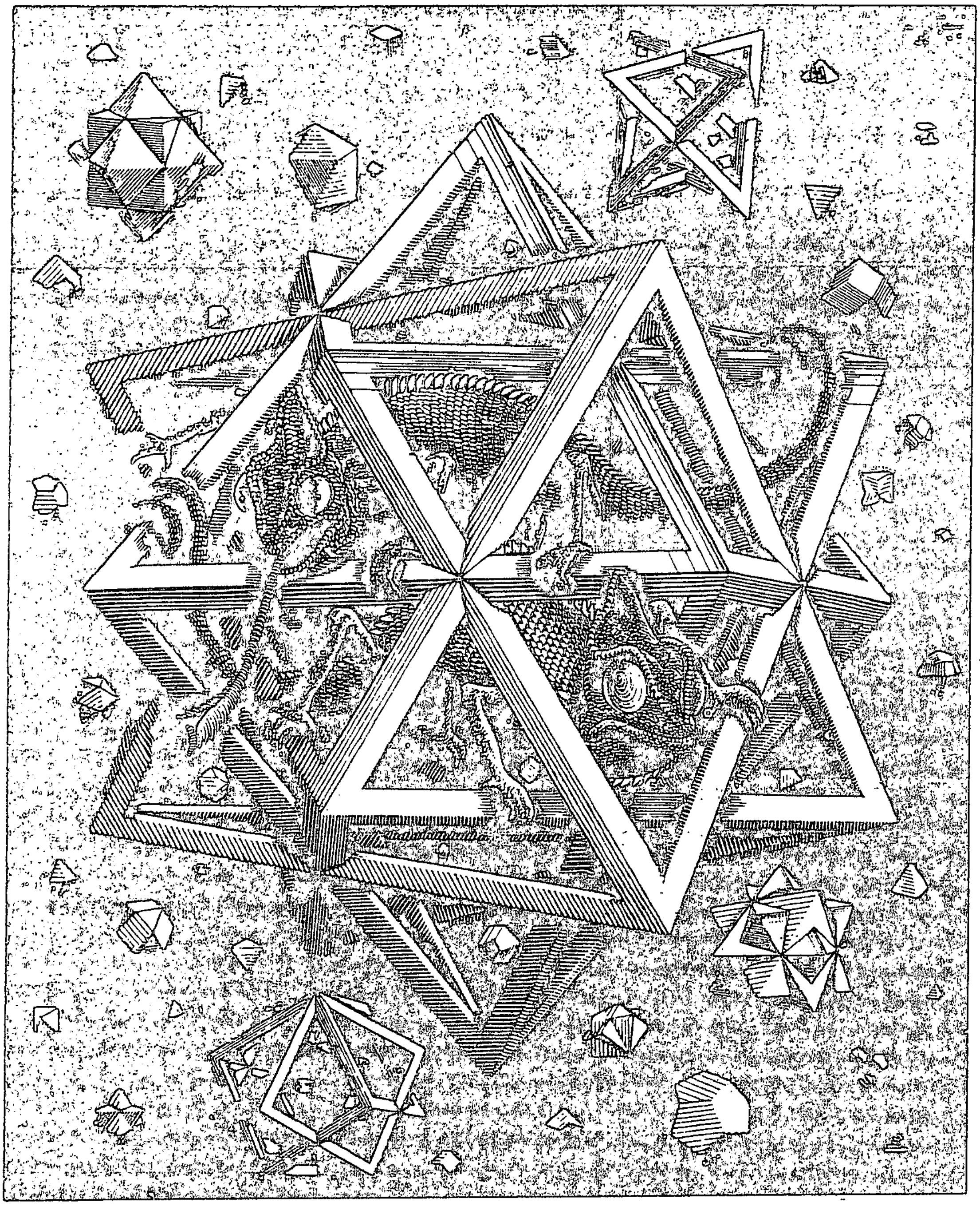
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס' 22 סיון תשנ"ב - יוני 1992



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון ויצמן
רחובות

תוכן העניינים

דבר המערכת 3

י. נהיר: מכפלה ווקטורית 4-ממדית ורב-ממדית 4

א. ב. סיגלר: משפט סימסון ומשפט תלמי 12

ד. רימר: הרחבת המושג מספר ציקלי 14

האולימפיאדה לנוער במתמטיקה של מכון ויצמן 22

האולימפיאדה למתמטיקה ע"ש פרופ' י. גרוסמן ז"ל 25

אתגר - גליונות מתמטיקה ISBN = 0334-201

מוצא לאור ע"י הפקולטות למתמטיקה במכון וייצמן ובטכניון.

המערכת:

פרופ' א. ברמן, ד"ר צ. הראל, א. לוי, הפקולטה למתמטיקה בטכניון.

פרופ' י. גילים, המחלקה למתמטיקה שימושית, מכון וייצמן.

מען המערכת: הפקולטה למתמטיקה, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

חיפה 32000, טל. 04 - 294279

דבר המערכת

גליון זה, מספר 22, יגיע לידיכם עם תחילת החופש הגדול. אנו מקווים שגליון נוסף יישלח לקוראים עוד במשך החופש.

בחוברת זו שלשה מאמרים. לקוראים רבים מוכרת בוודאי המכפלה הוקטורית של שני וקטורים במרחב התלת ממדי, שמשמשת כלי חשוב להגדרת מושגים ולניסוח חוקים בפיסיקה. מאמרו של י. נהיר מראה כיצד אפשר להכליל מכפלה זו למרחב ה-4-ממדי ומראה שימושים של ההכללה. גם מאמרו של אבי ב. סיגלר דן בגיאומטריה, אבל "מסתפק" ב-2 ממדים: במשפטי גיאומטרית המישור. מאמרו של ד. רימר חוקר את המספרים שמהווים את המחזור של תיאורם העשרוני של שברים. זהו המשך למאמר שהופיע לפני מספר שנים.

אנו מביאים את השאלונים ושמות הזוכים בשתי האולימפיאדות לנוער במתמטיקה שהתקיימו לאחרונה בארץ - זו של מכון ויצמן וזו של הטכניון ע"ש פרופ' גרוסמן. שימו לב למספר הרב של זוכים בשתי התחרויות גם יחד. הקוראים מוזמנים לנסות את כוחם בפתרון הבעיות, ונשמח לקבל מכם פתרונות ולפרסם את אלה שיש בהם עניין. בגליון הבא נביא את הפתרונות (או לפחות רמזים "עבים").

אנו מאחלים לקוראים הנאה מהגליון וחופשה נעימה.

מכפלה וקטורית 4-ממדית ורב-ממדית

מאת יעקב נהיר, ירושלים

תמצית

מגדירים מכפלה וקטורית במרחב 4-ממדי ויותר. הגדרה כזו ידועה במתמטיקה אך כאן נביא שמושים שלה בתור כלי עזר להוכחות.

המכפלה הווקטורית ב-4 ממדים

כידוע מוגדרת המכפלה הווקטורית במרחב התלת-ממדי באופן שמכפלת שני ווקטורים יוצרת ווקטור שלישי. נציג הגדרה למכפלה ווקטורית של 3 ווקטורים במרחב 4-ממדי הנותנת ווקטור חדש כלהלן:

יהיו שלושת הווקטורים

$$\underline{A} = (A_1,A_2,A_3,A_4)\ ,\quad \underline{B} = (B_1,B_2,B_3,B_4)\ ,\quad \underline{C} = (C_1,C_2,C_3,C_4)$$

נגדיר את המכפלה תוך שמוש בדטרמיננטה:

$$\underline{A} \times \underline{B} \times \underline{C} = \begin{vmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 & \underline{i}_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

כאשר $\underline{i}_1$, $\underline{i}_2$, $\underline{i}_3$ ו- $\underline{i}_4$ הם ווקטורי הבסיס הסטנדרטי במרחב ה-4-ממדי, דהיינו $\underline{i}_1 = (1,0,0,0)$ וכן לשאר.

תכונות המכפלה הווקטורית

א. המכפלה הווקטורית ניצבת לשלושת גורמיה, כלומר

$$\underline{A}\cdot(\underline{A} \times \underline{B} \times \underline{C}) = 0\ ,\quad \underline{B}\cdot(\underline{A} \times \underline{B} \times \underline{C}) = 0\ ,\quad \underline{C}\cdot(\underline{A} \times \underline{B} \times \underline{C}) = 0$$

<u>הוכחה</u>: להקלת הבנת ההוכחה ניזכר תחילה במכפלה הסקלרית הרגילה של שני ווקטורים במרחב התלת-ממדי: יהיו נתונים שני ווקטורים $\underline{b} = (b_1,b_2,b_3)$, $\underline{a} = (a_1,a_2,a_3)$. נציג את $\underline{b}$ בצורה $b = \underline{i}_1 b_1 + \underline{i}_2 b_2 + \underline{i}_3 b_3$ כאשר $\underline{i}_1$, $\underline{i}_2$ ו- $\underline{i}_3$ הם ווקטורי

היחידה במרחב התלת-ממדי הרגיל בכווני x, y ו-z בהתאמה.

המכפלה הסקלרית תבוצע בהצגה מעורבת

$$\underline{a}\cdot\underline{b} = (a_1,a_2,a_3)\cdot[\underline{i}_1 b_1+\underline{i}_2 b_2+\underline{i}_3 b_3] = a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3 \tag{2}$$

אפשר אפוא להציג את המכפלה הסקלרית ע"י לקיחת הרכיב הראשון a_1 מהוקטור $\underline{a}$ והצבתו במקום וקטור היחידה הראשון $\underline{i}_1$ בהצגת $\underline{b}$, ובאופן דומה החלפת $\underline{i}_2$ ו-$\underline{i}_3$ ב-a_2 ו-a_3 בהתאמה.

המכפלה הסקלרית במרחב 4-ממדי תופיע אף היא בצורה דומה:

יהיו

$$\underline{P} = (P_1,P_2,P_3,P_4) \qquad \underline{Q} = (Q_1,Q_2,Q_3,Q_4) = \underline{i}_1 Q_1+\underline{i}_2 Q_2+\underline{i}_3 Q_3+\underline{i}_4 Q_4$$

המכפלה הסקלרית $\underline{P}\cdot\underline{Q}$ תופיע בהצגה מעורבת

$$\underline{P}\cdot\underline{Q} = (P_1,P_2,P_3,P_4)\cdot[\underline{i}_1 Q_1+\underline{i}_2 Q_2+\underline{i}_3 Q_3+\underline{i}_4 Q_4] = P_1 Q_1+P_2 Q_2+P_3 Q_3+P_4 Q_4 \tag{3}$$

גם כאן מתבטאת המכפלה הסקלרית בהצבת הרכיב הראשון של $\underline{P}$ במקום וקטור היחידה $\underline{i}_1$ בהצגת $\underline{Q}$ וכן לשאר.

נפנה עתה למכפלה הווקטורית $\underline{C} \times \underline{B} \times \underline{A}$. מהגדרת הדטרמיננטה רואים כי:

$$\underline{A}\cdot(\underline{A}\times\underline{B}\times\underline{C}) = (A_1,A_2,A_3,A_4)\cdot\begin{vmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 & \underline{i}_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{vmatrix} = \tag{4}$$

$$= \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{vmatrix} = 0$$

(הדטרמיננטה מתאפסת כי שתים משורותיה שוות).

באותו אופן מראים כי גם ל-$\underline{B}$ וגם ל-$\underline{C}$ אותה תכונה.

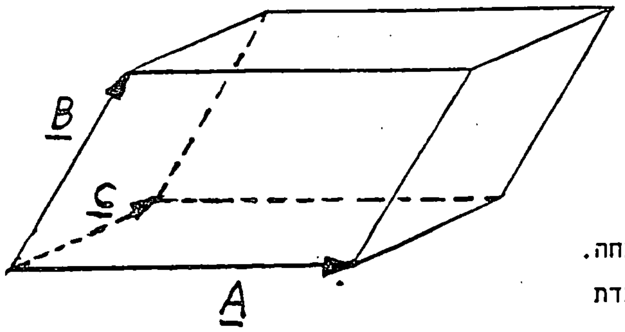
מ.ש.ל.

ב. ה"אורך" של וקטור המכפלה הוקטורית מבטא את "נפח המקבילון" הנוצר ע"י שלשת הוקטורים.

כלומר, אם $\underline{D} = \underline{A} \times \underline{B} \times \underline{C}$, אז הגודל

$$|\underline{D}| = \sqrt{D_1^2+D_2^2+D_3^2+D_4^2} \qquad (5)$$

מבטא את נפח המקבילון הנ"ל.



ציור א'

בציור א' מתואר מקבילון אנלוגי הנוצר ע"י שלשה וקטורים במרחב הרגיל ה-3-ממדי.

ה"נפח" הזה המתואר ע"י $|\underline{D}|$ הוא עניין של הגדרה גרידא ולא של הוכחה. בכל אופן נראה מקרה פרטי בו מתלכדת הגדרה זו עם הנוסחה הידועה לנפח מקבילון במרחב רגיל.

יהיו נתונים שלשה וקטורים במרחב הרגיל

$$\underline{K} = (K_1,K_2,K_3) \ , \quad \underline{L} = (L_1,L_2,L_3) \ , \quad \underline{M} = (M_1,M_2,M_3) \ ,$$

נסתכל על וקטורים אלה כעל וקטורים 4-ממדיים אשר הרכיב הרביעי שלהם הוא 0 ואילו שלשת הרכיבים הראשונים הם הרכיבים המקוריים.

כלומר, ניצור את ההרחבה:

$$\underline{K} \to \underline{K}^* = (K_1,K_2,K_3,0) \ , \quad \underline{L} \to \underline{L}^* = (L_1,L_2,L_3,0) \ ,$$

$$\underline{M} \to \underline{M}^* = (M_1,M_2,M_3,0)$$

נמצא את "נפח המקבילון" הנוצר ע"י 3 הוקטורים המורחבים K^*, L^* ו- M^* לפי הנוסחאות (1) ו- (5) דלעיל.

לפי (1)

$$\underline{D} = \underline{K}^* \times \underline{L}^* \times \underline{M}^* = \begin{vmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 & \underline{i}_4 \\ K_1 & K_2 & K_3 & 0 \\ L_1 & L_2 & L_3 & 0 \\ M_1 & M_2 & M_3 & 0 \end{vmatrix} = -\underline{i}_4 \begin{vmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{vmatrix}$$

ולפי (5) נקבל את ה"נפח"

$$|\underline{D}| = \text{abs}\begin{vmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{vmatrix} \qquad (6)$$

(abs מציין ערך מוחלט)

וכידוע זהו נפח המקבילון הנוצר ע"י שלשת הווקטורים $\underline{K}$, $\underline{L}$ ו $\underline{M}$.

חישוב זה דומה לאחת השיטות לחישוב שטח מקבילית במישור הנוצרת ע"י שני ווקטורים $\underline{a} = (a_x, a_y)$ ו $\underline{b} = (b_x, b_y)$. זה נעשה ע"י הרחבת הווקטורים $\underline{a} \rightarrow \underline{a}^* = (a_x, a_y, 0)$ $\underline{b} \rightarrow \underline{b}^* = (b_x, b_y, 0)$ וחישוב שטח המקבילית הנוצרת ע"י $\underline{a}^*$ ו $\underline{b}^*$ בעזרת כפל ווקטורי

$$\text{שטח המקבילית} = |\underline{a}^* \times \underline{b}^*| \qquad (7)$$

מעניין לציין כי חישוב שטח המקבילית שהיא בעיה דו-ממדית מתבצע בקלות ע"י פעולת כפל ווקטורי במרחב ה-3-ממדי. באופן דומה, מציאת נפח המקבילון, שהיא בעיה במרחב ה-3-ממדי נעשית אף היא בקלות ע"י פעולת כפל ווקטורי במרחב ה-4-ממדי.

זה מתאים לתופעה שכיחה במתמטיקה. קיימות בעיות רבות בהן הן השאלה והן התשובה שייכות לתחום מסויים, אך הפתרון מתקבל דוקא ע"י פעולות בתחום אחר רחב יותר.

כדוגמא נציג את הבעיה הבאה: פרוק לגורמים של טרינום כגון $x^2 + 66x + 1073$, שהיא בעיה לא קלה במספרים טבעיים, נפתרת בקלות בעזרת משוואה ריבועית מתאימה. כלומר השמוש בשברים, בשרשים, ובפרט השמוש במספרים שליליים, מאפשר פתרון ישיר ונוח של בעיה במספרים טבעיים.

זה מזכיר גם את מה שקיים בכימיה. קיימים חמרים הנקראים זרזים (קטליזטורים) שאינם משתתפים במאזן הכולל של הריאקציה הכימית, אבל הם מחישים אותה בהרבה ולפעמים הם המאפשרים אותה למעשה.

נתבונן שוב באורך של מכפלה וקטורית במרחב הרגיל. קיים שם

$$|\underline{A} \times \underline{B}| = |\underline{A}| \cdot |\underline{B}| \sin\varphi \qquad (8)$$

כאשר $\sin\varphi$ היא גורם כפלי המקשר בין אורך המכפלה $|\underline{A} \times \underline{B}|$ ובין אורכי הגורמים $|\underline{A}|$ ו $|\underline{B}|$.

באופן דומה יהיו נתונים 3 וקטורים $\underline{A}$, $\underline{B}$ ו $\underline{C}$ במרחב ה-4-ממדי (אנו משתמשים באותן אותיות לווקטורים במרחבים ה-3 וה-4-ממדיים כדי להדגיש את דמיון הטיפול במרחבים השונים). נרשום את ה"אורך" של המכפלה במרחב ה-4-ממדי בצורה:

$$|\underline{A} \times \underline{B} \times \underline{C}| = |\underline{A}| \cdot |\underline{B}| \cdot |\underline{C}| \cdot \sin\Omega \qquad (9)$$

הגורם $\sin\Omega$ מקשר בין "אורך" המכפלה $|\underline{A} \times \underline{B} \times \underline{C}|$ ובין "ארכי" הגורמים $|\underline{A}|$, $|\underline{B}|$ ו $|\underline{C}|$. למעשה יכולה המשוואה (9) להגדיר את $\sin\Omega$.

אם נצטמצם לווקטורים שרכיבם הרביעי הוא אפס, ז"א $\underline{A} = (A_1, A_2, A_3, 0)$ וכן ל $\underline{B}$ ול $\underline{C}$, אז נותן אגף ימין של (9) את נפח המקבילון שנוצר ע"י הווקטורים

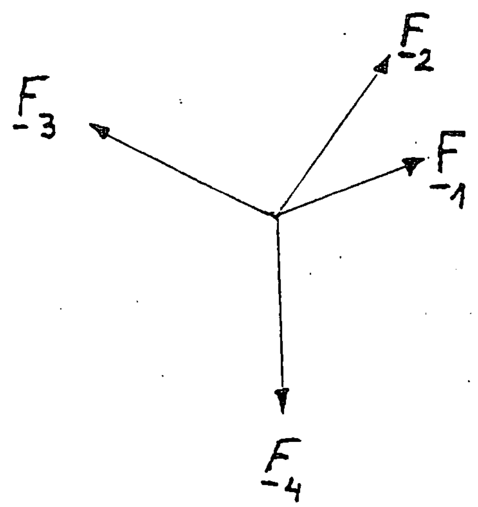
$$(A_1, A_2, A_3) \ , \quad (B_1, B_2, B_3) \ , \quad (C_1, C_2, C_3) \ ,$$

במרחב התלת-ממדי. יוצא אפוא שהגורם $\sin\Omega$ המופיע ב (9) מביא באופן טבעי להגדרת סינוס הזוית המרחבית במרחב התלת-ממדי.

הוכחת משפט הסינוסים לווקטורים בעזרת מכפלה ווקטורית

ב"אתגר - גליונות מתמטיקה", גליון 18, תשרי תשנ"א - אוקטובר 1990, הבאנו והוכחנו משפט סינוסים לווקטורים (ראה נוסחה (10) שם וגם כאן). נביא כאן הוכחה אחרת בעזרת כפל ווקטורי ב-4 ממדים.

למען השלמות והנוחיות נזכיר את המשפט בקצרה.



ציור ב'

יהיו 4 כוחות בשווי משקל (ציור ב') אך ידועים לנו רק הכוונים
של הכוחות אך לא הגדלים שלהם F_1, F_2, F_3 ו F_4. המשפט הוא:

$$\frac{F_1}{\sin\Omega_1} = \frac{F_2}{\sin\Omega_2} = \frac{F_3}{\sin\Omega_3} = \frac{F_4}{\sin\Omega_4} \qquad (10)$$

כאשר $\sin\Omega_1$ הוא סינוס הזוית שמול הכוח F_1, כלומר הזוית
בין כווני הכוחות F_2, F_3, F_4, וכן לשאר.

כלומר המשפט מבטא את היחסים בין גודלי הכוחות בעזרת
כיווניהם.

<u>הוכחה</u>: ניעזר בשתי העובדות הבאות הנובעות מהגדרת המכפלה
הווקטורית של שלשה ווקטורים ב-(1) ומתכונות הדטרמיננטה:

א. מכפלה ווקטורית של שלשה ווקטורים מקיימת את חוק הפילוג
(החוק הדיסטריבוטיבי), כלומר:

$$(\underline{M} + \underline{N}) \times \underline{B} \times \underline{C} = \underline{M} \times \underline{B} \times \underline{C} + \underline{N} \times \underline{B} \times \underline{C}$$

ונוסחה דומה לגבי $\underline{A} \times (\underline{M} + \underline{N}) \times \underline{C}$ וכד'

ב. מכפלה ווקטורית ששניים מגורמיה שווים ערכה $\underline{0}$.

כעת, מבחינה מתמטית מיוצגים הכוחות ע"י ווקטורים $\underline{F}_i$
$(i = 1,2,3,4)$, אך כאמור, ידועים רק הגדלים $|\underline{F}_i| = F_i$.

נרחיב את הווקטורים $\underline{F}_i$ לווקטורים $\underline{F}_i^*$ במרחב ה-4 ממדי כמו
שעשינו בדיון לעיל על נוסחת נפח המקבילון. ברור ש $|\underline{F}_i^*| = F_i$

נרשום את משוואת שווי המשקל עבור הווקטורים $\underline{F}_i^*$:

$$\underline{F}_1^* + \underline{F}_2^* + \underline{F}_3^* + \underline{F}_4^* = \underline{0} \qquad (11)$$

נכפיל את שני האגפים ווקטורית ב $\underline{F}_3^*$ ו $\underline{F}_4^*$. מ-א. ו-ב. לעיל
נובע שנקבל

$$\underline{F}_1^* \times \underline{F}_3^* \times \underline{F}_4^* + \underline{F}_2^* \times \underline{F}_3^* \times \underline{F}_4^* = \underline{0} \qquad (12)$$

ומכאן

$$\underline{F}_1^* \times \underline{F}_3^* \times \underline{F}_4^* = - \underline{F}_2^* \times \underline{F}_3^* \times \underline{F}_4^* \qquad (13)$$

לכן שני הווקטורים $\underline{F}_2^* \times \underline{F}_3^* \times \underline{F}_4^*$ ו $\underline{F}_1^* \times \underline{F}_3^* \times \underline{F}_4^*$ הם שווי "אורך"
ולכן לפי (9):

$$F_1 \cdot F_3 \cdot F_4 \cdot \sin\Omega_2 = F_2 \cdot F_3 \cdot F_4 \cdot \sin\Omega_1$$

ומזה מקבלים ש $F_2/\sin\Omega_2 = F_1/\sin\Omega_1$ וכן לשאר.

מ.ש.ל.

<u>הערה</u>: בהוכחה זו, במקום לעבוד עם המכפלות הווקטוריות של הווקטורים ה-4-ממדיים "המורחבים" $\underline{F}_i^*$, יכולנו לעבוד, בדיוק באותו אופן, עם המכפלות המשולשות של הווקטורים $\underline{F}_i$ עצמם, וכך להישאר במרחב התלת-ממדי. למעשה, ראינו כבר בדיון על נפח המקבילון שאם "מרחיבים" ווקטורים תלת-ממדיים $\underline{K}, \underline{L}, \underline{M}$ לווקטורים 4-ממדיים $\underline{K}^*, \underline{L}^*, \underline{M}^*$, בהתאמה, אזי $\underline{K}^* \times \underline{L}^* \times \underline{M}^*$ הוא ווקטור בכוון הציר הרביעי של מערכת הצירים, שהרכיב שלו בכוון ציר זה איננו אלא המכפלה המשולשת של K, L ו M (ראה (6) והדיון שלפניו).

<u>המקרה של ממד כלשהו.</u>

נפנה עתה למרחב n ממדי, $n \geq 3$.

כאמור ידועה המכפלה הווקטורית ב n ממדים. היא קיימת לגבי n-1 ווקטורים כהכללה מיידית, במרחב n ממדי, של הנוסחה (1).

קיימת גם התכונה של ניצבות המכפלה לגורמיה, ז"א

$$\underline{F}_i \cdot (\underline{F}_1 \times \underline{F}_2 \times \ldots \times \underline{F}_{n-1}) = 0 \qquad i = 1,\ldots,n-1 \tag{14}$$

וכן

$$|\underline{F}_1 \times \underline{F}_2 \times \ldots \times \underline{F}_{n-1}| = \text{"נפח המקבילון"} \tag{15}$$

נגדיר גם במקרה כזה "סינוס זוית מרחבית Ω"

$$\sin\Omega = \frac{\text{נפח המקבילון}}{\text{מכפלת ארכי הווקטורים}} = \frac{|\underline{F}_1 \times \underline{F}_2 \times \ldots \times \underline{F}_{n-1}|}{|\underline{F}_1| \cdot |\underline{F}_2| \cdots \cdot |\underline{F}_{n-1}|} \tag{16}$$

בהנתן n ווקטורים (ז"א מספר הווקטורים שווה למימד n) ניתן להגדיר שוב את $\sin\Omega$, שהרי "נפח המקבילון" הנוצר ע"י n הווקטורים מוגדר כידוע ע"י הדטרמיננטה הנוצרת ע"י n הווקטורים. נגדיר איפוא:

$$\sin\Omega = \frac{\begin{vmatrix} F_{11} & \cdots & F_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ F_{n1} & \cdots & F_{nn} \end{vmatrix}}{|\underline{F}_1|\cdot|\underline{F}_2|\cdot\ldots\cdot|\underline{F}_n|} \tag{17}$$

כאשר $\underline{F}_i = (F_{i1},\ldots,F_{in})$.

יש אפוא הגדרה ל $\sin\Omega$ במרחב n ממדי גם עבור n-1 ווקטורים וכן לגבי n ווקטורים. נציין כי ניתן להגדיר $\sin\Omega$ במרחב n ממדי לכל m ווקטורים, $2 \le m \le n$, אך מחוסר מקום לא נעשה זאת כאן ונשאיר את הטפול בכך להזדמנות אחרת.

במקרה הפרטי של שני ווקטורי יחידה במרחב דו-ממדי, כלומר

$$\underline{v}_1 = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)\ ,\quad \underline{v}_2 = (\cos\beta,\ \sin\beta)$$

אז יהיה $\sin\varphi$, כאשר φ היא הזוית בין הווקטורים, נתון ע"י

$$\sin\varphi = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta \end{vmatrix} \tag{18}$$

קבלנו אפוא את הנוסחה הטריגונומטרית הידועה עבור

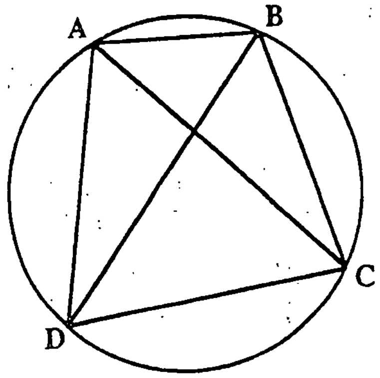
$$\sin\varphi = \sin(\beta-\alpha) = \cos\alpha\cdot\sin\beta - \sin\alpha\cdot\cos\beta$$

חובה נעימה היא לי להודות לפרופ' טדי אייזנברג על התענינותו ועדודו בעבודתי וכן לפרופ' דני ברנד על שקרא את כתב היד והעיר הערות רבות ומועילות. שניהם מהמחלקה למתמטיקה ומדעי המחשב באוניברסיטת בן-גוריון בנגב. תודה מגיעה גם למר אליהו לויר מהפקולטה למתמטיקה בטכניון על חלקו בהוכחה של משפט הסינוסים.

משפט סימסון ומשפט תלמי

מאת אבי ב. סיגלר, נהריה

ידוע מאוד משפטו של המתמטיקאי והאסטרונום היווני העתיק תלמי, שחי באלכסנדריה במאה השנייה:

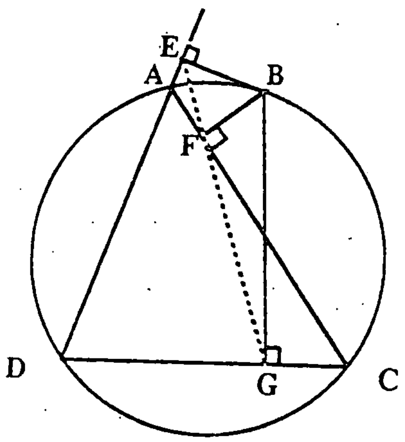


משפט. אם ABCD מרובע חסום במעגל קיים:

$$\boxed{AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BD}$$

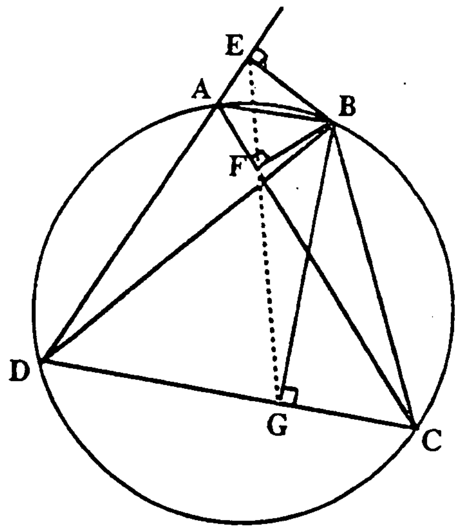
מספר הוכחות של משפט זה הובאו במאמר שפורסם לפני מספר שנים באתגר - גליונות מתמטיקה.

קיים משפט מפורסם של סימסון שנמצא כ-1500 שנה אחרי משפט תלמי:



משפט. משולש ADC חסום במעגל. מנקודה B כלשהי על הקף המעגל מורידים אנכים לצלעות המשולש ADC (או המשכיהן): E, F, G הטלי B על AD, AC, DC בהתאמה. אזי G, F, E על ישר אחד.

מפתיע שמשפט תלמי ומשפט סימסון שקולים, כלומר כל אחד מהם נובע מהשני. אוכיח את הכיוון משפט סימסון ⇐ משפט תלמי.



הוכחה: נתון בעצם ש $EF+FG = EG$ כי
E, F, G על ישר אחד לפי משפט סימסון.

המרובע AEBF בר-חסימה במעגל שקוטרו AB. לכן:

$$EF = AB\cdot\sin\measuredangle EAF = AB\cdot\sin\measuredangle DAC = AB\cdot\left(\frac{DC}{2R}\right) = \frac{AB\cdot DC}{2R}$$

בדומה לכך, המרובע BFGC בר-חסימה במעגל שקוטרו BC. לכן:

$$FG = BC\cdot\sin\measuredangle ACD = BC\cdot\left(\frac{AD}{2R}\right) = \frac{BC\cdot AD}{2R}$$

לבסוף, המרובע EBGD בר-חסימה במעגל שקוטרו BD. לכן:

$$EG = BD\cdot\sin\measuredangle ADC = BD\cdot\left(\frac{AC}{2R}\right) = \frac{BD\cdot AC}{2R}$$

ומהצבת הביטויים שקבלנו עבור EF, FG ו EG בשוויון $EF+FG = EG$
מתקבל משפט תלמי.

הקוראים מתבקשים:

א. להוכיח בדרך דומה מאוד את הכיוון תלמי $\Leftarrow$ סימסון.

ב. להוכיח את משפט סימסון ללא שימוש במשפט תלמי.

ג. לנסות למצוא, בעזרת ההוכחה שלעיל, מה יבוא במקום משפט
תלמי עבור מרובע שאינו בר-חסימה במעגל.

$$- A_6(91)|\overline{A_6(91)} = 010989989010 , \quad \overline{A_6(91)}|A_6(91) = 989010010989$$

$$- 32A_6(91)|\overline{32A_6(91)} = 351648846153 = 32A_6(91)|77A_6(91)$$

$$17A_8(1111)|\overline{17A_8(1111)} = 0153015335103510 = 17A_8(1111)|390A_8(1111)$$

בגלל ש

$$\overline{17A_8(1111)} = \overline{01530153} = 35103510 = 390A_8(1111)$$

$$1948A_8(10001)|\overline{1948A_8(10001)} = 1947805225087491 =$$
$$= 1948A_8(10001)|2509A_8(10001)$$

7. <u>נוסחאות</u>. כאשר x מספר ראשוני, המספרים הציקליים $A(x)$ הינם, הן מסדר 1 (כמו $A(7)$, $A(17)$, $A(19)$) הן מסדר $n>1$ (כמו $A(13)$ מסדר 2, $A(41)$ מסדר 5, $A(37)$ מסדר 12). אבל, כאשר x מספר פריק, <u>כל</u> המספרים הציקליים $A(x)$ הם מסדר $n>1$. זה נובע מהנוסחה (3), איפה ת נתון ע"י סכום של שלושה איברים, שכל אחד מהם גדול או שווה ל-1.

במאמר [1] הוכחנו שתי נוסחות בנוגע לגורמים m של הכפולות mA , כאשר $A(x)$ מסדר 1 ונתנו, רק באנלוגיה, ללא הוכחה, את הנוסחות המתאימות כאשר $A(x)$ מסדר $n>1$. נחזור להן כאן וניתן את ההוכחות, בגלל שהמספרים $A(x)$, עם x מספר פריק, <u>כולם</u> מסדר גדול מ-1.

נסמן ב- $(i=1,2,\dots,n)$ $A_{i,0}$ המספרים הקטנים ביותר שבמחלקות השקילות שמוצאים אחרי המיון של $x-1$ הכפולות $mA(x)$. אם

$$A_{i,0} = c_{i,r-1}\dots c_{i,k}\dots c_{i,1}c_{i,0} \qquad (i=1,2,\dots,n) \qquad (4)$$

הם המספרים האלה ו- $P_k(A_{i,0})$, כאשר $k = 0,1,\dots,r-1$ התמורות הציקליות שלהם. נסמן ב- $m_{i,k}$ המספרים המקיימים את השוויונים

$$P_k(A_{i,0}) = m_{i,k}A(x) , \quad i=1,2,\dots,n; \quad k=0,1,\dots,r-1 \qquad (5)$$

נוכיח את נוסחת הנסיגה

$$m_{i,k} = (m_{i,k-1} + xc_{i,k-1})/10 \qquad (6)$$

ואת הנוסחה הכללית

$$m_{i,k} = (m_{i,0} + xS_{i,k})/10^k \qquad (7)$$

האיבר $S_{i,k}$ הוא החלק מ-$A_{i,0}$ מימין הספרה $c_{i,k}$, ז.א.

$$S_{i,k} = c_{i,k-1}\dots c_{i,1}c_{i,0} \qquad (8)$$

הרחבת המושג מספר ציקלי

מאת דוד רימר, מכון ויצמן למדע, רחובות

0. הקדמה: במאמר "ישן וחדש על מספרים ציקליים" שפורסם בגליון מס' 12 של כתב-עת זה, היצגנו את המספרים הציקליים במובן הקלסי (כאשר נקודת המוצא שלהם הם מספרים ראשוניים) והוספנו, כדברים חדשים, נוסחאות וחבורות אלגבריות הקשורות למספרים הציקליים.

במאמר הנוכחי, אנו מרחיבים את המושג מספר ציקלי, כאשר מתעניינים במספרים המתקבלים גם ממספרים פריקים, באותו אופן כמו המספרים הציקליים הקלסיים והם בעלי תכונות דומות, בשינויים לא משמעותיים. ממספרים אלה נגיע לעוד הרחבה, המספרים הדו-ציקליים.

גם במאמר זה, נדון רק על מספרים בבסיס 10, אבל השיטה והרעיונות בתוקף עבור מספרים בכל בסיס, בשינויים טכניים בלבד.

1. בניית מספר ציקלי. יהי x מספר טבעי כלשהו, בהגבלה היחידה שיהיה זר ל-10. אז $1/x$ מספר עשרוני מחזורי. נניח שבחילוק הארוך התקבל, כמנה, מספר מחזורי בו המחזור בן r ספרות

$$\frac{1}{x} = 0.\overline{c_{r-1}\cdots c_k c_{k-1}\cdots c_1 c_0} \qquad (*)$$

כופלים את (*) ב 10^r ומקבלים

$$\frac{10^r}{x} = c_{r-1}\cdots c_k c_{k-1}\cdots c_1 c_0.\overline{c_{r-1}\cdots c_k c_{k-1}\cdots c_1 c_0} \qquad (**)$$

מחסרים את (**) מן (*) ומקבלים

$$A(x) = \frac{10^r-1}{x} = c_{r-1}\cdots c_k c_{k-1}\cdots c_1 c_0 \qquad (1)$$

שמהווה המספר הציקלי המבוקש. הסבר לשם "ציקלי" יתקבל בהמשך.

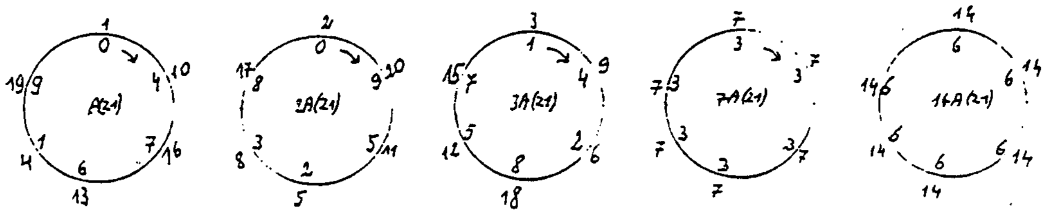
2. תכונה מאפינת למספר ציקלי. אם כופלים את המספר הציקלי $A(x)$ בכל המספרים הקטנים מ-x, אזי ב- $1, 2, \ldots, x-1$ אז כל המספרים המתקבלים הם התמורות הציקליות, הן של $A(x)$ והן של אחדות מכפולותיו של $A(x)$. הדוגמאות יבררו את ה"תמורות הציקליות".

דוגמאות. 1) $x=7$. אז $A(7) = 142857$. כל הכפולות $mA(7)$, $m = 1,2,\ldots,6$ הן התמורות הציקליות של $A(7)$ (בדוק!)

2) x=21. אז A(21) = 047619 וכפולותיו של A(21) בגורמים 1,4,10,13,16,19 הן התמורות הציקליות של A(21) (בדוק!). כפולותיו של A(21) בגורמים 2,5,8,11,17,20 הן התמורות הציקליות של 2A(21) וכפולותיו בגורמים 3,6,9,12,15,18 הן התמורות הציקליות של 3A(21). סוף-סוף, כפולותיו של A ב-7 וב-14, דהיינו 7A = 333333 ו- 666666 = 14A הן התמורות הציקליות של עצמן. A(21) הוא דוגמא למספר ציקלי במושג המורחב.

ניתן להמחיש את הקשר בין התמורות הציקליות והגורמים של הכפולות mA, אם נרשום את המספרים A, 2A, 3A, 7A, 14A לאורך מעגלים מכוונים (מעגלים שעליהם הוגדר כיוון). (ציור 1). כשקוראים (בכוון החץ), החל מספרה מסויימת, את המספר לאורך המעגל, אנו קוראים, למעשה, תמורה ציקלית של המספר הרשום במרכז המעגל. לאורך המעגל, מחוצה לו, רושמים את הגורם המתאים של הכפולה mA.

לדוגמאות: על המעגל שבמרכזו רשום A, החל מהספרה 7 אנו קוראים, בכיוון החץ, את המספר 761904, המהווה 16A. אז נרשום מחוצה למעגל, מול הספרה 7, את הגורם 16. באותו אופן, על המעגל 2A מול הספרה 3, רושמים, מחוץ למעגל, 8 בגלל שהתמורה הציקלית של 2A המתחילה בספרה 3, דהיינו 380952 מהווה 8A. על המעגל 14A, רשום המספר 666666, שמהווה התמורה הציקלית של עצמה והוא שווה ל-14A. לכן רושמים 14 מול כל ספרה 6 בפנים המעגל.



ציור 1

3. ציקליות כיחס שקילות. על הקבוצה {mA | m = 1,2,...,x-1} נגדיר יחס (שנסמנו ב "Δ"), באופן זה:

כפולה m_1A ביחס Δ עם כפולה m_2A, אם m_1A תמורה ציקלית של m_2A.

היחס הזה מקיים שלושת התכונות של השקילות:

א) כל כפולה mA ביחס Δ עם עצמה (בגלל שהיא תמורה ציקלית גם של עצמה).

ב) אם m_1A ביחס Δ עם m_2A $(m_1 \neq m_2)$ אז גם m_2A ביחס Δ עם m_1A.

ג) אם $m_2A \, \Delta \, m_1A$ ו- $m_3A \, \Delta \, m_2A$ אז גם $m_3A \, \Delta \, m_1A$.

(בדוק את שלושת התכונות הללו על הקבוצות mA דלעיל).

על פי יחס שקילות זה, הקבוצה $\{mA \mid m = 1,2,\ldots,x-1\}$ מתחלקת למחלקות שקילות כך שמתקיימים התנאים:

א) מחלקת שקילות מכילה את כל הכפולות השקולות לאחת מהן.

ב) שתי מחלקות שקילות זרות זו לזו.

ג) אין אף מחלקת שקילות ריקה.

נובע מכאן, כי כאשר $r = x-1$ (כמו במקרה של $A(7)$ או של $A(19)$) אז יש רק מחלקת שקילות אחת.

כאשר $r < x-1$, אז יש יותר ממחלקת שקילות אחת. אם יש n מחלקות שקילות, אומרים כי $A(x)$ מספר ציקלי מסדר n.

4. <u>קביעת הסדר של מספר ציקלי</u>. במקרה הקלסי, כאשר x מספר ראשוני, אז r מהווה גורם של $x-1$. מסמנים

$$n = \frac{x-1}{r} \qquad (2)$$

ואומרים כי המספר $A(x)$ מספר ציקלי מסדר n.

כאשר x מספר פריק, במקרה הפשוט ביותר, $x = x_1x_2$ ו- x_1, x_2 מספרים ראשוניים. אם ארכי המחזורים של $1/x_1$, $1/x_2$ הם r_1, r_2 בהתאמה, ואורך המחזור של $1/x$ הוא r, אז יכולים לקרות שני מצבים:

א) $r_1 = r_2 = r$. זהו מצב שלא שונה מהמצב הקלסי, כאשר x היה מספר ראשוני. לכן $n = \frac{x-1}{r}$ והסדר של $A(x)$ הוא n.

<u>דוגמא</u>. $x = 91 = 7 \cdot 13$. אז $r_1 = r(1/7) = 6$, $r_2 = r(1/13) = 6$ בגלל ש $1/7 = 0.\overline{142857}$ ו- $1/13 = 0.\overline{076923}$. גם $r(1/91) = 6$

בגלל ש $1/91 = 0.\overline{010989}$. נובע כי $A(91) = \frac{10^6-1}{91} = 010989$
הוא מספר ציקלי מסדר 15 בגלל ש- $\frac{91-1}{6} = 15$. כאשר מבצעים את
המיון של 90 הכפולות $mA(91)$ עם $m = 1,2,\ldots,90$, ל-15 מחלקות
השקילות, מתקבלות 15 הכפולות mA המגדירות את 15 מחלקות השקילות,
דהיינו:

A, 2A, 3A, 4A, 5A, 6A, 7A, 8A, 12A, 13A, 14A, 15A, 16A, 23A, 24A

ב) $r_1 \neq r_2$. את המקרה הזה נדון על דוגמא וממנה תראה השיטה.
$x = 77 = 7\cdot 11$, $1/77 = 0.\overline{012987}$, $1/11 = 0.\overline{09}$. אזי
$A(77) = 012987$ עם $r=6$. על מנת למיין את הכפולות mA
$(m = 1,2,\ldots,76)$ נבחין בין הגורמים $1,2,\ldots,76$ שלושה סוגים:

(א) כפולות של 7, נסמן אותן $7m_1$, כאשר $7m_1 < 77$ ולכן $m_1 < 11$.

(ב) כפולות של 11, נסמן אותן $11m_2$, כאשר $11m_2 < 77$ ולכן $m_2 < 7$.

(ג) לא כפולות של 7 ולא של 11, אזי זרים ל-7 ול-11; נסמן אותם m_3 , כאשר $m_3 \neq 7m_1, 11m_2$. נחשב את הכפולות האלה.

(א)
$$7m_1A(77) = 7m_1\frac{10^6-1}{77} = m_1\frac{10^6-1}{11} = m_1\frac{10^2-1}{11}(10^4+10^2+1) =$$
$$= m_1\cdot A(11)\cdot 010101 = m_1\cdot 090909\ , \qquad m_1=1,2,\ldots,10$$

התקבלו כאן 10 כפולות של $A(77)$, המהוות 5 מחלקות שקילות, בגלל
ש-$A(11)$ מספר ציקלי מסדר 5 $(\frac{11-1}{2} = 5)$.

(ב)
$$11m_2A(77) = 11m_2\frac{10^6-1}{77} = m_2\frac{10^6-1}{7} = m_2A(7)\ ,$$
$$m_2=1,2,\ldots,6$$

לכן ישנן כאן 6 כפולות של $A(77)$ והן מהוות מחלקת שקילות אחת,
בגלל ש-$A(7)$ מספר ציקלי מסדר 1 $(\frac{7-1}{6} = 1)$. הכפולות האלה הן כל
6 התמורות הציקליות של $A(7)$.

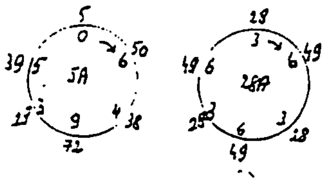
(ג) $m_3A(77)$, $m_3 \neq 7m_1$, $m_3 \neq 11m_2$; $\{7m_1\}=\{7,14,21,28,35,42,49,56,63,70\}$
$\{11m_2\}=\{11,22,33,44,55,66\}$

נשארו עוד 60 $(76-10-6 = 60)$ גורמים m_3 . את 60 הכפולות $m_3A(77)$
מחלקים ל-10 מחלקות שקילות בגלל ש-$A(77)$ מספר בן 6 ספרות, לכן
מכל כפולה $mA(77)$ מתקבלות 6 תמורות ציקליות.

נובע כי קבוצת הכפולות של $A(77)$, דהיינו $mA(77)$, כאשר $m = 1,2,...,76$ מתחלקת ל-16 מחלקות שקילות, מהן 11 מחלקות שקילות בנות 6 איברים בכל אחת, דהיינו התמורות הציקליות של המספרים

$A,\ 2A,\ 3A,\ 4A,\ 5A,\ 6A,\ 9A,\ 11A,\ 12A,\ 18A,\ 19A$

ו-5 מחלקות שקילות של 2 איברים בכל מחלקה, שהם התמורות הציקליות של המספרים $7A,\ 14A,\ 21A,\ 28A,\ 35A$. הנה המחשה גרפית של שתיים ממחלקות שקילות הללו, אחת מכל סוג (ציור 2)



ציור 2

מדוגמת $A(77)$ נובע בהכללה, כי הסדר n של מספר ציקלי $A(x)$, כאשר $x = x_1 \cdot x_2$, אורכי המחזורים של $1/x$, $1/x_2$, $1/x_1$ הם r, r_2, r_1 בהתאמה, נתון ע"י הנוסחה

$$n = \frac{x_1-1}{r_1} + \frac{x_2-1}{r_2} + \frac{(x-1) - (x_1-1) - (x_2-1)}{r} \qquad (3)$$

לציין כי כאשר $r_1 = r_2 = r$, הנוסחה (3) היא בדיוק (2), לכן היא מכלילה אותה.

5. <u>מספרים דו-ציקליים</u>. נחזור למספר $A(21)$ בו עסקנו לעיל, ונסמן $\bar{A}(\overline{21})$ המספר שמתקבל מ-$A(21)$ כאשר קוראים אותו מימין לשמאל (כאילו "בעברית"). אז מן $A(21) = 047619$ מתקבל $\bar{A}(\overline{21}) = 916740$. ברור כי המספר החדש, וכמו כן תמורותיו הציקליות, אינם כפולות של $A(21)$. וזה המצב בכל המספרים הציקליים הקלסיים (ז.א. x מספר ראשוני) פרט ל- $A(11) = 09$ (בדוק!).

לעומת זאת, מצאנו מספר לא מבוטל של מספרים ציקליים $A(x)$ עם x מספר פריק, שאת הגורמים $1,\ 2,\ ...\ ,\ x-1$ נוכל למיין לשתי קבוצות $\{m'\}$ ו $\{m''\}$ כך שלכל כפולה $m'A(x)$ ניתן להתאים כפולה $m''A(x)$ ו- $\overline{m'A} = m''A$. למספרים ציקליים כאלה נקרא מספרים <u>דו-ציקליים</u>.

החיפוש אחרי מספרים דו-ציקליים נעשה, כמובן, בניסויים. אבל לאחר שמוצאים עבור $A(x)$ מסוים, כי המנה $\bar{A}(\bar{x})/A(x)$ אינה מספר שלם, יהיה מיותר לבדוק אותו דבר עבור התמורות הציקליות של $A(x)$. לכן נאמר כי תנאי נחוץ כדי שמספר ציקלי $A(x)$ יהיה דו-ציקלי הוא כי המנה $\bar{A}(\bar{X})/A(X)$ תהיה מספר שלם. תנאי זה מצמצם באופן משמעותי את מספר הניסויים.

הנה דוגמאות למספרים דו-ציקליים בעלי יותר משתי ספרות*)

מספרים מסוג $A(x) = \frac{10^3-1}{x}$ (נסמן אותם $A_3(x)$):

$A_3(111) = 009$, $A_3(333) = 003$

מספרים מסוג $A(x) = \frac{10^4-1}{x}$, (נסמן אותם $A_4(x)$):

$A_4(11) = 0909$, $A_4(33) = 0303$, $A_4(303) = 0033$,
$A_4(909) = 0011$, $A_4(1111) = 0009$, $A_4(3333) = 0003$

מספרים מסוג $A_5(x) = \frac{10^5-1}{x}$

$A_5(11111) = 00009$

מספרים מסוג $A_6(x) = \frac{10^6-1}{x}$

$A_6(33) = 030303$, $A_6(91) = 010989$, $A_6(99) = 010101$,
$A_6(111) = 009009$, $A_6(999) = 001001$

נציין כי $A_6(91)$ הוא הכי יוצא דופן. למעשה, הוא היה זה שעורר תשומת לבנו למספרים מסוג זה.

מספרים מסוג $A_8(x) = \frac{10^8-1}{x}$

$A_8(101) = 00990099$, $A_8(10001) = 00009999$

6. <u>מספרים סימטריים</u> (פָלִינדרומים). משתעשעים לפעמים עם מלים סימטריות, או מספרים סימטריים (השנים 1991, 2002, 5775 הן דוגמאות למספרים כאלה בעלי משמעות כלשהי, והם די נדירים).

המספרים הדו-ציקליים נותנים הזדמנות לבנות מספרים סימטריים בעלי המשמעות כי מקור המספר הסימטרי הוא מספר ציקלי מסויים. הנה כמה דוגמאות. (נשתמש בסימן "‖" עבור הצמדה, דוגמא: $31\|4 = 314$).

---

*) כפי שהקורא ראה מהדוגמאות דלעיל, הספרה 0 בשמאל מספר ציקלי, היא ספרה בעלת משמעות כמו כל ספרה אחרת.

<u>הוכחה</u>. נחשב את ההפרש $D = 10P_k(A_{i,0}) - P_{k-1}(A_{1,0})$

$$D = 10(c_{i,k-1}\cdot 10^{r-1} + \dots + c_{i,0}\cdot 10^{r-k} + \dots + c_{i,k}) -$$
$$(c_{i,k-2}\cdot 10^{r-1} + \dots + c_{i,0}\cdot 10^{r-k-1} + \dots + c_{i,k-1}) =$$
$$= c_{i,k-1}\cdot(10^r-1) = c_{i,k-1}\cdot x\cdot A(x)$$

בגלל ש- $10^r-1 = x\cdot A(x)$.

על פי הנוסחה (5), שוויון זה נעשה ל

$$D = 10m_{i,k}\cdot A - m_{i,k-1}\cdot A = c_{i,k-1}\cdot x\cdot A$$

אחרי הצמצום ב-A מתקבל

$$10m_{i,k} = m_{i,k-1} + xc_{i,k-1}$$

ומכאן מתקבלת הנוסחה (6).

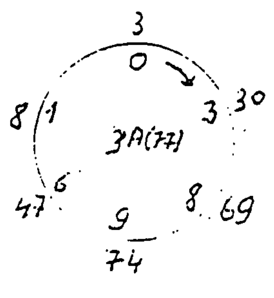
נעבור להוכחת (7) באינדוקציה.

עבור k=1 , הנוסחה (7) אומרת $m_{i,1} = (m_{i,0} + xS_{i,1})/10$ אבל לפי (8) $S_{i,1} = c_{i,0}$ ולכן יש להוכיח $m_{i,1} = (m_{i,0} + xc_{i,0})/10$ וזה נכון לפי (6) שכבר הוכחה.

נניח כי עבור k-1 קיימת הנוסחה $m_{i,k-1} = (m_{i,0} + xS_{i,k-1})/10^{k-1}$
נציב ערך זה של $m_{i,k-1}$ בנוסחה הרקורסיבית (6) ונקבל

$$m_{i,k} = \frac{1}{10}[(m_{i,0} + xS_{i,k-1})/10^{k-1} + xc_{i,k-1}] =$$
$$= \frac{1}{10^k}[m_{i,0} + x(S_{i,k-1} + 10^{k-1}c_{i,k-1})] = \frac{1}{10^k}(m_{i,0} + xS_{i,k})$$

בגלל ש- $S_{i,k} = S_{i,k-1} + 10^{k-1}c_{i,k-1}$ מ.ש.ל.



והנה <u>תרגיל</u>. בציור 3 נתון 3A(77) וסביב למעגל, המספרים m. סכום כל שני מספרים m שבקצוות קוטר, שווה 77, דבר זה קורה עבור כל הכפולות mA(77). עבור mA(91), סכומים אלה שווים ל-91. אבל זה לא קורה עבור כל המספרים mA(x), לדוגמא עבור mA(21). הסבר למה.

האולימפיאדה לנוער במתמטיקה של מכון ויצמן, 1992

י. גילים (רחובות)

התחרות הנ"ל התקיימה השנה זו הפעם ה-24 ברציפות, במכון ויצמן למדע, רחובות. מספר המשתתפים הגיע ל-150, קצת למעלה מהרגיל, ביניהם כ-40 עולים חדשים מברית המועצות. שאלונים חולקו בעברית וברוסית ורמת הציונים היתה בדרך כלל גבוהה. בעמודים הבאים תמצאו עותק מהשאלון.

יש לציין כי מאז הוחל בפעילות זו, בשנת 1969, קיבל בנק הפועלים בע"מ על עצמו את כל הדאגה והאחריות למימון התחרות.

הפרס הראשון הוא כסוי של שכר לימוד לשלוש שנים בכל מוסד להשכלה גבוהה בארץ, לפי בחירת הזוכה.

התוצאות השנה היו כדלקמן:

פרס ראשון

אבישי ונונו	ויצמן 18, קרית מלאכי 70900 כתה י"א ביה"ס למדעים ולאמנויות, ירושלים

פרס שני

רום פנחסי	הרצל 103/1 א', ירושלים 96344 כתה י"ב תיכון ליד האוניברסיטה, ירושלים

ציונים לשבח

מרק גולדשמידט	ניקנור 37/2, ירושלים כתה י"א תיכון ליד האוניברסיטה, ירושלים
איליה גרמן	חפץ חיים 25, פתח-תקוה 49350 כתה י"ב בי"ס עמל ב', פתח-תקוה
עומר אנג'ל	שארית הפליטה 23, דניה, חיפה 34987 כתה י"א בי"ס ליאו-בק, חיפה
לב מכלים	סמי המלכים 8/1, קרית שמונה 10200 כתה י"א בי"ס דנציגר, קרית שמונה

שאלון האולימפיאדה של מכון ויצמן

.1 (10 נק')

הוכח כי אין למצוא x,y חיוביים המקיימים:

$$x^{19} y^{92} = 2^{1992}$$

$$19x + 92y = 5752$$

.2 (10 נק')

הוכח כי אין פוליאדר בעל 7 מקצועות.

.3 (10 נק')

נתונה מערכת משוואות:

$$x_r x_{r+1} = r \qquad (r = 1,2, \ldots ,n-1)$$

$$x_n x_1 = n$$

א. הוכח כי כאשר n זוגי, אין פתרון.

ב. פתור את מערכת המשוואות במקרה ש-n הוא אי-זוגי.

.4 (10 נק')

נתונה קבוצה של 10n נקודות במישור, אשר אין שלוש מביניהן הנמצאות על קו ישר. הוכח שניתן לבנות n משושים ו-n מרובעים אשר קדקדיהם הם הנקודות הנתונות כך שאין שניים מבין 2n המצולעים האלה אשר יש להם נקודה משותפת (על השפה או נקודה פנימית).

.5 (20 נק')

אם x,y,z הם מספרים חיוביים, הוכח כי:

$$\text{Min}\,(1,\ x^3,\ y^4,\ z^5) \le xyz$$

.6 (20 נק')

שיעורי הנקודות A,B,C הם (2,0), (1,0), (0,0) בהתאמה.
הנקודה P נמצאת במישור ABC ומקיימת

$$\sphericalangle PBC = 2\sphericalangle PAC + \pi/2$$

מצא את המקום הגיאומטרי של P (משוואה, קביעת תחום ההגדרה, תיאור סכימטי ואסימפטוטות).

7. (20 נק')

$a_1, a_2, \dots, a_n$ היא סדרה חשבונית של מספרים חיוביים.

$b_1, b_2, \dots, b_n$ היא סדרה הנדסית בעלת אותו מספר איברים

ונתון כי $a_1 = b_1$, $a_n = b_n$.

הוכח כי:

$$\sum_{r=1}^{n} a_r \geq \sum_{r=1}^{n} b_r$$

באילו תנאים יתקיים שוויון? נמק.

האולימפיאדה למתמטיקה ע"ש פרופ' י. גרוסמן ז"ל

תחרות זו, שמקיים הטכניון משנת 1960, נערכה השנה בפעם ה-33. היא קרויה ע"ש פרופ' ירמיהו גרוסמן ז"ל, מתמטיקאי שייסד את הפקולטה למדעים בטכניון, שהפכה אחר כך לפקולטות למתמטיקה, לפיסיקה, לכימיה ולמדעי המחשב. בעמודים הבאים תוכלו למצוא את השאלון.

התוצאות השנה היו כדלקמן:

פרס ראשון: שכר לימוד לשנתיים

עומר אנג'ל - שארית הפליטה 23, חיפה 34987
תיכון ליאו בק

פרס שני: שכר לימוד לשנה

איליה גרמן - חפץ חיים 25/5, פתח תקוה 49350
ביה"ס עמל ב', פתח תקוה

פרס שלישי: שכר לימוד לחצי שנה - לא חולק השנה.

ציונים לשבח:

עמיר גבעון - קהילת ציון 42, הרצליה

יצחק גלנדר - צה"ל, קבוץ מזרע 19312

ערן הלפרין - ועידת קטוביץ 12, תל-אביב
ביה"ס תיכון עירוני ד, תל אביב

רום פנחסי - שד' הרצל 103/א1, ירושלים
ביה"ס התיכון ליד האוניברסיטה בירושלים

אנטולי שינצלר - קלע 12905

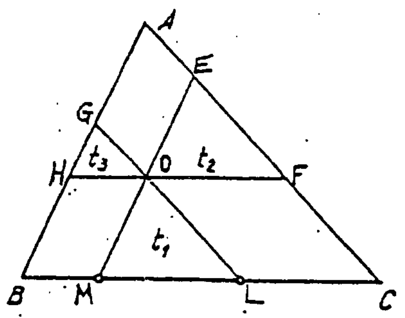
הפרסים יוענקו בצורת מילגה ללימודים בפקולטה למתמטיקה בטכניון. לתלמידים המתגייסים לצה"ל תישמר הזכות לקבל את הפרס לאחר סיום שירותם הצבאי. הזוכים אשר יירשמו למתמטיקה יהיו פטורים מבחינות מיון.

האולימפיאדה למתמטיקה ע"ש י. גרוסמן ז"ל

ענה על כל 6 השאלות.
משך הבחינה 3 שעות.
אין להשתמש בכל חומר עזר (בולל מחשבון).

שאלה מספר 1 (10 נקודות)

נתון משולש ΔABC ונקודה O בתוכו (ראה ציור).



דרך O מעבירים ישרים מקבילים לצלעות AC , BC , AB.

נסמן ב- M,L,F,E,G,H את נקודות המפגש של ישרים אלו עם צלעות המשולש ΔABC.

יהיו t_1 , t_2 , t_3 שטחי המשולשים ΔMOL , ΔEOF , ΔGOH בהתאמה.

בטא את שטח המשולש ΔABC באמצעות t_1 , t_2 , t_3.

<u>שאלה מספר 2</u> (20 נקודות)

נתונה קבוצה A של 100,000 מספרי טלפון בעלי 5 ספרות כל אחד (מ-00000 עד 99999).

מצא קבוצה B של 100,000 (מאה אלף) מספרי טלפון בעלי 6 ספרות כל אחד המתקבלת מקבוצה A על ידי הוספת ספרה שישית מצד ימין לכל אחד מהמספרים ב-A וכך שהחלפה של שתי ספרות סמוכות במספר בתוך B לא תתן מספר <u>אחר</u> ב-B.

<u>שאלה מספר 3</u> (20 נקודות)

א. מצא את <u>כל</u> הרביעיות (x_1, x_2, x_3, x_4) של מספרים ממשיים שמקיימות את הדרישה הבאה:

$$x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 = 2$$

$$x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 = 2$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_3 = 2$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_4 = 2$$

הוכח שאכן מצאת את כולן.

<u>שאלה מספר 4</u> (20 נקודות)

<u>הגדרה</u> הקוטר של קבוצה סופית (לא ריקה) של נקודות (במישור) הוא מקסימום המרחקים בין זוגות של נקודות בקבוצה.

תהא A קבוצה של n נקודות במישור. יהא $f(A)$ מספר הזוגות (לא סדורים) של נקודות מתוך A שהמרחק ביניהן שווה לקוטר של A.

יהא

$$g(n) = \max_{\#A=n} f(A)$$

($g(n)$ שווה למקסימום של $f(A)$ כאשר A עובר על <u>כל</u> הקבוצות של n נקודות במישור).

א) הבע את $g(n)$ במונחים של n.

ב) בנה קבוצה A של n נקודות במישור כך ש -

$$f(A) = g(n)$$

<u>שאלה מספר 5</u> (20 נקודות)

נסמן ב:

$$\prod_{1\le i<j\le n} b_{ij}$$

את המכפלה של כל המספרים b_{ij} כאשר (i,j) הם כל הזוגות המקיימים $1 \le i < j \le n$.

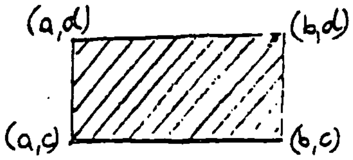
תהי $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ סדרה עולה של n מספרים שלמים. הוכח כי המכפלה

$$\prod_{1\le i<j\le n} \frac{a_j - a_i}{j - i}$$

היא מספר שלם.

<u>שאלה מספר 6</u> (20 נקודות)

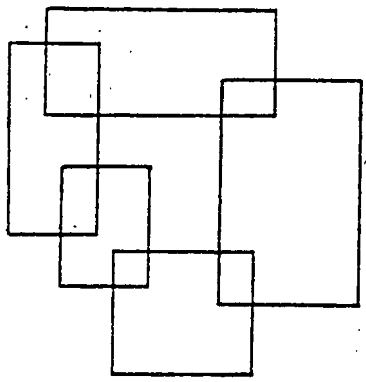
מלבן קביל במישור זו קבוצה מהצורה



$$A=\{(x,y):\ a\le x\le b\ ,\ c\le y\le d\}$$

מערכת קבילה של מלבנים במישור זה אוסף $A_1,\dots,A_k$ של k מלבנים קבילים במישור כך שהחיתוך של כל שלושה מלבנים הוא ריק. (למשל ראה ציור למטה).

צביעה של מערכת מלבנים היא התאמה של צבע לכל מלבן כך שמלבנים נחתכים נצבעים בצבעים שונים. בדוגמא הבאה של מערכת קבילה של חמישה מלבנים, כל צביעה משתמשת ב-3 צבעים שונים לפחות.



בנה מערכת קבילה של מלבנים במישור כך שכל צביעה משתמשת ב-4 צבעים שונים לפחות.

הוכח שהבניה מקיימת את הדרוש.