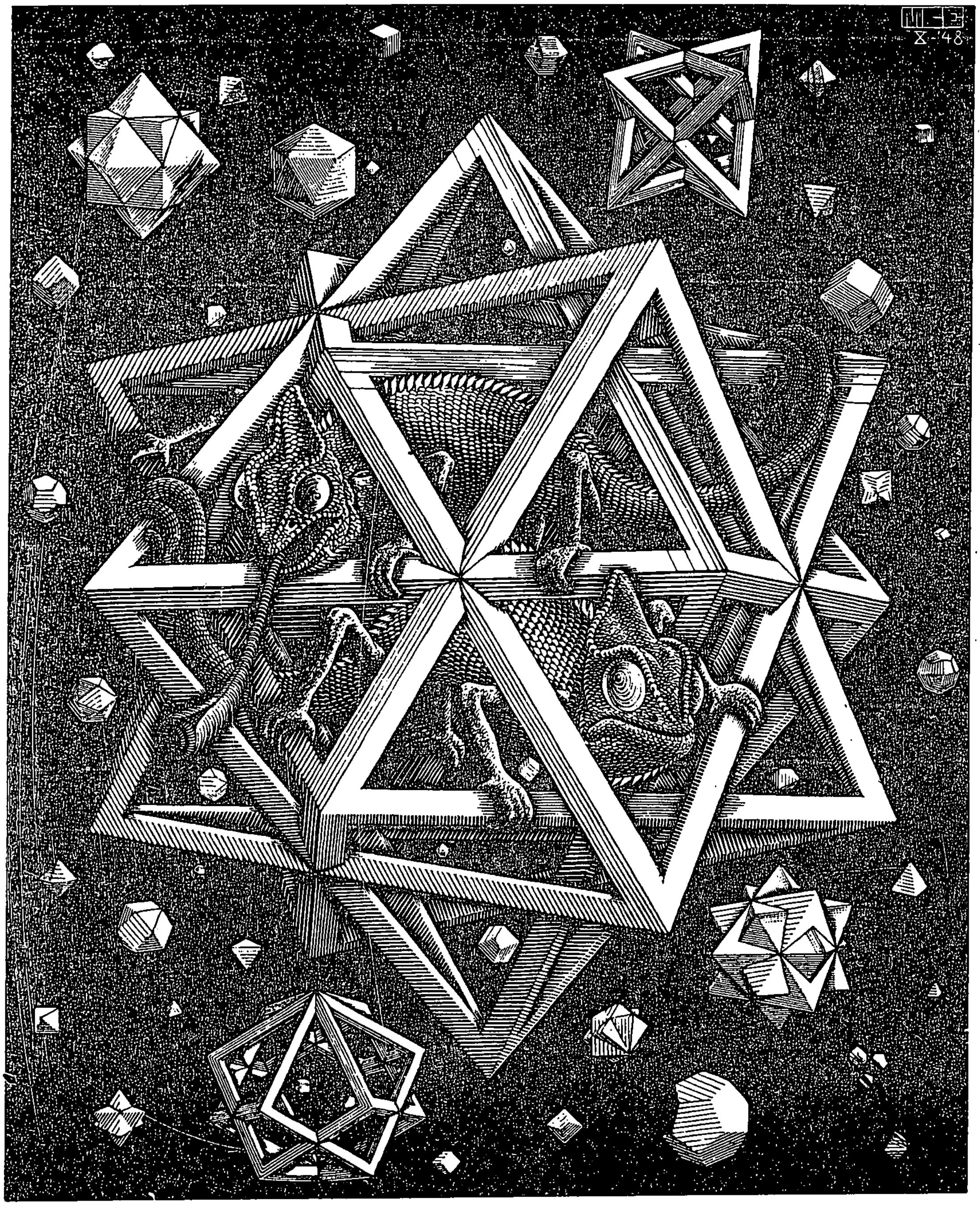
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס' 9 ספרית הוראת המדעים שבט תשמ"ח - ינואר 1988



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון ויצמן
רחובות

בתמיכת המרכז המדעי י.ב.מ. ישראל

תוכן הענינים

עמוד

****
****

אתגר - גליונות מתמטיקה ISSN 0334 - 0201
מוצא לאור ע"י הפקולטות למתמטיקה בטכניון ובמכון ויצמן
המערכת: פרופ' א. ברמן וד"ר צ. הראל, הפקולטה למתמטיקה, הטכניון,
פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שמושית, מכון ויצמן.
מען המערכת: הפקולטה למתמטיקה, הטכניון, מכון טכנולוגי לישראל,
חיפה 32000, טל': 294275(04).

דבר - המערכת

המאמר המרכזי בגליון שלפנינו הוא פרי עטו של ד"ר מיכאל קורן, המפקח על למודי המתמטיקה במשרד החנוך. נושא הוקטורים הוא אחד הנושאים החדשים העומדים להכלל בתכנית הלמודים במתמטיקה. בינתיים הוא מוכר בודאי לאחדים מכם מלמודי הפיזיקה. במאמר זה ובהמשכו שיופיע בגליון הקרוב, מתקבלות תוצאות גאומטריות שונות בצורה יפה ופשוטה.

כבגליונות הקודמים מופיעות בעתון בעיות רבות. נוסף לבעיות החדשות, מסתיים מאמרו של ד"ר קורן בבעיות אותן נתן לפתר בעזרת וקטורים. בעיות נוספות מופיעות במאמרו של פרופ' קלמקין. לפרופ' קלמקין, מאוניברסיטת אלברטה בקנדה, יש נסיון רב בהכנת נבחרות אמריקאיות וקנדיות לאולימפיאדות מתמטיות. בבקורו האחרון בטכניון נאות פרופ' קלמקין להעניק לקוראי העתון מנסיונו. דבריו ב"בעיות אימון לאולימפיאדות מתמטיות" מדברים בעד עצמם. הפעם בחרנו מהבעיות שהציע חמש, העוסקות בפולינומים. בגליונות הבאים תוצגנה בעיות בנושאים אחרים.

העורכים ישמחו לקבל פתרונות של הבעיות הנ"ל או חלק מהן. כפרסים לפותרים מצטיינים הכנו ספרים משעשעים במתמטיקה.

נשמח מאד גם אם תשתתפו בהצעת בעיות, כתיבת מאמרים או מכתבים למערכת כמו הערותיו של מר גרשוביץ למאמרו של שוני דר.

לסיום, מספר מנויים מסרו לנו שגליון מס' 8 לא הגיע אליהם. נודה לכם אם תודיעו לנו על חברים שגליון זה או קודמו לא הגיעו אליהם.

ב ב ר כ ה

ה מ ע ר כ ת

הוכחה גאומטרית לתופעה מספרית

ד"ר רון אהרוני, הטכניון

קח שני מספרים זרים, לדוגמא $b=73$, $a=22$. אלו מספרים ניתנים להצגה כצרוף שלם של שני המספרים, כלומר בצורה $xa+yb$, כאשר x ו-y מספרים שלמים? הבה ננסה תחילה ליצור בעזרת a ו-b מספר חיובי קטן ככל האפשר. למשל: $51=73-22$ ניתן לייצוג כזה, וכן $29=51-22$, וכן $7=29-22$. עתה נוכל לייצג את $15=22-7$, וכן את $1=15-2\times 7$. או, בקיצור

$$73-3\times 22=7$$

$$22-3\times 7=1$$

משייצגנו את 1, ניתן לייצג כל מספר שלם, משום שהוא כפולה של 1. התהליך שעשינו בכדי להגיע ל-1 נקרא <u>אלגוריתם אוקלידס</u>, והוא פועל לכל a , b זרים (הוכח!). הראינו אם כך שאם a , b זרים ניתן לייצג בעזרתם כל מספר שלם.

עתה נשאל: נניח ש-b , a חיוביים. אלו מספרים ניתנים להצגה כ-$xa+yb$ כאשר $x , y \geq 0$? נקח דוגמא מספרית קטנה יותר, למשל $b=5$, $a=3$. קל לראות שאת 7 לא ניתן לייצג בדרך זו, ואילו כל מספר החל מ-8 ניתן לייצוג. כש $a=3$ ו-$b=4$ המספר האחרון שאינו ניתן לייצוג כזה הוא 5. אם נסמן ב $n(a,b)$ את המספר הראשון שהחל ממנו אפשר לייצג כל מספר בצורה אי-שלילית בעזרת a ו-b, נקבל את הטבלה הבאה:

a, b	n(a,b)
3, 1	0
3, 2	2
3, 4	6
3, 5	8

אנו מגלים של- $a=3$ מתקיים $n(a,b)=2(b-1)$, ומכיוון שתפקידי a ו-b סימטריים אפשר לנחש כי $n(a,b)=(a-1)\times(b-1)$.

מדוע הדבר נכון? נתבונן שוב בדוגמא של $b=5$, $a=3$, וננסה לייצג את המספר 8.

אנו יודעים כי הוא ניתן לייצוג כלשהו (לאו דוקא אי-שלילי), למשל כ:

$33-25=11\times3-5\times5$. נחסיר 15 מ-33 ונוסיף אותו ל- 25-, ונקבל:

$8=18-10=6\times3-2\times5$, עתה נחסיר 15 מ-18 ונוסיף אותו ל 10-, ונקבל

$8=5+3$ (מה שידענו כמובן מן ההתחלה). הבה נכתוב את הטיעון הזה באופן כללי.

<u>טענה:</u> $(a-1)\times(b-1)$ הוא המספר הראשון שהחל ממנו ניתן לייצג כל מספר בעזרת a ו-b בצורה אי-שלילית.

<u>הוכחה:</u> יהא m מספר טבעי גדול או שווה ל $(a-1)\times(b-1)$. נראה שאפשר לייצג את m בצורה אי-שלילית. ידוע לנו כבר שאפשר לייצג את m בצורה כלשהי, נאמר $m=xa+yb$. אם x ו-y אי-שליליים סיימנו. נניח למשל ש $y<0$. נחסיר ab מ-xa ונוסיפו ל-yb, ונקבל: $m=(x-b)a+(y+a)b$. מכיוון שעל פי הנחתנו $m\geq(a-1)\times(b-1)$ הרי $xa=m-yb>m\geq(a-1)(b-1)=a(b-1)+1$ ואם נחלק את האגף השמאלי ביותר ואת האגף הימני ביותר ב-a נקבל $x>b-1+1/a$. כיון ש x מספר שלם, נובע ש $x\geq b$. לכן בייצוג החדש של m המקדם של a, שהוא $x-b$, עדיין אי-שלילי. הגענו אם כך לייצוג של m שבו המקדם השלילי קטן יותר בערכו המוחלט, או שהפך לאי-שלילי, ואילו המקדם השני נשאר אי-שלילי. בדרך זו אנו יכולים להגיע לכך ששני המקדמים יהיו אי-שליליים.

נראה, מצד שני, שאת $(a-1)(b-1)-1=ab-a-b$ אי אפשר לייצג בצורה אי-שלילית. נניח שכן. אזי $ab-a-b=xa+yb$ כש $x,y\geq0$. נעביר אגפים: $ab=(x+1)a+(y+1)b$. יוצא ש $x+1$ מתחלק ב b (מכיון ששאר הביטויים בשויון מתחלקים ב b). אבל מכיון ש a זר ל b נובע מכך ש $x+1$ מתחלק ב b-, ולכן $x+1\geq b$, כלומר $x\geq b-1$. אבל אז:

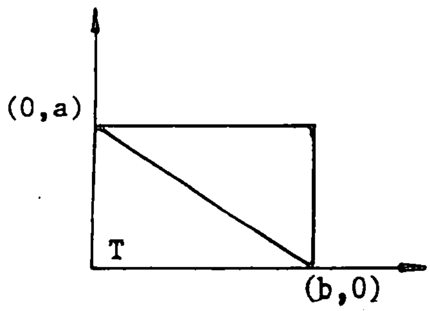
$ab-a-b=xa+yb\geq(b-1)a=ab-a$, סתירה.

תופעה מעניינת במיוחד נגלה אם ננסה למצוא אלו מן המספרים הקטנים מ $(a-1)(b-1)$ (כולל 0) ניתנים לייצוג אי-שלילי. לדוגמא, ל $b=5$, $a=3$

אלו הם 6 ,5 ,3 ,0 כלומר 4 מספרים. ל $b=5$, $a=3$ אלו הם 10, 9, 7,
6, 3, ו-0, כלומר 6 מספרים. באופן כללי אפשר לנחש את הטענה הבאה:

<u>טענה</u>: מחצית מן המספרים בין 0 ובין $(a-1)(b-1)-1$ ניתנים לייצוג אי-שלילי בעזרת a ו-b. (כלומר - $(a-1)(b-1)/2$ מספרים).

לעובדה הזאת יש הוכחה גאומטרית יפה.



נתבונן במערכת צירים x,y במלבן

$R=\{(x,y) : 0\le x\le a , 0\le y\le b\}$ ובמשולש

$T=\{(x,y) : 0\le x , 0\le y , xa+yb\le ab\}$.

<u>נקודת שריג</u> היא נקודה ששיעוריה, x ו-y, שלמים.

<u>טענת עזר</u>: כל מספר m המקיים $0\le m\le ab$ הניתן לייצוג אי-שלילי בעזרת a ו-b מתאים לנקודת שריג אחת בדיוק ב - T, פרט ל - $m=ab$, המתאים לשתי נקודות השריג (0,a) ו-(b,0).

<u>הוכחה</u>: אם $m\le ab$ ו- $m=xa+yb$ אז m מתאים לנקודה (x,y) שב- T.
נראה שההתאמה חד-ערכית, כלומר שלא קיימת נקודה נוספת (x',y') ב - T המתאימה ל - m. לו היתה כזו, הרי לפי הגדרת ההתאמה, היה מתקיים:
$m=x'a+y'b=xa+yb$, ולכן $(x-x')a=(y'-y)b$. מכיוון ש - a זר ל - b, יוצא ש $x-x'$ מתחלק ב - b. אבל מכיוון ש - $0\le x',x\le b$, מתקיים:
$|x-x'|\le b$, ולכן נובע ש $x-x'=0$ או $|x-x'|=b$. המקרה הראשון לא ייתכן, משום שאם $x=x'$ אז מן השויון $xa+yb=x'a+y'b$ היה נובע גם $y=y'$, בסתירה להנחה ש $(x',y')\neq(x,y)$. אם $|x-x'|=b$ אז $x=0$ ו- $x'=b$ או $x'=0$ ו - $x=b$. במקרה הראשון $y=b$ ו - $y'=0$ ובמקרה השני $y=0$, $y'=b$. כלומר ל - ab שני ייצוגים על ידי נקודות ב - T, הלא הן (0,a) ו - (b,0). לכל מספר הקטן מ - ab הראינו שקיים רק ייצוג אחד.

יהא 'T המשולש T, כשמרחיקים ממנו את הנקודה (0,a). על פי טענת העזר, מספר המספרים מ - 0 עד ab (כולל קצוות) הניתנים לייצוג

אי-שלילי בעזרת a ו-b שווה למספר נקודות השריג ב - 'T. מהתבוננות בסימטריה שבציור 1 נובע שמספר זה הוא בדיוק חצי ממספר נקודות השריג ב - R.

(שים לב לכך שעל פי טענת העזר על האלכסון של R נמצאות בדיוק שתי נקודות שריג). אבל ב - R יש $(a+1)(b+1)$ נקודות שריג, ולכן ב - 'T יש $(a+1)(b+1)/2$ נקודות שריג, כלומר, קיימים $(a+1)(b+1)/2$ מספרים בין 0 ו - ab הניתנים לייצוג אי-שלילי. אולם אנו יודעים כי כל מספר בין $(a-1)(b-1)$ ובין ab ניתן לייצוג כזה. לכן מספר המספרים הניתנים לייצוג עד $(a-1)(b-1)-1$ הוא: $(a+1)(b+1)/2-[ab-(a-1)(b-1)+1]=(a-1)(b-1)/2$ שהוא מה שהיה להוכיח.

****

****

ה ז מ נ ה

<u>אתגר בעל פה</u>

בחופשת פסח, יום ה' י"ג בניסן תשמ"ח, 31.3.88 בין השעות 14.00 - 11.00, יתקיים בפקולטה למתמטיקה בטכניון, בבנין אמאדו, מפגש עם עורכי אתגר וחברי הסגל של הפקולטה.

בתכנית:

הרצאות מתמטיות משעשעות

סרטונים מתמטיים

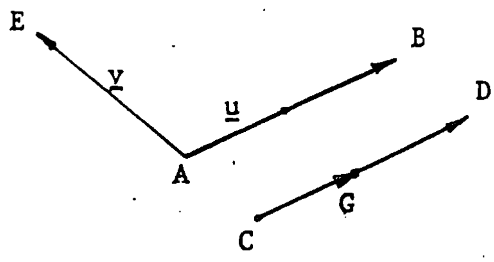
כבוד קל

פרסים לקוראים מצטיינים.

וקטורים

ד"ר מיכאל קורן, משרד החנוך

א. מבוא וקטורים הם חיצים במרחב ואפשר להגדיר עליהם פעולות הדומות לפעולות בין מספרים ולהוכיח בעזרת פעולות אלו משפטים בגאומטריה. מסמנים וקטור בעזרת נקודת ההתחלה ונקודת הסיום שלו, עם חץ מעליהם, או באמצעות אות קטנה עם קו מתחתה. כך באיור 1, הוקטורים היוצאים מן הנקודה A הם $\underline{u}=\overrightarrow{AB}$ ו $\underline{v}=\overrightarrow{AE}$.



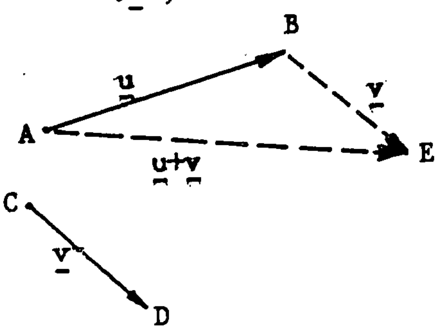
איור 1

בפיזיקה, מסמנים בעזרת וקטורים כוחות, מהירויות וגדלים נוספים שיש להם כוון. במאמר זה נראה כיצד ניתן לנצל וקטורים לצרכים מתמטיים.

שני וקטורים הם שווים, אם יש להם אותו כוון ואותו אורך. כך באיור 1, הקטעים AB ו CD שווים ומקבילים ולכן הוקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו $\overrightarrow{CD}$ שווים. נוכל לרשום $\underline{u}=\overrightarrow{CD}$ או $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. הנקודה G באיור 1 היא אמצע הקטע CD ולכן קיים השוויון $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{GD}$.

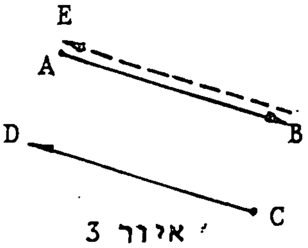
ב. פעולות על וקטורים

1. **חיבור וקטורים.** אם נתונים שני וקטורים $\underline{u}=\overrightarrow{AB}$, $\underline{v}=\overrightarrow{CD}$ אז כדי למצוא את הסכום $\underline{u}+\underline{v}$ יש לקחת וקטור $\overrightarrow{BE}$ השווה ל $\overrightarrow{CD}$, ואשר מתחיל בנקודה B, בה מסתיים $\overrightarrow{AB}$ ואז הוקטור $\overrightarrow{AE}$ הוא הסכום $\underline{u}+\underline{v}$. זהו הוקטור היוצא מנקודת ההתחלה של המחובר הראשון $\underline{u}$ ומסתיים בנקודת הסיום של המחובר השני, $\underline{v}$. (ראה איור 2).



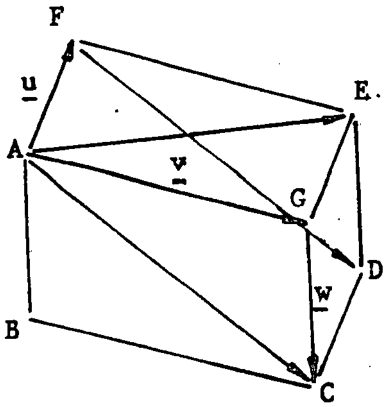
איור 2

אם הוקטורים שיש לחבר הם שווים בגודלם והפוכים בכוונם כמו באיור 3, אז בבנית וקטור הסכום נקבל "חץ מנוון" שכן הנקודות A ו E יתלכדו. מוסכם לכן לקרא וקטור גם ל"חץ"



איור 3

שהצטמצם לנקודה. וקטור זה נקרא וקטור האפס ומסומן -$\underline{0}$ ואכן מהגדרת החיבור נובע כי לכל וקטור $\underline{u}$ קיים $\underline{u}+\underline{0}=\underline{0}+\underline{u}=\underline{u}$. הוקטורים $\vec{AB}$ ו $\vec{CD}$ באיור 3, אשר הם שווים באורכם והפוכים בכוונם, נקראים וקטורים נגדיים זה לזה, וכמו במספרים אם נסמן $\underline{u}=\vec{AB}$ אז נסמן את הוקטור $\vec{CD}$, הנגדי ל $\vec{AB}$ כ $-\underline{u}$. ברור כי לכל וקטור $\vec{AB}$ הוקטור $\vec{BA}$ הוא הנגדי לו.

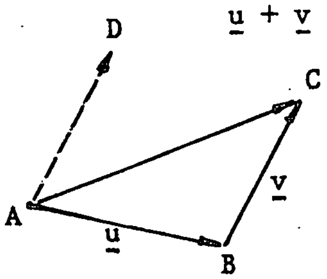


איור 4

<u>תרגיל</u> באיור 4, המרובעים AFEG , CGED ו ABCG הם מקבילית. הבע כל אחד מן הוקטורים AE , AC , FD כסכום של שניים מן הוקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$

נראה כעת כי החיבור שהגדרנו בין וקטורים מקיים את חוק החילוף:

<u>משפט</u> לכל שני וקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ קיים: $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$



איור 5

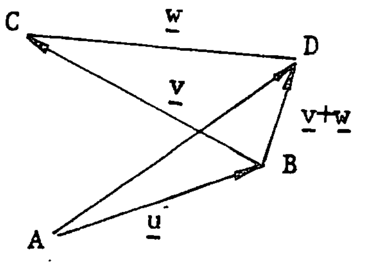
<u>הוכחה:</u> באיור 5, בנינו את $\underline{v}$ כהמשך ל $\underline{u}$ ולכן $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}=\underline{u}+\underline{v}$. הוספנו לשרטוט גם וקטור $\vec{AD}$ השווה ל $\underline{v}$. המרובע ABCD הוא מקבילית, ולכן קיבלנו גם כי $\vec{DC}=\underline{u}$ (אם כי DC איננו משורטט). קיים כמובן $\vec{AD}+\vec{DC}=\vec{AC}$ ומאחר ו $\vec{AD}=\underline{v}$, ו $\vec{DC}=\underline{u}$ הראינו כי $\vec{AC}=\underline{v}+\underline{u}$, כלומר $\underline{u}+\underline{v}=\underline{v}+\underline{u}$.

<u>הערה</u> אם $\underline{u}$ ו $\underline{v}$ הם באותו כוון או בכוונים מנוגדים, אז לא מתקבל משולש בבנית הסכום, אך קל לבדוק שגם במקרה כזה מתקיים החילוף.

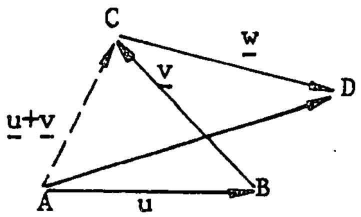
במקרים רבים, וקטורים ייתנו לנו כשהם יוצאים מנקודה אחת. באיור 5 רואים כי אם שני וקטורים יוצאים מנקודה אחת, אז סכומם הוא <u>אלכסון המקבילית</u> שהוקטורים מהווים שתי צלעות סמוכות שלה.

בפיזיקה, מתארים כוחות הפועלים על נקודה אחת כוקטורים היוצאים מנקודה זו וההשפעה של שני כוחות הפועלים על נקודה אכן שווה להשפעה של כוח השווה לסכום הוקטורים. הפיזיקאים קוראים לוקטור הסכום <u>וקטור שקול</u> או שקול הכוחות ולכלל החיבור קוראים <u>כלל המקבילית</u>.

ראינו כי סכום וקטורים, למרות שהגדרתו מבחינה בין המחובר הראשון למחובר השני, מקיים את חוק החילוף. נוכח כעת שהסכום מקיים גם את חוק הקיבוץ. לשם כך די לעיין באיור 6



<u>6ב</u>



<u>6א</u>

<u>איור 6</u>

באיור 6א' רואים כי

$$\begin{aligned}\vec{AD} &= \vec{AC} + \vec{CD}\\ &= (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD}\\ &= (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}\end{aligned}$$

ובאיור 6ב' רואים כי

$$\begin{aligned}\vec{AD} &= \vec{AB} + \vec{BD}\\ &= \vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD})\\ &= \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})\end{aligned}$$

לפני שנעבור להגדרת פעולה נוספת, נסכם את תכונת החיבור:

לכל שלושה וקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ מתקיים:

(א) חוק החילוף: $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$

(ב) חוק הקיבוץ: $\underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}$

(ג) קיום איבר ניטרלי: $\underline{u} + \underline{0} = \underline{u}$

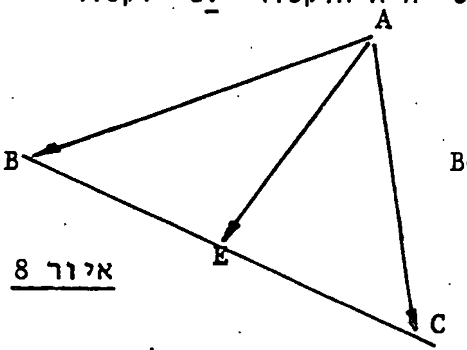
(ד) קיום וקטור נגדי: $\underline{u} + (-\underline{u}) = \underline{0}$

2. כפל של וקטור בסקלאר

אם מחברים וקטור $\underline{v}$ לעצמו מקבלים וקטור שכוונו ככוון $\underline{v}$ ואורכו פי שנים מאורך $\underline{v}$. נרשום $\underline{v}+\underline{v}=2\underline{v}$. קל לראות כיצד ניתן להכליל רישום זה למספרים נוספים. לדוגמה, באיור 7, B אמצע AC ולכן קיים $\vec{AC}=2\vec{AB}$ אך אפשר גם לרשום $\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AC}$. טבעי לכן להגדיר כפל של וקטור במספר. מקובל לקרוא <u>סקלארים</u> למספרים הכופלים וקטורים ולכן נדבר להבא על כפל של וקטור בסקלאר.

<u>איור 7</u>

<u>הגדרה:</u> לכל וקטור $\underline{v}$ וסקלאר t נגדיר את הוקטור $t\underline{v}$ כוקטור שכוונו ככוון $\underline{v}$ אם t חיובי וכוונו הפוך לכוון $\underline{v}$ אם t שלילי ואשר אורכו הוא אורכו של $\underline{v}$ מוכפל ב $|t|$ (אם t הוא אפס יהיה הוקטור $t\underline{v}$ וקטור האפס).



<u>איור 8</u>

<u>דוגמה:</u> אם במשולש ABC, E היא אמצע הצלע BC אז התיכון $\vec{AE}$ מקיים

$$\vec{AE} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$$

<u>הסבר:</u> הסכום $\vec{AB} + \vec{AC}$ הוא אלכסון המקבילית ש B , A , C הם שלושה מקודקודיה. אלכסוני המקבילית חוצים זה את זה ולכן AE הוא חצי האלכסון.

את תכונות הכפל בסקלאר נסכם במשפט הבא:

<u>משפט</u> לכל שני וקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ וסקלארים s , t, מתקיימים

(א) $s(\underline{u}+\underline{v}) = s\underline{u} + s\underline{v}$

(ב) $(s+t)\underline{u} = s\underline{u} + t\underline{u}$

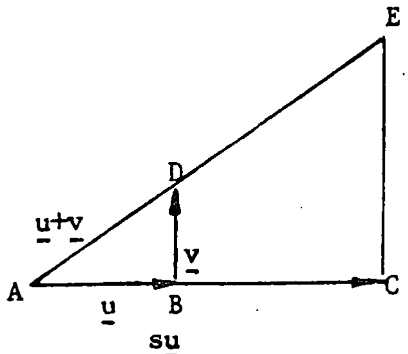
(ג) $(st)\underline{u} = s(t\underline{u})$

(ד) $s\cdot\underline{0} = \underline{0}$

(ה) $1\cdot\underline{u} = \underline{u}$

תכונות (ב) - (ה) נובעות ישירות מהגדרת הכפל.

תכונה (א) מודגמת באיור 9:



איור 9

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \underline{u} + \underline{v}$$

$$\vec{AC} = s\vec{AB}$$

הקטע CE מקביל ל BD וחותך את המשך AD ו E. המשולשים ABD ו ACE דומים

ולכן $\vec{AE} = s\vec{AD}$, $\vec{CE} = s\vec{BD}$

$$= s(\underline{u} + \underline{v})$$

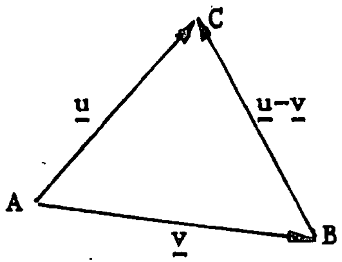
ומצד שני $\vec{AE} = \vec{AC} + \vec{CE} = s\underline{u} + s\underline{v}$

לפני שנעבור ליישומים גאומטריים של החיבור ושל הכפל בסקלאר נגדיר חיבור וקטורים: $\underline{u} - \underline{v} = \underline{u} + (-\underline{v})$

אם הוקטורים $\underline{u}$ ו $\underline{v}$ יוצאים מנקודה אחת,

אז $\underline{u} - \underline{v}$ הוא הוקטור מנקודת הסיום של $\underline{v}$ לנקודת הסיום של $\underline{u}$ שכן (איור 10)

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = (-\underline{v}) + \underline{u} = \underline{u} + (-\underline{v}) = \underline{u} - \underline{v}$$



איור 10

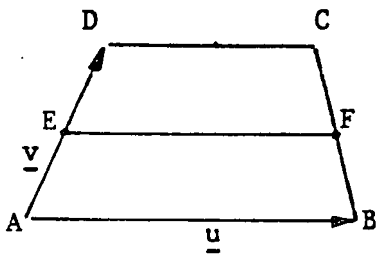
3. <u>יישומים גאומטריים</u>

נתחיל בהוכחה למשפט ידוע:

משפט קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.

הוכחה: בטרפז שבאיור 11 נגדיר $\underline{u} = \vec{AB}$

$\underline{v} = \vec{AD}$. מאחר ובסיסי הטרפז מקבילים קיים סקלאר t כך ש $\vec{DC} = t\underline{u}$.



איור 11

לפני שנעבור לחישוב $\vec{EF}$ נחשב את $\vec{BC}$:

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{DC} = -\underline{u} + \underline{v} + t\underline{u} = \underline{v} + (t-1)\,\underline{u}.$$

מכאן $\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BF} = -\frac{1}{2}\,\underline{v} + \underline{u} + \frac{1}{2}\,(\underline{v} + (t-1)\underline{u})$

$$= \frac{1}{2}\,\underline{u} + \frac{t}{2}\,\underline{u} = \frac{t+1}{2}\,\underline{u}$$

לכן $\vec{EF}$ הוא מכפלה של $\underline{u}$ בסקלאר ולכן כוונו ככוון $\underline{u}$, כלומר $EF \| AB$

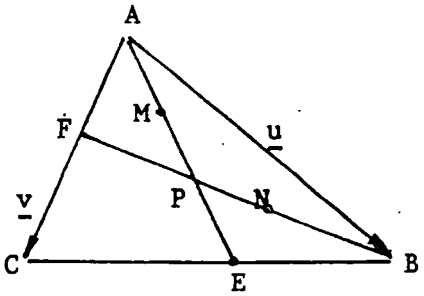
וקל לראות שאורכו שווה למחצית אורך $\underline{u}$ ועוד מחצית אורך $\vec{DC} = t\underline{u}$.

תרגיל 1 - הוכח את המשפט על קטע האמצעים במשולש.

תרגיל 2 - נסח והוכח תכונות (כוון ואורך) של קטע המחבר את אמצעי האלכסונים בטרפז.

תרגיל 3 - במשולש ABC נתונה נקודה E עבורה $\vec{EA} + \vec{EB} + \vec{EC} = \underline{0}$.
הוכח ש E היא נקודת הפגישה של תיכוני המשולש.

לפני שנעבור למשפט נוסף, נסתכל בדוגמה מעניינת:



איור 12

דוגמה במשולש ABC באיור 12 AE ו $\vec{BF}$ תיכונים. M נקודה המקיימת $\vec{AM} = m\vec{AE}$
N נקודה המקיימת $\vec{BN} = n\vec{BF}$.
הבע באמצעות $\underline{u} = \vec{AB}$, $\underline{v} = \vec{AC}$, m ו n את הוקטור $\vec{MN}$

התרה: כפי שראינו, התיכון $\vec{AE}$ מקיים: $\vec{AE} = \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v})$

ולכן $\vec{AM} = \frac{m}{2}(\underline{u} + \underline{v})$

באותו אופן

$$\vec{BF} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}[-\underline{u}+(-\underline{u}+\underline{v})] = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$$

ולכן $\vec{BN} = -n\underline{u} + \frac{1}{2}n\underline{v}$

קיים $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AB} + \vec{BN}$

ולכן $\vec{MN} = -\frac{m}{2}(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{u} + (-n\underline{u} + \frac{1}{2}n\underline{v})$

ועל ידי כינוס נקבל: $\vec{MN} = (1 - \frac{m}{2} - n)\,\underline{u} + (\frac{n}{2} - \frac{m}{2})\underline{v}$

בכך גמרנו לחשב את $\vec{MN}$ כפי שנתבקשנו, אך מן הבטוי שקיבלנו ל $\vec{MN}$ אפשר להסיק מסקנות מעניינות: ראשית, אם n=m אז המקדם של $\underline{v}$ הוא 0 ולכן $\vec{MN}$ אז מקביל ל $\underline{u}$. אם בנוסף לכך, גם המקדם של $\underline{u}$ הוא 0, אז $\vec{MN}=\underline{0}$, כלומר הנקודות M , N מתלכדות ל P, נקודת הפגישה של התיכונים.

זה קורה כאשר $m = n = \frac{2}{3}$ והוכחנו אם כך שעבור הנקודה P מתקיים

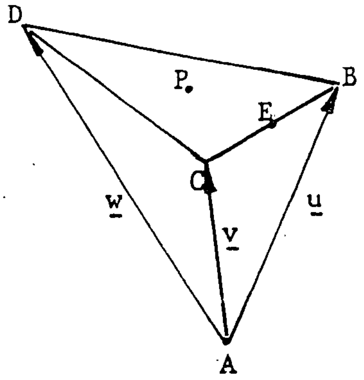
$\vec{AP} = \frac{2}{3} AE$ וגם $\vec{BP} = \frac{2}{3} \vec{BF}$, דהיינו שתיכוני המשולש AE ו BF מחלקים זה את זה ביחס של 2:1. מתכונת החלוקה של התיכונים נובע כמובן שתיכוני המשולש נפגשים שלושתם בנקודה אחת.

"ממוצע" של וקטורים

ראינו, שכאשר $\underline{u} = \vec{AB}$ ו $\underline{v} = \vec{AC}$ יוצאים מאותה נקודה A ואם הוקטור $\frac{\underline{u}+\underline{v}}{2} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$ יוצא אף הוא מ A, אז וקטור זה נגמר באמצע הקטע BC. (איור 8).

הבטוי $\frac{\underline{u}+\underline{v}}{2}$ מזכיר את הממוצע של מספרים. טבעי לשאול, האם יש משמעות גיאומטרית גם ל"ממוצע" של שלושה וקטורים היוצאים מאותה נקודה. נראה מיד שאכן $\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$ (כאשר שלושת הוקטורים יוצאים מאותה נקודה) הוא וקטור היוצא מאותה נקודה ומסתיים במרכז הכובד של המשולש שיוצרים קצות הוקטורים (מרכז הכובד של משולש הוא נקודת הפגישה של תיכוני המשולש):

<u>משפט</u> אם $\underline{u} = \vec{AB}$, $\underline{v} = \vec{AC}$, $\underline{w} = \vec{AD}$ ואם $\vec{AP} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$ אז P היא נקודת הפגישה של תיכוני המשולש BCD. נוכיח את הטענה בלי להעזר אפילו בתכונות של נקודת הפגישה של התיכונים או בעובדה שקיימת נקודה כזו. תחילה, אפילו לא נסתכל בבטוי $\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$ אלא נסתפק בבטוי בו $\underline{w},\underline{v},\underline{u}$ נכפלים באותו סקלאר. מטרתנו היא לא רק להוכיח את המשפט, אלא גם להראות טכניקה של הוכחה לקיום נקודת פגישה משותפת לכמה קטעים.



איור 13

הוכחה: נסתכל בנקודה E שהיא אמצע הצלע BC (איור 13). $\vec{AE}$ הוא תיכון במשולש ABC ולכן $\vec{AE} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$. כעת נחפש על הוקטור $\vec{DE}$, התיכון במשולש BCD, נקודה P המקיימת ל s כלשהו $\vec{AP} = s\underline{u} + s\underline{v} + s\underline{w}$, שכן אם נמצא P כזו אז $\vec{AP}$ מבוטא במקרה כזה באופן סמטרי בעזרת $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו $\underline{w}$ ולכן P חייבת להמצא גם על כל אחד משני התיכונים האחרים של משולש BCD. לכל נקודה P על DE יש פרמטר t כך שקיים $\vec{DP} = t\vec{DE}$

ולכן

$$\vec{AP} = \vec{AD} + \vec{DP} =$$

$$= \underline{w} + t\,\vec{DE} = \underline{w} + t\,(\vec{DA} + \vec{AE})$$

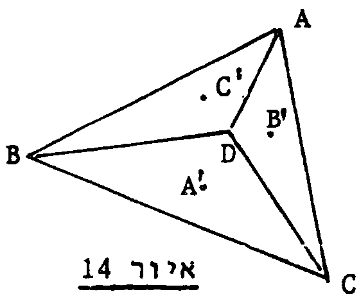
$$= \underline{w} + t\,(-\underline{w} + \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v})$$

$$= \frac{t}{2}\underline{u} + \frac{t}{2}\underline{v} + (1-t)\,\underline{w}$$

קל לראות מן הבטוי $\vec{AP} = \frac{t}{2}\underline{u} + \frac{t}{2}\underline{v} + (1-t)\,\underline{w}$ שהסקלארים הכופלים את הוקטורים יהיו שווים כאשר $t = \frac{2}{3}$ ואז נקבל

$$\vec{AP} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$$

מצאנו אם כך על התיכון DE נקודה P החייבת להמצא על כל תיכון של משולש BCD ולכן הוכחנו (שוב) שתיכוני משולש נפגשים שלושתם בנקודה אחת. מערכו של t כ $\frac{2}{3}$ בנקודה זו רואים גם שהנקודה מחלקת כל תיכון ביחס של $\frac{2}{3}:\frac{1}{3}$ או 2:1.



איור 14

תרגיל: בפרמידה משולשת ABCD נסמן ב A' את מרכז הכובד של משולש BCD, ב B' את מרכז הכובד של משולש ACD, ב C' את מרכז הכובד של משולש ABD וב D' את מרכז הכובד של משולש ABC.

הוכח כי הקטעים AA' , BB' , CC' ו DD' נפגשים כולם בנקודה אחת.

בניסוח אחר: הוכח כי בפרמידה משולשת, הקטעים המחברים קדקוד למרכז הכובד של הפאה שמולו נפגשים כולם בנקודה אחת.

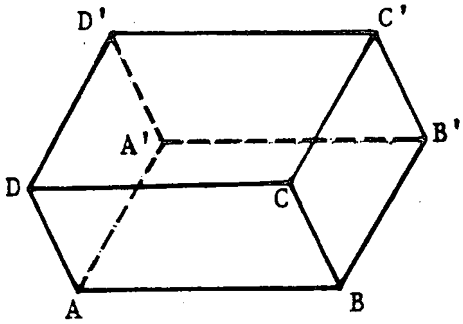
הדרכה: בחר נקודה E והעזר בוקטורים

$$\vec{EA} \; , \; \vec{EB} \; , \; \vec{EC} \; , \; \vec{ED}$$

לקריאה נוספת: אלגברה (וקטורים בגישה גיאומטרית). הוצאת המרכז הישראלי להוראת המדעים על שם עמוס דה-שליט, האוניברסיטה העברית ירושלים.

<u>תרגילים</u>

1. פאון כבציור, שכל פאותיו הן מקבילות, נקרא <u>מקבילון</u>, תיבה היא מקבילון מיוחד, שבו כל המקבילות הן מלבנים.



הוכח כי אלכסון המקבילון, היוצא מקדקוד מסוים, חותך את המשולש שנוצר מחיבור הקדקודים הסמוכים לקדקוד זה במרכז הכובד של המשולש וכי נקודה זו מחלקת את האלכסון ביחס 1:2.

<u>הדרכה:</u> סמן $\underline{u} = \vec{AB}$, $\underline{v} = \vec{AD}$, $\underline{w} = \vec{AA'}$ והוכח את הטענה לגבי האלכסון $\vec{AC'}$ והמשולש BDA'.

2. הוכח כי בפרמידה מרובעת $ABCDS$ הבסיס $ABCD$ הוא מקבילית אם ורק אם מתקיים $\vec{SA} + \vec{SC} = \vec{SB} + \vec{SD}$.

3. בפרמידה מרובעת $ABCDS$, מצא משמעות גיאומטרית ל"ממוצע" המקצועות הצדדיים $\vec{SA}$, $\vec{SB}$, $\vec{SC}$ ו $\vec{SD}$ והסק מכך על תכונה של קטעי האמצעים במרובע כלשהו. (קטע אמצעים במרובע הוא קטע המחבר את נקודות האמצע של שתי צלעות נגדיות).

4. הוכח: אם E היא מרכז של מצולע משוכלל $A_1, A_2, \ldots, A_n$ אז

$\vec{EA_1}+\vec{EA_2}+\ldots+\vec{EA_n}=0$ (מרכזו של מצולע משוכלל הוא מרכז המעגל החוסם את המצולע ומרכז המעגל החסום במצולע).

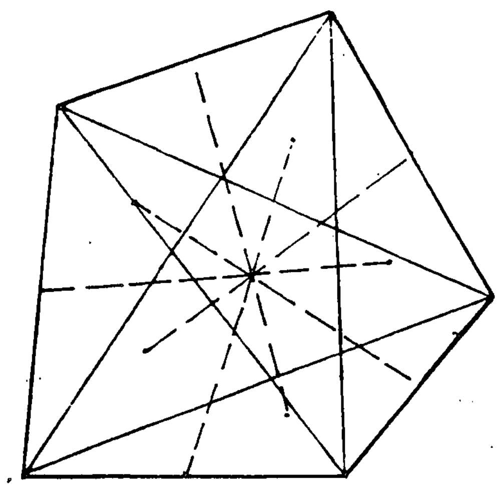
5. תהיינה $A_1,A_2,\ldots,A_n$, n נקודות במרחב.

א. הוכח שיש לכל היותר נקודה אחת שסכום הוקטורים היוצאים ממנה לנקודות $A_1, A_2, \ldots, A_n$ הוא אפס. הדרכה: עליך להוכיח שאם $\vec{EA_1}+\vec{EA_2}+\ldots+\vec{EA_n} = \underline{0}$ ואם $E \neq F$ אז $\vec{FA_1} + \vec{FA_2} + \ldots + \vec{FA_n} \neq \underline{0}$

ב. הוכח שקיימת נקודה E המקיימת $\vec{EA_1} + \vec{EA_2} + \ldots + \vec{EA_n} = \underline{0}$.

6. א. הוכח כי בכל מחומש, הקטעים המחברים את מרכז הכובד של משולש שיוצרים שלושה קדקודים של המחומש עם אמצע הקטע המחבר את שני הקדקודים הנותרים של המחומש, עוברים כולם בנקודה אחת.

ב. נסח והוכח טענה דומה למשושה.



בעיות אימון לאולימפיאדות מתמטיות

פרופ' מ.ס. קלמקין - אוניברסיטת אלברטה

כדי להפך למומחה בשטח בעל ערך כלשהו, כמו החלקה על קרח, נתוח, נגינה בפסנתר וכדי, יש להשקיע כמות ניכרת של אימונים, באופן מתמשך. טענה דומה חלה גם על תלמידים הרוצים להפך למומחים בהשתתפות בתחרויות מתמטיות או בפתרון בעיות באפן כללי. בהמשך אביא סדרה של כ-40 בעיות לאימון לקראת אולימפיאדות מתמטיות, מקומיות או בין לאומיות. הן נלקחו ממקורות שונים, כמו מאולימפיאדות קנדיות, הונגריות ואמריקאיות, אוספי "בעיות יהודיות" מרוסיה (בעיות קשות במיוחד הניתנות לתלמידים יהודים כדי למנוע כניסתם לאוניברסיטה) וספרים שונים. חלק מהבעיות הן מקוריות וחברתין בעצמי. הן מכסות את שטחי האלגברה, תורת המספרים, הגאומטריה במישור ובמרחב, ועוד. רמת הקושי משתנה מבעיה לבעיה. עם כמה מהבעיות, תצטרכו להסתכל בספרים מתמטיים שונים מאחר שלא יהיה לכם בשלב זה הרקע המתמטי המתאים. תקוותנו היא שבעיות כאלה יניעו אתכם ללמוד יותר מתמטיקה. אפילו אם לא תצליחו לפתור חלק מבעיות אלה, עדין תלמדו הרבה רק מהנסיון לתקף אותן. הקציבו לעצמכם כשעה בממוצע לכל בעיה. במקום לעבוד על כל הבעיות בצורה נפרדת, תוכלו לעבוד עליהן בקבוצות של שלש, משטחים שונים, ואז הקציבו לעצמכם ארבע שעות כמו באולימפיאדות המתמטיות הבין לאומיות.

פתרונות אלגנטיים במיוחד או הכללות יפות עם הוכחות, אוכל לפרסם ב"פינת האולימפיאדה" שלי בעתון "Crux Mathematicorum" או במקום אחר, ואולי אף להעניק פרסים שונים כמו ספרים מתמטיים או מינוי על ה "Crux". שלחו לי אותם לכתובת

Prof. M.S. Klamkin
Mathematics Department
University of Alberta
Edmonton, Alberta T6G2G1
Canada;

כשהם כתובים באנגלית, בצורה ברורה, תמציתית אך שלמה.

1. אם $P(x,y)$ פולינום סימטרי (כלומר, $P(x,y)\equiv P(y,x)$), כך ש-
$(x-y)|P(x,y)$ (כלומר, $P(x,y)$ מתחלק ב $x-y$),
הוכח כי $(x-y)^2|P(x,y)$.

2. מצא פולינום ממעלה 7 כך ש- $(x+1)^4|(P(x)-1)$ ו- $(x-1)^4|(P(x)+1)$.

3. מצא את הפולינומים $P(x), Q(x)$ מהמעלה הנמוכה ביותר המקימים
$$(1-x)^8P(x) + (1+x)^9Q(x)\equiv 1.$$

4. (א) הראה כי שרש אחד של $x^4+5x^2+5=0$ הוא $x=\omega-\omega^4$, כאשר ω הוא שרש חמישי מרוכב של היחידה (כלומר, $\omega^5=1$).

(ב) מצא את שלשת השרשים האחרים של המשואה, כפולינומים ב ω.

5. אם ax^2+bx+c הוא פולינום עם מקדמים ממשיים ושרשים ממשיים,
הוכח כי $\max(a,b,c) \geq 4(a+b+c)/9$

המשך בגליון הבא!

****
****

ה כ ו נ ו !!

האולימפיאדה המתמטית במכון וייצמן תתקיים ביום ב', י"א באדר תשמ"ח, 29.2.1988.

האולימפיאדה המתמטית ע"ש פרופ' ירמיהו גרוסמן תתקיים בטכניון ביום ג', ט"ז באייר תשמ"ח, 3 במאי 1988.

"מכתב למערכת"

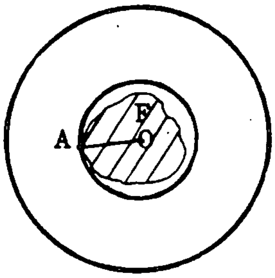
ולדימיר גרשוביץ, ביה"ס התיכון ליד האוניברסיטה העברית

בגליון מס' 8 פורסם מאמר "על מעגל מקיף מינימלי של קבוצה במישור" (עמ' 2-12) של שוני דר. המשפט העקרי במאמר הנ"ל הוא: "הרדיוס R של מעגל מינימלי המכסה קבוצה F בעלת קוטר $\delta(F)=1$ הוא $\frac{\sqrt{3}}{3}$"

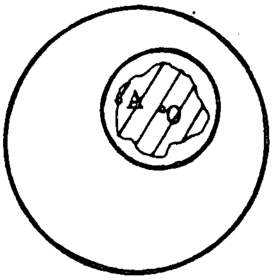
ניתן להסביר משפט זה בצורה יותר קצרה.

נניח שקיים מעגל מינימלי המכיל קבוצה F, אז על מעגל כזה נמצאות או שתי נקודות בקבוצה שהן קצוות של קוטר המעגל או שלוש נקודות שהן קודקודיו של משולש חד-זווית.

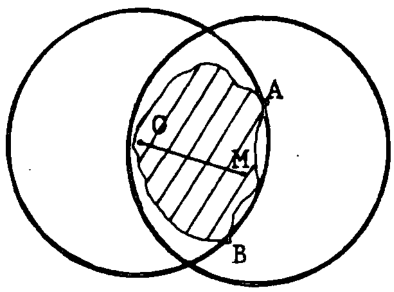
נניח שהמעגל מכסה קבוצה F אבל איננו מכיל נקודות של F על היקפו. אז בלי להזיז את מרכז המעגל אפשר לקצר את רדיוסו כך שהמעגל נוגע בקבוצה בנקודה A (ציור מס' 1a). גם עכשיו ניתן להקטין את המעגל. לשם כך צריך להזיז את המעגל בכוון OA כך שלמעגל ולקבוצה לא תהיינה נקודות משותפות ואחר כך אפשר להקטין את המעגל באופן המתאר למעלה (ציור 1b). אם המעגל נוגע בשתי נקודות של הקבוצה F או יותר, אבל כל הנקודות נמצאות על קשת AB שהיא קטנה מחצי המעגל אז גם כן ניתן להקטין את המעגל. בשביל זה צריך להזיז את המעגל לכיוון OM, כאשר M אמצע של AB (ציור מס' 2) כך שהקבוצה F תהיה בתוך המעגל אבל בלי נקודות משותפות ואחר-כך עוד פעם להקטין את המעגל בשיטה הישנה.



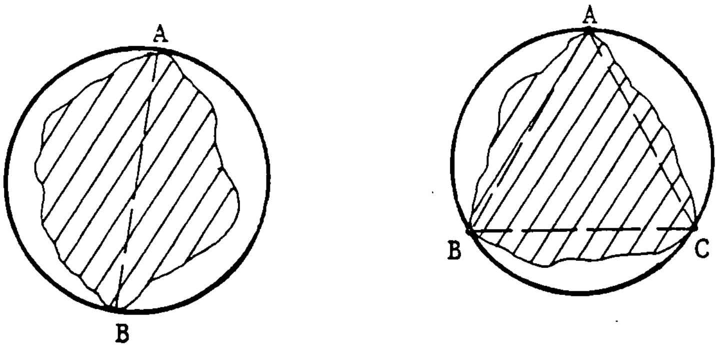
(1-a)



(1-b)



(2)



(3-a) (3-b)

מה אפשר להגיד על המעגל אשר מכסה קבוצה F אבל אי-אפשר כבר לצמצם אותו?

קל להבין שמעגל מינימלי כולל או 2 נקודות B ו A של קבוצה F שהן קצוות של קוטר המעגל או 3 נקודות A,B,C שהן קודקודיו של משולש חד-זווית (ציורים מס' 3a,3b) במקרה הראשון $2R=AB=1$ או $R \leq \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3}$ במקרה השני אחת מהזוויות של המשולש ABC קטנה מ-60^0 (למשל זווית A) אזי $60^0 < A < 90^0$ ו $R = \frac{BC}{2\sin A} \leq \frac{1}{2\sin 60^0} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

מצד שני רדיוס של מעגל חוסם משולש שווה צלעות (קוטר הקבוצה הוא 1 ולכן $AB = BC = CA = 1$) שווה ל $\frac{\sqrt{3}}{3}$. לכן אי אפשר לשפר את הערך $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

* * *

* *

המשפט הנ"ל הוא מקרה פרטי של המשפט: "במרחב n-ממדי רדיוס של הכדור המינימלי המכיל קבוצה F בעלת קוטר $\delta(F)=1$ הוא $\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$". (מובאה מס' 2).

* * *

* *

לבסוף אני מציע לקוראים שתי בעיות:

א) את הקבוצה הנ"ל אפשר לכסות בעזרת משושה משוכלל בעלת צלע $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

ב) לקבל את משפט Jung ‏(n=2) כמסקנה מהמשפט הבא:

"אם לכל 3 קבוצות קמורות מתוך n קבוצות קמורות במישור יש נקודה משותפת אז לכל n הקבוצות קיימת נקודה משותפת"

(משפט זה אפשר להוכיח בעזרת אנדוקציה מתמטית).

מ ו ב א ו ת :

1. I.M. Yaglom, W.G. Boltyanskii, Convex Figures Holt, Rinehart and Winston, New York 1961

2. H.W.E. Jung "Über den Kleinsten Kugel, die eine raumliche Figur einschießt" Jurnal fur die Reine und Angew, Math., 123, 1901

הערת המערכת: הפתרון המוצע במכתב מתבסס על ההנחה כי קים מעגל מינימלי, הנחה שהוכחה במאמרו של שוני דר. כדי להראות שלא מספיק שכל מעגל שאיננו מינימלי ניתן להקטנה, נתבונן בדוגמא הבאה:

ש א ל ה : איזה שבר מהצורה $1/n$ ‏$(n=1,2,3,...)$ הוא הקטן ביותר?

"פתרון" : לכל שבר מהצורה $1/n$, פרט ל-$1/1$ יש שבר אחר, $1/n^2$, שהוא מאותה צורה ויותר קטן. "לכן", $1/1$ הוא השבר הקטן ביותר בקבוצת השברים הנתונה.

****

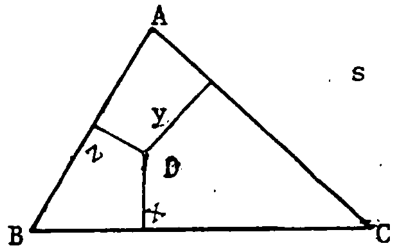
****

בעיה במשולש ופתרונה

שי גירון, הטכניון

במאמר זה נבחן שיטה לפתרון בעית מינימום גאומטרית ואף נכליל אותה.

יהיה נתון במישור, משולש ABC כלשהו ונקודה D. נסמן ב x,y,z, את המרחק של D מהצלעות AB,AC,BC בהתאמה. כמוכן נסמן $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. מהי הנקודה D עבורה הביטוי $T = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ יהיה מנימלי?



פתרון: נשים לב כי $ax+ by + cz = 2s$ כאשר s שטח המשולש, כלומר קבוע בבעיה.

נתבונן במכפלה $2sT$

$$2sT = (\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z})(ax + by + cz) = a^2 + b^2 + c^2 + ab(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}) +$$

$$+ bc(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}) + ac(\frac{x}{z} + \frac{z}{x})$$

לפי אי שוויון הממוצעים, לכל $t > 0$ מתקיים $t + \frac{1}{t} \geq 2$ ושוויון רק עבור $t = 1$, ומכאן

$$2sT \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a+b+c)^2$$

ומכאן נובע כי $T \geq \frac{(a+b+c)^2}{2s}$

והשוויון קיים כאשר $x=y=z$. לפיכך, הנקודה המבוקשת היא הנקודה הנמצאת במרחקים שווים מצלעות המשולש, היינו מפגש חוצי הזויות - הוא מרכז המעגל החסום במשולש.

קל כמובן להכליל את הבעיה לבעיה במצולע כלשהו, בתנאי שקיימת בו נקודה הנמצאת במרחקים שווים מהצלעות או במלים אחרות בתנאי שחוצי הזויות שלו נחתכים בנקודה אחת. בנקודה זאת יהיה הביטוי האנלוגי ל T מינימלי, וערכו יהיה המנה בין ריבוע הקף המצולע ופעמים שטחו.

מה פתרון הבעיה כאשר אין מעגל החסום במצולע?

.40 יהי S שטח המשולש, אזי

$$abc = 4RS$$

$$(a+b+c)r = 2S$$

ומכאן
$$2Rr = \frac{abc}{a+b+c}$$

מכאן, שאי השויון שבבעיה שקול לאי השויון

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \geq 3\,\frac{a+b+c}{abc}$$

או

$$(bc + ac + ab)^2 \geq 3\,(a+b+c)\,abc$$

אבל, אי שויון זה נובע מהזהות (בדוק!)

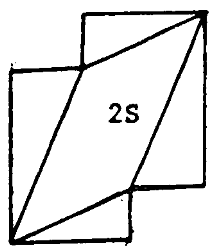
$$2\{(bc+ac+ab)^2 - 3(a+b+c)abc\} = c^2(a-b)^2 + b^2(a-c)^2 + a^2(b-c)^2$$

וברור גם שהשויון יתקיים אם ורק אם $a=b=c$.

.41 קל לראות כי שטח מקבילית שקדקדיה נקודות סריג הוא מספר שלם (ראה בציור - המשולשים ישרי הזוית יוצרים בזוגות מלבנים ששטחיהם שלמים).

לכן, כמו בשאלה הקודמת

$$\frac{abc}{2R} = 2S \geq 1$$



42. קים:

$$\gamma = x(1+\beta)$$

$$\alpha^5 = x \cdot \beta^4$$

ומכאן,

$$\gamma(1-\beta)(1+\beta^2) = x(1+\beta)(1-\beta)(1+\beta^2)$$

$$= x(1-\beta^4)$$

$$= x - \alpha^5$$

או

$$x = \alpha^5 + \gamma(1-\beta)(1+\beta^2)$$

43. ברור שכדי שהבעיה תהיה משמעותית, יש לדרוש שהקבוצות שונות זו מזו (אחרת, אפשר ליצור מספר גדול כרצוננו של קבוצות בנות שני אברים). נראה, כי אם $\{B_1,\ldots,B_n\}$ הן קבוצות שונות ולא ריקות, המקימות

(א) $$B_i \subset \{0,1,\ldots,9\} \qquad (1 \le i \le n)$$

(ב) $$|B_i \cap B_j| \le 2 \qquad (1 \le i \le j \le n)$$

אז בהכרח $n<200$, ואי אפשר ליצור 200 קבוצות כדרוש

נסמן ב n_i את מספר הקבוצות בנות i אברים, אזי

$$n = n_1+n_2+n_3+n_4+\ldots+n_{10}$$

כאשר בברור

$$n_1 \le \binom{10}{1} = 10$$

$$n_2 \le \binom{10}{2} = 45$$

$$n_3 \le \binom{10}{3} = 120$$

וכו'

אולם, החסם האחרון הוא גבוה מידי: נסמן

$$n_+ = n_4 + n_5 + \ldots + n_{10}$$

אזי, כל קבוצה מתוך n_+ הקבוצות B_i שלהן 4 אברים ומעלה מכילה לפחות ארבע תת קבוצות של שלשה אברים, אשר אינן יכולות להכלל בין n_3 הקבוצות B_i בנות 3 האברים, כתוצאה מהתנאי (ב).

על כן

$$n_3 \leq 120 - 4n_+$$

(תת הקבוצות הנ"ל בהכרח שונות, כתוצאה מ (ב)!)

וביחד נקבל

$$n = n_1+n_2+n_3+n_{4+} \leq 10+45+120-4n_+ + n_+ \leq 175 - 3n_+ \leq 175 \ .$$

44. נשתמש בתכונה הידועה כ"חזקת נקודה ביחס למעגל": מכפלת שני חלקי כל מיתר העובר דרך נקודה נתונה בתוך המעגל היא קבועה.

ממנה

$$PC \cdot CH = AC \cdot CB = 2CD^2$$

$$PE \cdot EL = AE \cdot EB = \frac{9}{4}CD^2$$

$$PD \cdot DK = AD \cdot DB = 2CD^2$$

ומכאן

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{4}\,\frac{PC^2}{CD^4}$$

$$\frac{1}{EL^2} = \frac{16}{81}\,\frac{PE^2}{CD^4}$$

$$\frac{1}{DK^2} = \frac{1}{4}\,\frac{PD^2}{CD^4}$$

או

$$32\left(\frac{1}{CH^2} + \frac{1}{DK^2}\right) - 81\,\frac{1}{EL^2} = 8\,\frac{1}{CD^4}\,(PC^2 + PD^2 - 2PE^2)$$

אבל, אם Q היא היטל P על המיתר AB, נקבל (בהנחה כי Q נמצאת מאותו צד של E כמו C)

$$PE^2 = PC^2 + CE^2 + 2CE \cdot QE = PC^2 + \frac{1}{4}CD^2 + \frac{1}{2}CD \cdot QE$$

$$PE^2 = PD^2 + ED^2 - 2DE \cdot QE = PD^2 + \frac{1}{4}CD^2 - \frac{1}{2}CD \cdot QE$$

ומחבור אלה

$$2PE^2 = PC^2 + PD^2 + \frac{1}{2}CD^2$$

והמסקנה מידית.

* * *

* *

בעיות חדשות

.54 נתון משולש שצלעותיו a_1 , a_2 , ו-a_3 ויהיו R_1 , R_2 ו-R_3 המרחקים מנקודה פנימית נתונה והקדקדים המתאימים. הוכח:

(א) אפשר לבנות משולש שצלעותיו פרופורציוניות ל a_3R_3, a_2R_2, a_1R_1

(ב) $a_1R_1^2 + a_2R_2^2 + a_3R_3^2 \geq a_1a_2a_3$

(ג) $a_1R_2R_3 + a_2R_1R_3 + a_3R_1R_2 \geq a_1a_2a_3$

.55 מצא את כל הפתרונות של המשואה

$$1+x+x^4+x^5+x^6+x^9+X^{10} = 10$$

.56 הראה כי לכל פאון פשוט (גוף המוגבל ע"י מצולעים מישוריים, שכל שנים מהם אינם נחתכים) יש לפחות שתי פאות בעלות אותו מספר מקצועות.

.57 מצא את הספרה האחרונה של 7^{7^7}.

.58 מצא אינסוף פתרונות רציונלים למשואה $x^y = y^x$.

.59 נתון מרובע קמור. נחלק כל אחת מצלעותיו לשלשה קטעים שוים ונחבר קצוות קטעים מתאימים בצלעות נגדיות. ע"י כך נוצרים תשעה מרובעים. הוכח ששטח המרובע הפנימי הוא תשיעית משטח המרובע הנתון.