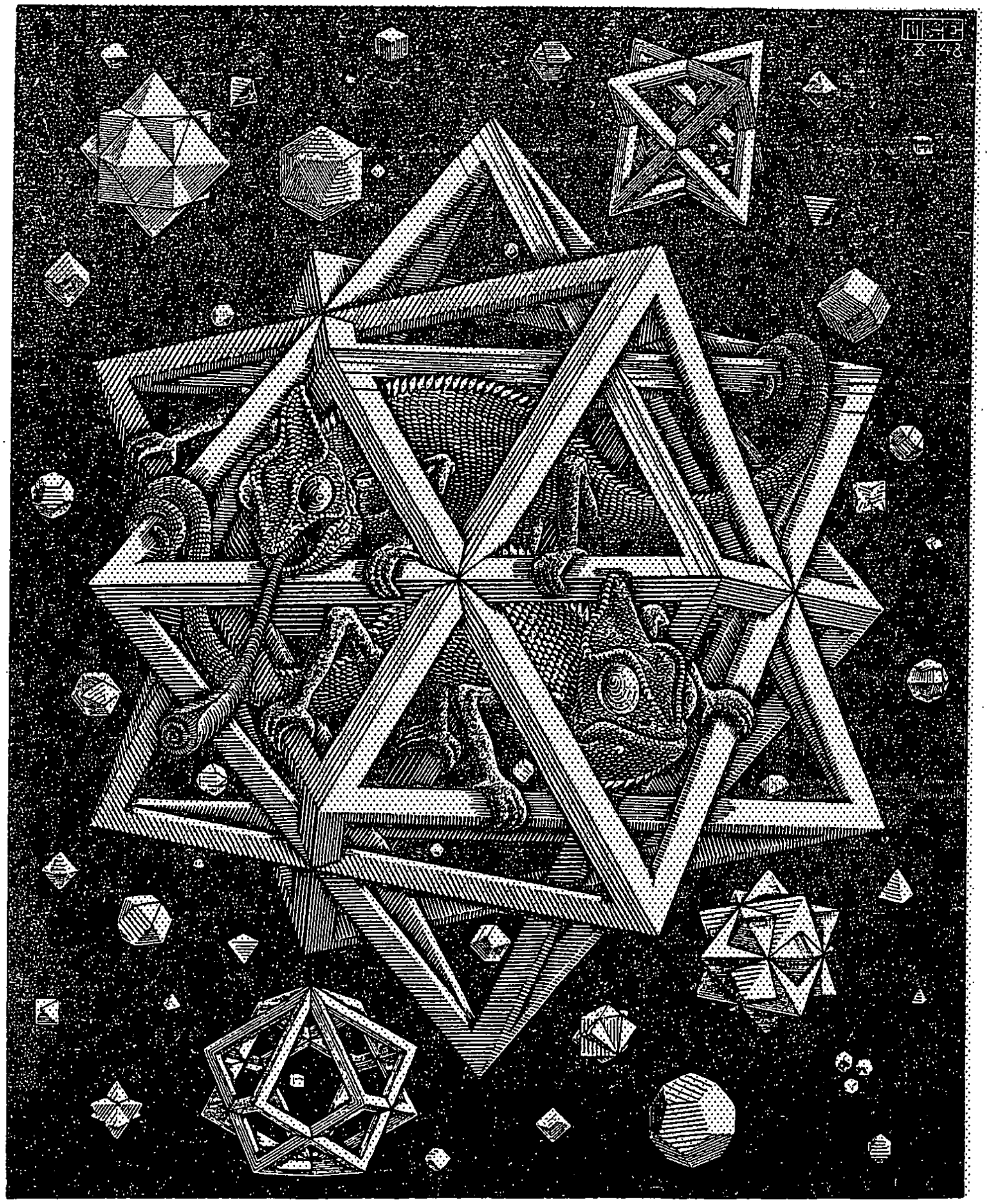
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס. 5 סיון תשמ"ו יוני 1986



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון וייצמן למדע
רחובות

בחסות המרכז המדעי י.ב.מ. ישראל

תוכן העניינים עמוד

יוצא לאור על ידי הפקולטות למתמטיקה במכון וייצמן למדע ובטכניון.

המערכת: פרופ. י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שימושית, מכון וייצמן למדע
פרופ. א. ברמן, המחלקה למתמטיקה, הטכניון.

מען המערכת: הפקולטה למתמטיקה שימושית, מכון וייצמן למדע, ת.ד. 26,
רחובות 76100, טלפון 08-483544.

דבר המערכת

עם הוצאת גליון זה הגענו לסוף שנת הלימודים תשמ"ו. החוברת הבאה תופיע לקראת סוף הקיץ ובזה נפתח את עבודתנו לשנת הלימודים תשמ"ז.

כדי לעזור לגשר על הקיץ הארוך הזה, הרחבנו הפעם את המדור "בעיות חדשות", מתוך תקוה שקוראינו ימצאו בהן עיסוק מהנה לחדשי החופשה.

* * * *

בעיה (הוצעה ע"י מ. שמשוני)

"ברשותנו שלושה זוגות כדורים בצבעים אדום, ירוק וכחול. כל ששת הכדורים צורתם זהה אך בכל זוג אחד הכדורים כבד מחברו. כל הכדורים הכבדים משקלם שוה זה לזה, וכיוצא בזה הכדורים הקלים. הנך נדרש לזהות עבור ששת הכדורים את כל הכבדים ואת כל הקלים, וזאת באמצעות שתי שקילות בלבד על מאזני אסל (כפות)".

*נשמח לקבל מקוראים הצעות לפתרון בעיה זו. דיון מלא **בבעיה** ופתרונה יופיע בגליון הבא.*

מתח במשחקי כדורגל ובקלפי

ד. ציילברגר (ארה"ב)

ניתן לתאר משחק כדורגל באופן מתמטי על ידי סדר הבקעת השערים. אם נסמן ב"א" שער של הקבוצה המארחת וב"ב" שער של הקבוצה האורחת אזי אפשר לתאר משחק על ידי "מלה" המורכבת, מהאלפבית המכיל רק את האותיות "א" ו "ב". למשל, המשחק אאבבא מתאר את המשחק בו השער הראשון והשני הובקעו על ידי הקבוצה המארחת, השער השלישי והרביעי על ידי הקבוצה האורחת והשער החמישי שוב על ידי הקבוצה המארחת. כמובן שהמשחק הסתיים בתוצאה 3:2 והתוצאות החלקיות היו 1:0 , 2:0 , 2:1 , 2:2 , 3:2.

נשאלה השאלה, כמה "משחקים" אפשריים קיימים שתוצאתם הסופית הנה 3:2 מכיון שסה"כ הובקעו 5 שערים עלינו למצוא בכמה אפשרויות יכולה הקבוצה האורחת ל"קחת" שלוש שערים לזכותה. ידוע שמספר האפשרויות לבחור קבוצה של k עצמים מתוך קבוצה של n עצמים הנו

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(כאשר $a! = a(a-1)\ldots 1$) ולכן סה"ב קיימים

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

משחקים אפשריים עם תוצאה סופית 3:2. הרי הם (בסוגריים מצוינת סדרת התוצאות החלקיות):-

א א א ב ב (0:0 , 1:0 , 2:0 , 3:0 , 3:1 , 3:2)
א א ב א ב (0:0 , 1:0 , 2:0 , 2:1 , 3:1 , 3:2)
א א ב ב א (0:0 , 1:0 , 2:0 , 2:1 , 2:2 , 3:2)
א ב א א ב (0:0 , 1:0 , 1:1 , 2:1 , 3:1 , 3:2)
א ב א ב א (0:0 , 1:0 , 1:1 , 2:1 , 2:2 , 3:2)
א ב ב א א (0:0 , 1:0 , 1:1 , 1:2 , 2:2 , 3:2)
ב א א א ב (0:0 , 0:1 , 1:1 , 2:1 , 3:1 , 3:2)
ב א א ב א (0:0 , 0:1 , 1:1 , 1:2 , 2:2 , 3:2)
ב א ב א א (0:0 , 0:1 , 1:1 , 1:2 , 2:2 , 3:2)
ב ב א א א (0:0 , 0:1 , 0:2 , 1:2 , 2:2 , 3:2)

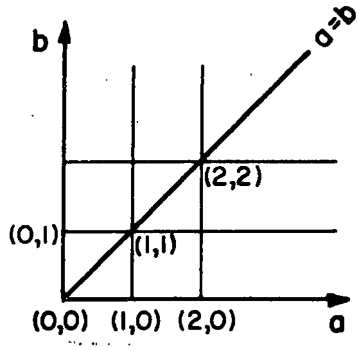
(שים לב שסדרנו את ה"מלים" המתארות את המשחקים באופן אלפביתי, כמו שהיו מופיעות במלון. סדור כזה נקרא במתמטיקה "לקסיקוגרפי"). באופן כללי קיימים

$$\binom{a+b}{a} = \frac{(a+b)!}{a!\ b!}$$

משחקים שתוצאתם הסופית היא $a:b$. פשוט צריך לתת a שערים, מתוך סה"כ $a+b$ השערים, לקבוצה הראשונה.

עד עכשיו נתנו הצגה "מלולית" למשחקי כדורגל. כל משחק מתואר על ידי ה"מלה" שלו, כלומר סדרה סופית של א-ים ו ב-ים. כעת נתן הצגה גרפית מוחשית לכל משחק כדורגל (שימו לב שאנו משתמשים במונח "משחק" במובן טכני-מתמטי ולא במובן היום-יומי שלו, כלומר "משחק" נקבע באופן יחיד על ידי סדר הבקעת השערים. מבחינה מתמטית כל המשחקים שהסתיימו בתיקו 0:0 זהים).

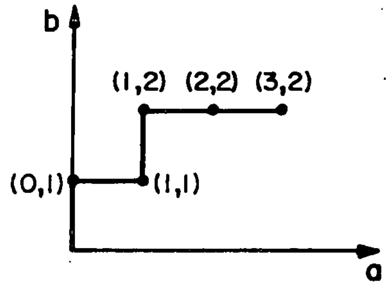
כל תוצאה אפשרית $a:b$ תסומן על ידי הנקודה (a,b) במישור. כל הנקודות $a:a$ על האלכסון $a=b$ משקפות תוצאות תיקו. כל הנקודות מתחת לאלכסון, כלומר באזור $\{a > b\}$, משקפות תוצאות הפסד לקבוצה המארחת (ראה **איור 1**).



איור 1

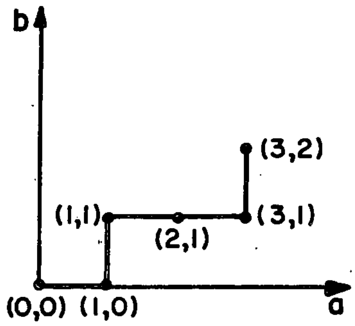
בנגוד לגיאומטריה אנליטית רגילה אשר בה כל נקודה חשובה, אנו מתעלמים פה מכל הנקודות עם שעורים לא שלמים או שליליים. בכדורגל אין שום משמעות לתוצאה $(1.5:1)$ או $(-1:3)$.

לכל משחק נתאים עכשיו את המסלול העובר דרך כל התוצאות החלקיות.
למשל המשחק באבאא מתואר באיור 2.



איור 2.

את מהלך המשחק נתן לתאר כדלקמן. מתחילים בשוויון 0:0. הקבוצה האורחת הבקיעה שער והתוצאה נהפכת ל- 0:1, התוצאה החלקית הבאה הנה 1:1 וכו'. הקוראים נקראים בזה לצייר את ההליכה המתאימה ל"משחק" אאבבא. מהו המשחק המתואר על ידי איור 3 ?



איור 3.

הבה נבחן את המשחקים "אאבאב" ו "בבאאא". במשחק הראשון "ברור" מההתחלה מצב הכוחות והקבוצה המנצחת מובילה תמיד. המשחק השני, לעומת זאת, מלא תהפוכות:

הקבוצה האורחת מובילה 2:0 ואז מתהפכת הקערה על פיה והקבוצה המארחת מנצחת. משחק בו הקבוצה המנצחת מובילה החל מהשער הראשון יקרא <u>משחק חסר מתח</u>. נשאלת השאלה, כמה מבין סה"כ המשחקים האפשריים עם התוצאה a:b היו משחקים חסרי מתח? התשובה לכך נתנת במשפט הבא.

<u>משפט</u>: מבין $\frac{(a+b)!}{a!\ b!}$ המשחקים שתוצאתם a:b,

$\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{(a+b)!}{a!\ b!}$ מהם הם חסרי מתח.

לפני שנגש להוכחת המשפט, שימו לב שהיחס בין מספר המשחקים חסרי המתח לבין מספר המשחקים הנו $\frac{a-b}{a+b}$. בפרט אם a=b, לא קיים שום משחק חסר מתח, מה שברור מאליו. אם נגדיר משחק כ"מלא מתח" אם אינו חסר מתח אזי מספר המשחקים מלאי מתח הוא

$$\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\cdot\frac{(a+b)!}{a!\ b!}=\frac{2b}{a+b}\cdot\frac{(a+b)!}{a!\ b!}$$

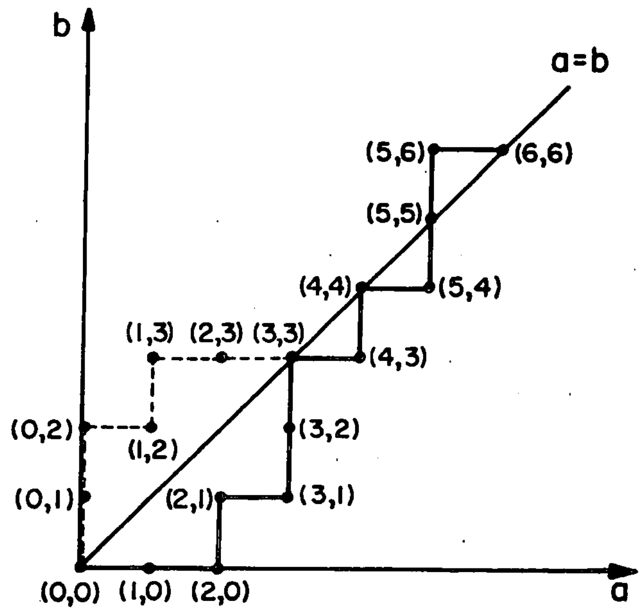
הקוראים יוכלו לשכנע את עצמם בקלות שמבין 10 המשחקים שתוצאתם 3:2 רק "אאאבב", ו"אאבאב" הנם חסרי מתח, ואכן הצבה בנוסחה נותנת

$$\frac{3-2}{3+2}\cdot\frac{5!}{2!\ 3!}=2$$

<u>הוכחה</u>: נסתכל בתרשים של משחק שבו הקבוצה המנצחת מובילה תמיד. כמובן שהתוצאה החלקית הראשונה צריכה להיות 1:0 ולכן הצעד הראשון הנו לנקודה (1,0). מכיון שהקבוצה המנצחת מובילה תמיד, כל התוצאות החלקיות הנן מהצורה m:n כאשר m > n, כלומר כל הנקודות המתארות תוצאות חלקיות נמצאות מתחת לאלכסון m=n. יוצא מזה שהתרשים המתאר משחק חסר מתח נמצא כולו מתחת לאלכסון ואינו נוגע כלל באלכסון, מלבד הנקודה (0,0).

לכן עלינו למצוא את מספר המסלולים מ-(0,0) ל-(a,b) שאף פעם לא נוגעים באלכסון, מלבד בנקודה (0,0), כלומר את מספר המסלולים <u>שמתחילים</u> ב-(1,0), נגמרים ב-(a,b) ולעולם אינם נוגעים באלכסון.

מספר המסלולים הכללי מ-(1,0) ל-(a,b) הנו כמספר המסלולים מ-(0,0) ל-(a-1 ,b) (למה?) ולכן הנו $\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,b!}$. הבה נבחן את המסלולים ה"רעים", כלומר את אותם מסלולים שדוקא כן נוגעים באלכסון. תרשים 4 מראה מסלול טיפוסי כזה. יתכן כי מסלול כזה יגע באלכסון יותר מפעם אחת (למשל בדוגמה שלנו קיימות ארבע נקודות מגע). אותנו רק מעניינת נקודת המגע <u>הראשונה</u>. נסתכל בחלק של המסלול שקודם לנקודת המגע הראשונה עם האלכסון ונשקף אותו ביחס לאלכסון.



תרשים 4.

את החלק הנ"ל נחליף כעת בשקוף. קבלנו מסלול מסוים שמתחיל ב-(1,0). נתן להפוך תהליך זה. אם נתון מסלול כלשהו שמתחיל ב-(0,1) ומגיע ל-(a,b) אז מאחר ש- $a > b$ מסלול כזה חייב במוקדם או במאוחר לגעת באלכסון. את החלק שקדם לנגיעה הראשונה נשקף ביחס לאלכסון ונקבל מסלול "טיפוסי" שמתחיל ב-(1,0) ונוגע באלכסון.

יוצא איפוא כי מספר המסלולים מ-(1,0) ל-(a,b) שנוגעים באלכסון שוה למספר המסלולים <u>הכללי</u> מ-(0,1) ל-(a,b). המספר הנ"ל שוה למספר המסלולים מ-(0,0) ל-(a,b-1) (למה?)

ולכן הנו $\frac{(a+b-1)!}{a!(b-1)!}$. לבסוף מספר המסלולים מ-(0,0) ל- (a,b)
שאינם נוגעים באלכסון מלבד (0,0) הנו

$$\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,b!} - \frac{(a+b-1)!}{a!(b-1)!} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{(a+b)!}{a!\,b!}$$

אפשר להעלות שאלה דומה לגבי ספירת קולות בקלפי. נניח שבתמודדות בין שני מועמדים זכה הראשון ב-a קולות לעומת b קולות של היריב, כאשר $a > b$. מה היא ההסתברות שלמעשה הראשון הוביל לאורך כל תהליך הספירה, זאת אומרת שבכל שלב של הספירה היו לראשון יותר קולות מאשר לשני. קל לראות כי הבעיה זהה עם זו של משחק הכדורגל, ושם ראינו כי השכיחות היחסית של תהליכים כאלה היא בדיוק $\frac{a-b}{a+b}$ ואמנם הבעיה ידועה בספרות על תורת ההסתברות בשם "בעית הקלפי".

* * * *

פרופ' פ. ארדש (הערות אישיות).

פרופ' פ. ארדש, חתן פרס וולף למתמטיקה בשנת 1984, הוא בין המתמטיקאים המקוריים והפוריים ביותר של המאה הנוכחית. מקום שבתו הקבוע הוא במכון למתמטיקה של האקדמיה למדעים בעיר מולדתו, בודפשט. יש לו קשרים הדוקים עם ציבור המתמטיקאים של ישראל וכבר לפני כמה שנים קיבל משרה של "פרופ' אורח קבוע" בטכניון. בזמנו תרם סכום ניכר לאגודה למתמטיקה בישראל לשם קרן שממנה יוענק מדי שנה "פרס ארדש" (על שם אמו ז"ל) לחוקר צעיר בארץ.

במשך חמישים השנים האחרונות הוא פרסם מחקרים רבים וחשובים, בעיקר בתורת המספרים, תורת ההסתברות והקומבינטוריקה. את המאמר המופיע למטה הוא תרם לעתון "גליונות מתמטיקה" לפני 25 שנה, אבל מצאנו לנכון להעתיק ולהציג אותו שנית. סיבה אחת להחלטתנו זו היא העובדה שהבעיות והשיטות המופיעות בו נמצאות עד היום במקום מרכזי במחקר מתמטי וראינו בכך הזדמנות נוחה להפגיש את קוראינו עם הרעיונות האלה.

המערכת

על בעיות אחדות בגיאומטריה אלמנטרית

פ. ארדש

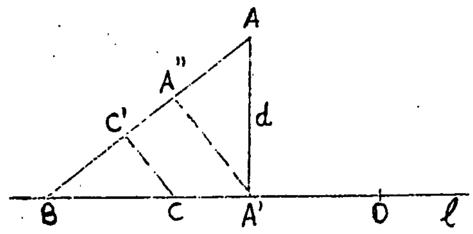
במאמר זה על גיאומטריה אלמנטרית נטפל במספר בעיות פתורות ונזכיר בעיות פתוחות אחדות. מקוה אני לשכנע את הקורא בכך כי גם בגיאומטריה אלמנטרית, מקצוע בו עוסקים זה אלפי שנים, אפשר עדיין למצוא בעיות רבות חדשות הנתנות לפתרון באמצעים פשוטים למדי.

ב-1933 כשקראתי את ספרם של Hilbert *), Cohn-Vossen "Geometry and Imagination" התעוררה אצלי הבעיה הבאה: בהנתן n נקודות במישור, לא כלן על ישר אחד, האם קיים תמיד ישר העובר דרך שתיים מהן בדיוק?

למרות שהדבר נראה פשוט ביותר לא הצלחתי להתירו. ספרתי על הבעיה למתמטיקאי ההונגרי T. Gallai שמצא פתרון נאה לבעיה.

בשנת 1936 בקונגרס המתימטי באוסלו הוזכרה בעיה זו ע"י המתמטיקאי היוגוסלבי פרופ' Karamata. הוא מצא משפט זה מנוסח ללא הוכחה בספר מכניקה ישן והתקשה להוכיחו בעצמו. ב-1943 פרסמתי שאלה זו במדור השאלות של American Math. Monthly ונתקבלו פתרונות שונים. היפה שביניהם הוא פתרונו של המתמטיקאי האמריקאי A. Kelly הנהון להלן:

נניח כי קיים סידור מישורי של n נקודות, לא כלן על ישר אחד, ובכל זאת אין אף ישר אחד העובר בדיוק דרך שתי נקודות, כלומר כל ישר העובר דרך שתי נקודות חייב להכיל גם נקודה שלישית. נתבונן באוסף הישרים המוגדרים ע"י כל n הנקודות ובמרחקים של כל אחת מהנקודות אל אחד מהישרים. בקבוצת מרחקים זו קיים בהכרח מרחק מינימלי d המתקבל למשל בין הנקודה A והישר ℓ מסוימים. (ראה ציור מס' 1) ישר ℓ הוא אחד מהישרים המחברים נקודות, לכן נמצאות עליו לפי ההנחה לפחות שלש נקודות. לא ייתכן כי שתיים מהן המצאנה מצדו האחד של עקב האנך AA' על ℓ, שכן אם B ו- C הן במצב כזה נעביר את הישר AB והאנך CC' קטן מ- $AA'=d$ בנגוד להנחתנו כי d הוא הקטן במרחקים בין נקודה לישר בקבוצת הנקודות והישרים שלנו.



ציור מס' 1

*) D. Hilbert (1862-1943) אחד המתמטיקאים הגדולים של התקופה האחרונה. עבד בעיקרו בגטינגן שבגרמניה.

באותו אופן לא יתכן כי תמצאנה שתי נקודות מצדו השני של העקב.
האפשרות הנותרה היא כי נקודה אחת תתלכד עם הנקודה A' ושתי הנקודות האחרות תמצאנה משתי צידיה. אך גם אז עדיין $A'A''<d$ בנגוד למינימליות של d.

קבלנו סתירה להנחתנו וז.א. שהישר בעל המרחק המינימלי עובר דרך שתי נקודות משני צידי העקב.

Kelly הצביע גם על מקור השאלה. ב-1893 פרסם אותה המתמטיקאי היהודי Sylvester (המיסד של עתון מתמטי אמריקאי ראשון) ב-Educational Times (שאלה 11851 כרך 59 עמ' 98) אך לא נתקבל כל פתרון, וגם לא ידוע, אם סילבסטר ידע את הפתרון. משפט זה ידוע, איפוא, בשם משפט גאלאי.

נציין שהוכחת Kelly הופיעה גם בעבודתו של Coxeter ב-American Math. Monthly (כרך 55 עמ' 26-28).

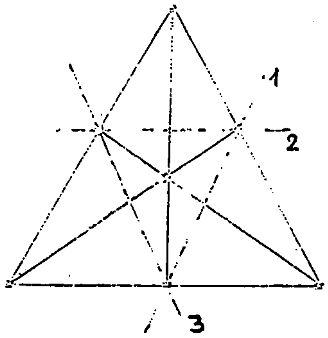
ב-1949 הכרתי את המתמטיקאי הישראלי מוצקין העובד כעת בארה"ב. התברר שהוא נתקל בשאלה זו ב-1933 והמתמטיקאי א. רובינזון (כעת פרופסור באוניברסיטה העברית) מצא פתרונה ב-1939.

בעקבות בעיה זו מתעוררות שאלות נוספות כגון: תהינה נתונות $n>2$ נקודות במישור, לא כלן על ישר אחד. ישר נקרא <u>ישר רגיל</u>, כאשר הוא עובר דרך שתי נקודות בדיוק. לפי משפט גאלאי קיים לפחות ישר רגיל אחד.
אפשר גם להאר מצב כללי ביותר בו אף שלש נקודות אינן נמצאות על ישר אחד ואז יהיה מספר הישרים הרגילים $\binom{n}{2}=\frac{n\,(n-1)}{2}$. אם תמצאנה $n-1$ נקודות על ישר אחד והאחרונה מחוצה לו קיימים בדיוק $n-1$ ישרים רגילים.

נסמן ב- $f(n)$ את המספר המינימלי של ישרים רגילים שאפשר לקבל בסידור כל שהוא של n נקודות. המתמטיקאי ההולנדי de Bruijn ואני שערנו כי $f(n)\to\infty$ כאשר $n\to\infty$. כלומר לכל A גדול כרצוננו אפשר למצא מספר n_0 כך שלכל n נקודות במישור שלא כלן נמצאות על ישר אחד ושמספרן גדול מ-n_0 (ז.א. $n>n_0$) מספר הישרים הרגילים מקיים $f(n)>A$.

המתמטיקאי האנגלי G. Dirac הראה כי $f(n)\geqslant 3$. עבור $n=3$ ו-$n=7$ מקבלים שויון: $f(n)=3$. (עבור $n=7$ השוה את הציור מס' 2 בו הקוים הרגילים צוינו במקווקו).

מוצקין הוכיח כי $f(n)>\sqrt{n}$ ובזה אימת את השערתנו. לאחרונה הצליחו Kelly ו-Moser להוכיח כי $f(n)\geqslant\frac{3}{7}n$. גם כאן מתקיים שויון עבור $n=7$.
יתכן שאפשר לשפר תוצאה זו ל-n גדולים יותר. קיימת, למשל, ההשערה כי קיים n_0 כזה שעבור כל $n>n_0$ מתקיים $f(n)=n-1$. Dirac שיער שעבור $n>7$ קיים $f(n)>\frac{n}{2}$.



ציור מס' 2

בשנת 1933 הבחנתי כי ממשפט גאלאי נובעת גם התוצאה הבאה: n נקודות במישור, שלא כלן נמצאות על ישר אחד, מגדירות לפחות n ישרים. (אין לשפר תוצאה זו כפי שאפשר לראות מן המקרה כאשר $n-1$ נקודות נמצאות על ישר אחד).

שערתי גם שקיים n_0 (גדול למדי) שכל n נקודות במישור עם $n > n_0$ ומסודרות כך שאף $n-1$ מהן אינן על ישר אחד, מגדירות לפחות $2n-4$ ישרים.

עבור $n=7$ אין עדיין ההשערה נכונה כיון שבציור מס' 2 אפשר לספור רק 9 ישרים בשעה ש- $2n-4=10$ במקרה זה.

Kelly ו- Moser הוכיחו בעבודתם המוזכרת (ראה בסוף המאמר רשימה הספרות) את המשפט הכללי הבא:

נניח ש- n נקודות במישור מסודרות כך, שאין יותר מ- $n-k$ מהן נמצאות על ישר אחד וש-

$$n \geqslant \tfrac{1}{2}\left[3\ (3k-2)^2 + 3\ k - 1\right] \qquad (1)$$

אזי מספר הישרים שהן מגדירות הוא לפחות

$$k\ n - \tfrac{1}{2}\ (3\ k + 2)\ (k - 1) \qquad (2)$$

בטוי זה הוא ההערכה הטובה ביותר כפי שאפשר להיוכח בעזרת הדוגמה הכללית הבאה שנתנה ע"י המחברים:

תסודרנה k נקודות במישור כך שאין שלש מהן על ישר אחד. נסמן ב- ℓ ישר רצוני שאינו עובר דרך אף אחת מהן. נעביר את כל הישרים המחברים את k הנקודות ונגדיר $\binom{k}{2}$ נקודות נוספות כנקודות החיתוך של $\binom{k}{2}$ ישרים אלה עם הישר ℓ. אליהן נצרף עוד $n - k - \binom{k}{2}$ נקודות רצוניות על ℓ. בסך הכל יש לנו n נקודות, מהן לכל היותר $n-k$ נמצאות על ישר אחד (במקרה שלנו על ℓ). n הנקודות מגדירות

$$1 + k\ (n - k) - \binom{k}{2} = kn - \tfrac{1}{2}\ (\ 3k + 2)\ (k - 1)$$

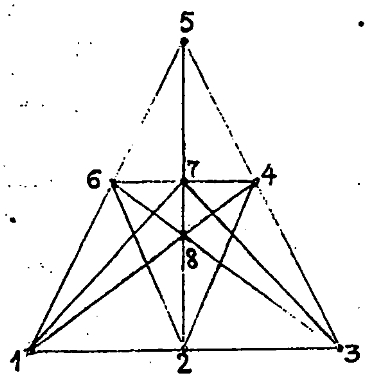
ישרים.

אם נציב $k=2$ נקבל כי עבור $n \geqslant \frac{1}{2}\left[3\ (6 - 2)^2 + 3.2 - 1\right] = 26\frac{1}{2}$

מספר הישרים הוא לפחות $2n - \frac{1}{2}(3.2 + 2)(2 - 1) = 2n - 4$
ז.א. השערתי מתקימת עבור $n \geqslant 27$.

יתר על כן Kelly ו- Moser הוכיחו כי השערתי נכונה גם עבור $n = 10$ והם סבורים כי היא מתקיימת גם עבור $11 \leqslant n \leqslant 26$.

במקרים $n=7$, 8, 9 מקבלים לפחות $2n-5$ ישרים. זו גם התוצאה הטובה ביותר כפי שאפשר לראות עבור $n=7$ מציור מס' 2 עבור $n=8$ מציור מס' 3 ועבור $n=9$ מציור מס' 4.

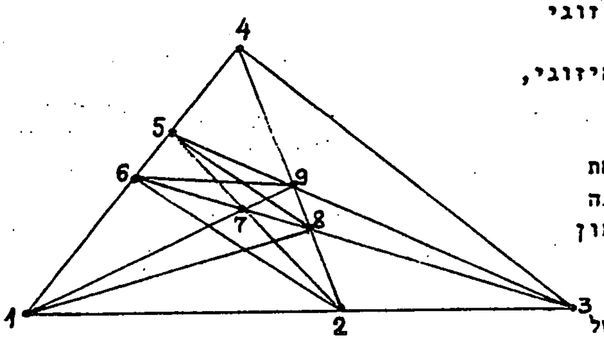


ציור מס' 3

התוצאות של Kelly ו- Moser עדיין אינן ממצות את מכלול הבעיות הקשורות לנושא זה.

מועלית למשל ההשערה הבאה: קיים מספר קבוע C שאינו תלוי ב-n וב-k, כך ש=n נקודות במישור, שלכל היותר $n-k$ מהן נמצאות על ישר אחד, מגדירות לפחות Cnk ישרים. (נראה שהשערה זו נכונה עבור $C = \frac{1}{10}$).

או השערתו של Dirac: בהינתן n נקודות במישור, לא כלן על ישר אחד, קיימת ביניהן נקודה אחת שממנה נמתחים אל שאר הנקודות לפחות $\frac{n}{2}$ עבור n זוגי ו- $\frac{n-1}{2}$ עבור n איזוגי, ישרים שונים.



ציור מס' 4

נזכיר עוד את הבעיה הבאה שהוצגה ע"י סילבסטר: נתון סידור מישורי של n נקודות. מהו המספר המקסימלי של ישרים העוברים בדיוק דרך 3 נקודות. סילבסטר הוכיח למשל שעבור $n=9$ יתכנו לכל היותר 10 ישרים.

ננסה עתה להכליל בעיות גיאומטריות - מישוריות אלה לבעיות קומבינטוריות.

ינתנו n אלמנטים $a_1, a_2, \dots, a_n$ ו- m קבוצות חלקיות A_1, $A_2, \dots, A_m$ המורכבות מהם כך שכל אחת מכילה לפחות שני אלמנטים. נתנה שכל זוג אלמנטים a_i, a_j מופיע ב- A_k אחד ובאחד בלבד.

כדוגמה למערכת כזו ישמשו הנקודות במישור והישרים המחברים אותן בהם דנו בבעיות הקודמות.

אך קיימות מערכות מסוג זה שאינן נתנות לממוש ע"י נקודות וישרים במישור, למשל, עבור $n=m=7$, מקבלים את המערכת

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_5 & a_6 \\ a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_4 & a_6 \\ a_2 & a_5 & a_7 \\ a_3 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_6 & a_7 \end{matrix}$$

מערכת זו המקיימת את הדרישות הנ"ל אינה ניתנת למימוש במישור כי אין פה אף ישר רגיל בנגוד למשפט גאלאי.

כאן קיים המשפט הבא:

אם $m>1$, הרי $n \geqslant m$.

אם נמשיך לכנות אלמנטים מוכללים אלה בשם נקודות וקבוצות חלקיות שלהם בשם קוים, נוכל לנסח את המשפט בצורה הבאה:

בסידור בו אין כל הנקודות על קו אחד מספר הקוים אינו קטן ממספר הנקודות.

זוהי הרחבה מהחית של המשפט המישורי הטוען כי n נקודות שאינן על ישר אחד מגדירות לפחות n ישרים.

משפט זה הוכח לראשונה ב-1938 ע"י המתמטיקאי ח. חנני (בעת פרופסור בטכניון) ובאופן בלתי תלוי ב-1941 ע"י המתמטיקאי היהודי מהונגריה Szekeres.

ההוכחה הפשוטה ביותר של עובדה זו שייכת ל- de Bruijn והיא תובא להלן:

כל שתי נקודות a_{i_1} ו- a_{i_2} מגדירות קו יחיד A_i שהוא הקבוצה המכילה אותן, (קיימת רק אחת כזו).

ב-k_i נסמן את מספר הקוים העוברים דרך a_i וב s_j את מספר הנקודות הנמצאות על A_j. ברור כי $1 < k_i < n$ וכן $1 < s_j < n$ (לא כל הנקודות הן על קו אחד ועל כל קו יש לפחות שתי נקודות).

לא קשה להוכיח כי

$$\sum_{j=1}^{n} s_j = \sum_{i=1}^{n} k_i \tag{3}$$

(זה אפשר להראות בעזרת אינדוקציה לפי מספר הנקודות או ע"י חשוב ישיר).

אם אין הקו A_j עובר דרך הנקודה a_i חייב להתקיים

$$s_j \leqslant k_i \tag{4}$$

כיון שאת הנקודה a_i אפשר לקשר לפחות ב s_j קוים שונים אל הנקודות שעל הישר s_j.

ללא אבדן כלליות אפשר להניח ש-

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} k_i = k_n = p \tag{5}$$

ושהקוים $A_1, A_2, \dots, A_p$ עוברים כלם דרך a_n.

ברור כי $k_n > 1$ (לא כל הנקודות הן על קו אחד).

על כל קו כזה A_j $1 \leqslant j \leqslant p$ יש נקודה נוספת פרט ל-a_n ונסמנה ב- a_j. כיון שהקוים שונים לא תמצא a_j על A_k $j \neq k$ ולכן לפי (4):

$$s_2 \leqslant k_1, \quad s_3 \leqslant k_2, \dots, \quad s_p \leqslant k_{p-1}, \quad s_1 \leqslant k_p \tag{6}$$

ולכל $j > p$ אין A_j עובר דרך a_n ובודאי

$$s_j \leqslant k_n \tag{7}$$

נניח, כי המשפט אינו נכון, כלומר $n > m$. נצרף יחד את (6) ו-(7) ונקבל:

$$\sum_{j=1}^{m} s_j \leqslant k_1 + \dots + k_p + (m-p)k_n < k_1 + \dots + k_p + (n-1)k_n \tag{8}$$

וכיון ש-k_n היה המינימלי בין ה-k-ים הרי

$$\sum_{j=1}^{m} s_j < \sum_{i=1}^{n} k_i \tag{9}$$

בנגוד לשויון (3). סתירה זו מוכיחה את משפט חנני.

עבור n נקודות במישור שלא כלן על מעגל אחד, הוכיח מוצקין בעזרת שמוש במשפט גאלאי ושמוש באינורסיה *), שקיים מעגל העובר בדיוק דרך 3 נקודות מהן.

להלן הוכחתו:

תהיינה $p_1 , p_2 , \dots , p_n$ הנקודות. נקבע את p_1 כמרכז אינורסיה המעבירה את הנקודות $p_2, \dots , p_n$ לנקודות $q_2, \dots , q_n$. באינורסיה מכל מעגל העובר דרך המרכז (ז.א. דרך p_1 במקרה שלנו) מתקבל ישר. כיון שבתחילה לא היו כל $p_1, \dots , p_n$ נקודות מונחות על מעגל אחד לא ההיינה $q_2, \dots , q_n$ על ישר אחד. לפי משפט גאלאי קובעות נקודות אלה לפחות ישר אחד העובר בדיוק דרך 2 נקודות, נגיד דרך q_i , q_j. מזה נובע ש- p_1, p_j נמצאות על מעגל, שהוא מקור הישר העובר את q_i , q_j , ועובר דרך מרכז האינורסיה ז.א. דרך p_1. בזה הוכח שישנו מעגל העובר דרך שלש נקודות בדיוק (p_1, p_i, p_j).

השאלה הבאה שהוצגה כבר לפני זמן רב ועדיין לא מצאה את פתרונה נראית לא קלה:

תנחנה n נקודות במישור, לא כלן על מעגל אחד. נתבונן באוסף כל המעגלים העוברים דרך 3 נקודות לפחות. האם נכונה ההשערה כי נקודות אלה מגדירות לפחות $1+\binom{n-1}{2}$ מעגלים שונים.

כאשר $n-1$ נקודות נמצאות על מעגל אחד נותנת השערה זו את המספר המדויק.

הכללה קומבינטורית של בעיה זו נתנת לנסוח הבא:

יהיו $a_1, a_2, \dots , a_n$ אלמנטים (שיכונו נקודות) ו- $A_1, \dots , A_n$ קבוצות חלקיות שלהם (שתכוננה מעגלים), המכילות כל אחת לפחות 3 אלמנטים, וכל שלישית נקודות נמצאת בדיוק על מעגל אחד.

השאלה היא מהו הערך המינימלי של m (מספר המעגלים המוגדרים ע"י n הנקודות).

במקרה של זוגות היו הפתרון הגיאומטרי והקומבינטורי זהים ונתנו $m_{min} = n$. במקרה זה נראה אבל שהערך המתקבל בפתרון הגיאומטרי קטן מזה של הפתרון הקומבינטורי.

חנני הוכיח כפתרון לבעיה הקומבינטורית כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_o כך שלכל n, $n > n_o$ מקיים ה-m המינימלי את אי השויון

*) על אינורסיה ראה "גליונות מתמטיקה" מס' 1 עמ' 13.

$$(9) \quad m_{min} > (1-\varepsilon)\, n^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{3}{4}}$$

הוכחתו עדיין לא פורסמה ולהלן נביא אותה:

ללא אבדן כלליות אפשר להניח כי A_1 מכיל k אלמנטים מתוך ה-n ואף A_i אינו מכיל יותר אלמנטים.

ברור שלכל היותר קיימות $\binom{n}{3}$ קבוצות חלקיות שונות.

אם ניחס לכל מעגל k נקודות ונספור את מספר הקבוצות החלקיות בנות שלשה אלמנטים על כל אחד מן המעגלים לחוד, הרי ספרנו כל שלישיה אפשרית שכן כל שלישיה נמצאת על מעגל מסוים.

יתכן והפרזנו בכך שספרנו k נקודות על כל מעגל, על כל פנים:

$$(10) \quad m\binom{k}{3} \geq \binom{n}{3}$$

או

$$m \geq \frac{\binom{n}{3}}{\binom{k}{3}} > \frac{n^3}{k^3}$$

(כי עבור $n>k$ קיים $\left(\frac{n}{k} < \frac{n-1}{k-1} < \frac{n-2}{k-2}\right)$

יהיו $a_1, a_2, \dots, a_k$ האלמנטים של A_1 ו- $e_1, e_2, \dots, e_{\binom{k}{2}}$ $\binom{k}{2}$ הזוגות שאפשר ליצור מ- k אלמנטים אלה. נתבונן בשלישיות (e_i, a_j) כאשר $k+1 \leq j \leq n$, כלומר a_j אינו ב- A_1.

כל שלישיה כזו מופיעה ב-A_h $(h>1)$ אחד אך A_h כזה אינו מכיל יותר מ- $k-2$ שלישיות כאלה כי אין בו יותר מ- k אלמנטים, מהם נמצאים כבר שניים ב- A_1.

קיימות, איפוא, לפחות $\left\{\frac{n-k}{k-2}\right\}$ (המספר השלם הראשון שאינו קטן מ-$\frac{n-k}{k-2}$) קבוצות A_j המכילות e_i נתון.

שני e_i שונים אינם יכולים להופיע ב-A_h אחד (פרט ל- A_1), כי אחרת היו לאותו A_h ול- A_1 שלשה אלמנטים משותפים. לכן מספר ה-A_h $(h\neq 1)$ השונים הוא לפחות $\binom{k}{2}\left\{\frac{n-k}{k-2}\right\}$ ומכאן נובע

$$(11) \quad m \geq 1+\binom{k}{2}\left\{\frac{n-k}{k-2}\right\} \geq 1+\binom{k}{2}\frac{n-k}{k-2} > \frac{k(n-k)}{2}$$

או לפי הערכת אחרת:

$$(12)\qquad m \geq 1+\binom{k}{2}\left\{\frac{n-k}{k-2}\right\} \geq 1+\binom{k}{2}$$

מ-(10), (11) ו-(12) נובעת התוצאה (9) למקרים שונים של k.

כאשר $k \leq 2^{\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{2}}$ מתקבל מ-(10):

$$m > \frac{n^3}{k^3} \geq \frac{n^3}{2^{\frac{3}{4}} n^{\frac{3}{2}}} = n^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{3}{4}}$$

אם $2^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{2}} < k < \frac{n}{2}$ מתקבל מ-(11).

$$m > \frac{k(n-k)}{2} > \frac{2^{\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{2}} (n-2^{\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{2}})}{2} = \frac{n^{3/2}}{2^{3/4}} - \frac{n}{2^{1/2}} > (1-\varepsilon)\frac{n^{3/2}}{2^{3/4}}$$

ניצלנו כאן את העובדה כי בתחום זה $k(n-k)$ עולה מונוטונית.-
אי השויון האחרון נכון החל מ- $n=n_0$ מסוים.

בתחום $k \geq \frac{n}{2}$ נשתמש ב-(12):

$$m > \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2} = \frac{n^2}{8} - \frac{n}{4} > (1-\varepsilon)\frac{n^{3/2}}{2^{3/4}}$$

אין השויון האחרון מתקיים החל מ- $n=n_0$ מסוים.

בסך הכל (9) הוכח בכל המקרים.

חנני הוכיח עוד כי עבור $n=u^2+1$, כאשר u היא חזקה של מספר ראשוני מתקיים

$$(13)\qquad m \leq u(u^2+1)$$

והוא משער שבמקרה זה מתקיים שויון ממש $m = u(u^2+1)$. מ-(9) ו-(13) אפשר להוכיח בעזרת תורת המספרים האנליטית כי סדר הגודל של m במקרה של הבעיה הקומבינטורית שוה ל- $n^{3/2}$. כלומר, לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כזה שעבור n -ים גדולים ממנו $(n > n_0)$ מתקיים:

$$(14)\qquad (1-\varepsilon)\, 2^{-\frac{3}{4}} n^{\frac{3}{2}} < m < (1+\varepsilon)\, 2^{-\frac{3}{4}} n^{\frac{3}{2}}$$

חלקו השמאלי של (14) הוכח לעיל, בחלקו הימני איננו יכולים לעסוק כאן. נעיר רק שהוא נובע מהמשפט הידוע שמנה שני מספרים ראשוניים עוקבים שואפת ל-1.

שאלה זו נתנת להכללה גם לקבוצות חלקיות בנות ℓ אברים לפחות ($\ell > 3$), אבל לא נעסוק בזה במאמר זה.

ספרות:

1. Th. Motzkin, The lines and planes connecting the points of a finite set.
Trans. of the Amer. Math. Soc. Vol. 70 (1951) pp. 451-464

מוצקין עשה גם הכללות של משפט גאלאי עבור מרחבים רב מימדיים.

2. L.M. Kelly and W.V.J. Moser, On the number of ordinary lines determined by n points,
Canadian Jour. of Math.
Vol. 10 (1958) pp. 210-219

תיקון טעויות

במאמר " על אודות בעיה מפתיעה" מאת ד. רימר בגליון מס' 4 נפלו כמה טעויות דפוס מצערות. אנחנו מתנצלים על המקרה ומציגים למטה רשימה של תיקונים.

עמ'	שורה	במקום	יש לקרוא
11	8 מלמטה	a_q	a_s
12	9 מלמעלה	x	m
13	5 מלמעלה	=r	=rk
14	13,9 מלמעלה	N 0	$N \cup \{0\}$
14	2 מלמטה	q 2	4·2
15	2 מלמעלה	(1,p)	A(1,p)
13	17,16,13,4,2		להכניס קוי השברים
13	שתי השורות האחרונות הוחלפו ביניהן		
15	השורות 7,6 צריכות להיות:		

B(1,8) = 1,012,658,227,848. בלי ה-0 שבתחילת המספר A(1,8)

נקבל B(1,8) = 112,658,227,848

אבל 8·A(1,8) = 1,012,618,227,848 בעוד

$112,658,227,848 \neq 8 \cdot A(1,8)$

האולימפיאדה לנוער במתמטיקה תשמ"ו

(בשיתוף עם בנק הפועלים בע"מ)

תחרות זו התקיימה במכון וייצמן למדע ביום ה', 13 בפברואר 1986, בהשתתפותם של כ- 90 תלמידים. התוצאות היו דלקמן:

פרס ראשון	שוני דר,	תיכון עירוני ד', תל אביב
פרס שני	גדי קוזמא,	תיכון עירוני ד', תל אביב
ציונים לשבח:	פאול בירן,	גימנסיה ריאלית, חיפה
	אלי מוהליבר,	גימנסיה ריאלית, חיפה
	רז נאות,	בי"ס "אורט", קרית ביאליק
	יהודה שלם,	ביה"ס התיכון שליד האוניבר-סיטה העברית, ירושלים.

הפרסים והתעודות חולקו בטקס, שהתקיים במכון וייצמן למדע ביום ג', 20 במאי 1986, בנוכחות פרופ. א. דבורצקי, נשיא המכון ונציגי בנק הפועלים.

* * * *

לצערנו נאלצנו, בגלל חוסר מקום, לדחות את פרסום הפתרונות של הבעיות אשר הוגשו בתחרות הנ"ל. הפתרונות יופיעו בגליון הבא ועם קוראינו הסליחה.

פרופסור אלישע נתניהו ז"ל

פרופ' אלישע נתניהו, מבכירי המתמטיקאים בארץ נפטר ב 3.4.1986.

פרופ' נתניהו נולד בפולין ב 1912 ועלה ארצה בגיל 8. למד מתמטיקה באוניברסיטה העברית בירושלים בה קבל גם את תאר הדוקטור. עד מלחמת העולם השניה למד בבית הספר הריאלי העברי בחיפה, שעל בוגריו נמנה. במלחמה שרת בצבא הבריטי ואחריה הצטרף לסגל הטכניון. בטכניון עמד בראש הפקולטה למדעים ובמסגרתה פתח את המחלקה למתמטיקה שהפכה מאוחר יותר לפקולטה למתמטיקה שגם בראשה עמד.

פרופ' נתניהו נמנה על גדולי המומחים בעולם בתורת הפונקציות הפשוטות והעמיד תלמידים ותלמידי תלמידים הממשיכים בדרכו. פרופ' נתניהו הצטין כמורה מלהיב ואהוב גם בבית הספר הריאלי וגם בטכניון.

יהי זכרו ברוך.

* * *

את עבודתו המדעית הראשונה כתב פרופ' נתניהו כשהיה סטודנט, כבן 18, בשנה הראשונה באוניברסיטה העברית. המאמר פורסם ב

Journal für die reine und angewandte Mathematik

אחד העתונים היוקרתיים באותה תקופה ועוסק בהשערת פרמה.

השערת פרמה (1637) היא כידוע שאין מספרים טבעיים x,y,z ו $n>2$ כך ש $x^n + y^n = z^n$.

השערה זו היא עדין אחד האגוזים הלא מפוצחים המפורסמים במתמטיקה.

במאמרו של פרופ' נתניהו מוכחות תוצאות הקשורות להשערה והדבר נעשה בשיטות אלמנטריות אותן נתן להציג לקוראי "אתגר-גליונות מתמטיקה". בגלל יופין של ההוכחות בחרנו להביא בזה אחת מהן.

משפט יהיו $x<y<z$ ו $n>2$ מספרים טבעיים, כש x ו y זרים.

אם
$$x^n + y^n = z^n$$
אז z איננו חזקה של מספר ראשוני.

הוכחה נניח ש $z = p^k$ כש p ראשוני.

א. נראה שלא ייתכן ש n הוא ראשוני. נניח שכן.

כיון ש $n>2$ הוא אי־זוגי ולכן

$$x + y \mid x^n + y^n .$$

$$\frac{x^n + y^n}{(x + y)^2} = \frac{\frac{1}{2}x^{n-2}\,2x^2 + \frac{1}{2}y^{n-2}\,2y^2}{2x^2 + 2y^2 - (x - y)^2} > \frac{2x^2 + 2y^2}{2x^2 + 2y^2 - (x - y)^2} > 1$$

(אי השויון הראשון נובע מכך ש $x>1$, אי שויון המתקבל מכך ש $z^n - y^n > 1$).

לכן
$$\frac{x^n + y^n}{x + y} > x + y$$

כיון שהמונה באגף שמאל הוא חזקה של p אז גם המנה וגם המכנה הם חזקות של p

$$x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + y^{n-1} = p^s ,$$
$$x + y = p^t ,$$
$$s > t .$$

לכן
$$x + y \mid x^{n-1} + \dots + y^{n-1} .$$

מהקונגרואנציה
$$x^{n-1} + \dots + y^{n-1} \equiv n\,y^{n-1} \pmod{x + y}$$

נובע ש
$$x + y \mid n\,y^{n-1}$$

אבל
$$(x + y\,,\; y) = 1$$

ולכן

$$x + y \mid n$$

אבל אם n ראשוני אז

$$x + y = n$$

כי $x + y > 1$.

מכאן

$$t = 1 \, , \; p = x + y$$

ואז

$$(x + y)^n > x^n + y^n = z^n \geq p^n$$

סתירה.

ב. נראה שגם לא ייתכן ש n פריק.

אפשר להניח ש $n \neq 2^k$ כי אחרת היה

$$(x^{n/4})^4 + (y^{n/4})^4 = (z^{n/4})^4$$

אבל ידוע שהשערת פרמה נכונה עבור $n = 4$.

לכן אם n פריק, אחד הגורמים הראשוניים שלו גדול מ 2, כלומר $n = pm$ כש m טבעי ו p מספר ראשוני גדול מ 2. לכן

$$(x^m)^p + (y^m)^p = (z^m)^p$$

לפי חלק (א) של ההוכחה, z^m איננו חזקה של מספר ראשוני, לכן גם z איננו כזה.

אתגר בעל פה

מפגש עם קוראי "אתגר-גלירנות מתמטיקה" התקיים בפקולטה למתמטיקה בטכניון בשושן פורים, 26.3.86.

פרופ' משה מרכוס, דיקן הפקולטה, שוחח עם המשתתפים על עיסוקים שונים של מתמטיקאים במחקר באקדמיה ובתעשיות עתירות ידע. מרצים של הפקולטה תארו בעיות מתמטיות בשלושה תחומים שונים. ד"ר רון אהרוני הראה, כיצד משתמשים בנוסחת אוילר, כדי להוכיח משפטים על צביעה של מפות. פרופ' נדב לירון תאר מודל מתמטי ללימוד התופעה של גל נוסע של בקטריות. הוא הסביר כיצד החקירה המתמטית של המשואות המתקבלות במודל האירה את עיני הביולוגים שהציגו את הבעיה. פרופ' אורי סרברו דבר על עטיפת כדור במידה מירבית של אחידות והסביר את הקשר לתורה של פונקציות של משתנים מרוכבים.

במסגרת המפגש הוענק הספר Mathematical Gems I מאת Ross Hansberger כפרס לפאול בירן מבית הספר הריאלי בחיפה על הצטיינות בתחרות הבעיות.

פעילויות נוספות בפגישה כללו שאלות למשתתפים שהוצגו על ידי מר ר. גרשוביץ, הפסקת אזני המן ושני סרטונים מתמטיים משעשעים על טופולוגיה ועל מטריצות.

<u>פתרון הבעיות מגליון מס' 3:</u>

13. יהיו a,b,n מספרים טבעיים כך ש-

$$(2+\sqrt{3})^n = a+b\sqrt{3}.$$

הוכח כי a,b הם זרים.

<u>פתרון</u>: ברור שיתקיים גם

$$(2-\sqrt{3})^n = a-b\sqrt{3} \quad (\text{?למה})$$

ולכן

$$a^2-3b^2 = (2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n$$
$$= 1$$

והמסקנה מידית.

14. הוכח כי המספר $2222^{5555} + 5555^{2222}$ מתחלק ב-7.

<u>פתרון</u>: נסתמך על כך ש- (a^n-b^n) מתחלק ב- $(a-b)$

עבור n טבעי ואילו (a^n+b^n) מתחלק ב- $(a+b)$

עבור n חיובי אי-זוגי, נכתוב

$$2222^{5555} + 5555^{2222}$$
$$= (2222^{5555} + 4^{5555}) + (5555^{2222} - 4^{2222})$$
$$- (4^{5555} - 4^{2222})$$

$$= A + B + C .$$

מהאמור לעיל נובע כי A מתחלק ב- $(4 + 2222)$ שהוא $7\text{x}318$;
B מתחלק ב- $(5555 - 4)$ שהוא $7\text{x}793$ ואילו

$$C = 4^{2222}(4^{3333}-1)$$

וזה מתחלק ב- (4^3-1) שהוא $7\text{x}9$.

15. נתון מלבן המחולק למלבנים קטנים כך שבכל מלבן קטן ארכה של לפחות אחת מהצלעות הוא מספר שלם. הוכח שגם במלבן הגדול, ארכה של לפחות אחת הצלעות הוא מספר שלם.

<u>פתרון</u>: (הוצע ע"י ד. ברנה ופ. בירן).

<u>טענת עזר</u>

יהיה k מספר חיובי כלשהו. תנאי מספיק והכרחי ש- k יהיה מספר שלם הוא שעבור כל a ממשי

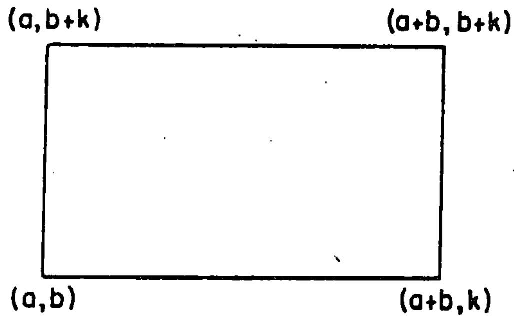
$$\int_a^{a+k} \cos 2\pi u\,du = \int_a^{a+k} \sin 2\pi u\,du = 0 .$$

(נשאיר לקורא להוכיח את הטענה הזאת!)

עכשיו נכתוב

$$f_1(x) = \cos 2\pi x \quad , \quad f_2(x) = \sin 2\pi x$$

נניח כי אחד מהמלבנים הקטנים קדקדיו הם הנקודות (a,b), $(a+h,b)$, $(a+h,b+k)$ ו- $(a,b+k)$.



האינטגרל הכפול של $f_i(x)f_j(y)$ $(i=1,2;\ j=1,2)$ על המלבן הזה הוא

$$\int_{x=a}^{a+h}\int_{y=b}^{b+k} f_i(x)f_j(y)\,dxdy$$

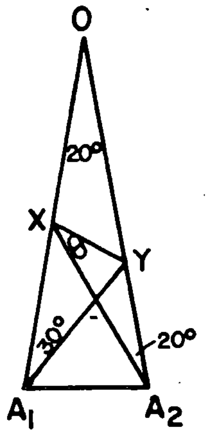
$$= \int_a^{a+k} f_i(x)\,dx \int_b^{b+k} f_i(y)\,dy$$

$$= 0$$

מאחר שלפחות אחד משני הגורמים הוא 0 לפי טענת העזר. אם נחבר את האינטגרלים האלה על כל המלבנים הקטנים נראה כי גם האינטגרלים על המלבן הגדול הם כלם 0 והמסקנה מידית.

<u>16</u>. יהיה OA_1A_2 משולש שוה שוקים, X נקודה על הצלע OA_1 ו- Y על הצלע OA_2. נתון כי

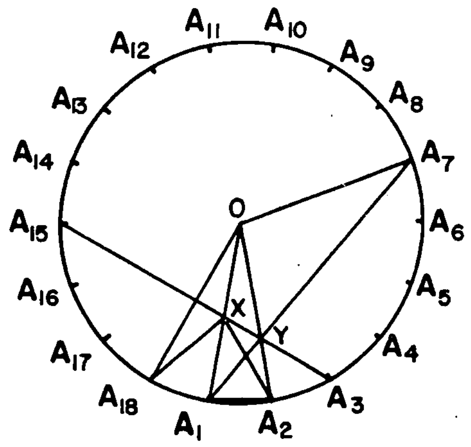
$\sphericalangle A_1OB_2=20^0$, $\sphericalangle A_1A_2X=60^0$, $\sphericalangle B_2A_1Y=50^0$ (ראה ציור).



חשב את הזוית $\sphericalangle B_2XY$.

פתרון:

הפתרונות שנתקבלו הסתמכו בעיקר על שיקולים טריגונומטריים. הפתרון הבא (של S.T. Thompson) אינו משתמש בטריגונומטריה והוא מופיע בספר Mathemetical Gems II מאת Ross Honsberger, (ראה ציור).



במעגל C אשר מרכזו O ורדיוס OA_1, A_1A_2 הוא מיתר המונח על קשת של 20^0 ולכן הוא צלע של "18-גון" משוכלל החסום ב-C. נסמן את 18-גון זה ב- $A_1A_2,\ldots,A_{18}$. המיתר A_3A_{15} חותך את המשולש OA_1A_2 בדיוק בנקודות X,Y. הישרים OA_{18}, A_3A_{15} מאונכים ולכן

$$\measuredangle A_1XY = 90^0 - \measuredangle A_1OA_{18}$$

$$= 70^0$$

מאידך

$$\measuredangle A_1XA_2 = 180^0 - \measuredangle OA_1A_2 - \measuredangle A_1A_2X$$

$$= 180^0 - 80^0 - 60^0$$

$$= 40^0$$

ולכן

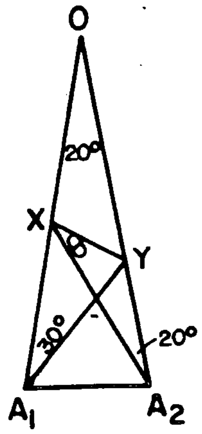
$$\measuredangle A_2XY = 70^0 - 40^0$$

$$= 30^0$$

מאחר שלפחות אחד משני הגורמים הוא 0 לפי טענת העזר. אם נחבר את האינטגרלים האלה על כל המלבנים הקטנים נראה כי גם האינטגרלים על המלבן הגדול הם כלם 0 והמסקנה מידית.

16. יהיה OA_1A_2 משולש שוה שוקים, X נקודה על הצלע OA_1 ו- Y על הצלע OA_2. נתון כי

$\sphericalangle A_1OB_2=20^0$, $\sphericalangle A_1A_2X=60^0$, $\sphericalangle B_2A_1Y=50^0$ (ראה ציור).

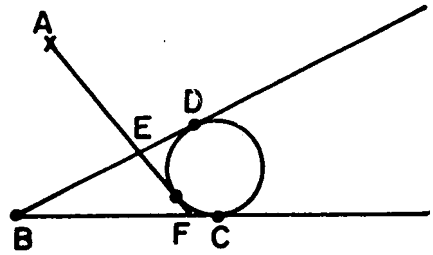


חשב את הזוית $\sphericalangle B_2XY$.

פתרון:

הפתרונות שנתקבלו הסתמכו בעיקר על שיקולים טריגונומטריים. הפתרון הבא (של S.T. Thompson) איננו משתמש בטריגונומטריה והוא מופיע בספר Mathemetical Gems II מאת Ross Honsberger. (ראה ציור).

17. נתונים זוית, נקודה A מחוץ לזוית וקטע באורך p. העבר (בעזרת סרגל ומחוגה) ישר דרך A שיחתוך מהזוית משולש שהיקפו p.



<u>פתרון</u>. יהיה B קדקד הזוית ו- C,D נקודות על שוקיה כך ש- $BC = BD = \frac{p}{2}$.
נבנה מעגל המשיק לשוקי הזוית בנקודות D,C ומשיק מ-A למעגל זה. אם נבחר במשיק הקרוב יותר ל-B זה יחתוך את BC,BD ב- E,F בהתאמה ויתן את המשולש המבוקש (למה?).

18. נתונות n נקודות במישור, לא כולן על אותו ישר, הוכח שיש ישר שעובר דרך <u>בדיוק שתים</u> מהנקודות.

<u>פתרון</u>. נסתכל בכל הישרים שניתן לבנות ע"י חיבור זוגות מבין n הנקודות. אילו היו על כל אחד מהישרים האלה נקודות נוספות מהקבוצה הנתונה, הרי אז היה נובע שכל n הנקודות נמצאות על ישר אחד (ראה המאמר של ארדש בע' 10 בחוברת זו).

* * * *

פתרונות ל"בעיות חדשות", ראה ע' 31 - 30, יש לכתוב בכתב יד ברור ונקי ובצדו האחד של הדף, ולשלוח עד יום 31.7.86 לפי הכתבת:
מערכת "אתגר-גליונות מתמטיקה"
היחידה לפעולות נוער
מכון וייצמן למדע, רחובות 76100.

נא לציין את שם הפותר, שם בית הספר (אם הפותר תלמיד והכיתה בה הוא לומד. שמות הפותרים נכונה יפורסמו ויוגרל ביניהם פרס.

בעיות חדשות

25. מצא את כל הפתרונות הממשיים של המשואה

$$\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x+y+z) .$$

26. חשב את הסכום

$$\sum_{r=1}^{n} r \cos [\alpha+(r-1)\beta]$$

27. חשב את הסכום

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{2^{2n-r}} \binom{2n-r}{n}$$

28. נתונים מספר טבעי n ומספרים ממשים $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ המקיימים

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \ldots\ldots \leqslant x_n .$$

אם $s = \sum_{r=1}^{n} x_r$, הוכח כי

$$(s-x_1)^{x_1}(s-x_2)^{x_2} \ldots (s-x_n)^{x_n} \leqslant \left[\frac{s(n-1)}{n}\right]^s$$

29. הוכח כי עבור זוויות α,β,γ כלשהן קיים

$$\sin^3\alpha \sin^3(\beta-\gamma)+\sin^3\beta \sin^3(\gamma-\alpha)+\sin^3\gamma \sin^3(\alpha-\beta)$$
$$= 3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)$$

30. אורכי הצלעות BC,CA,AB של המשולש ABC הם a,b,c בהתאמה.
C_1,C_2,C_3 הם מעגלים על הקוטרים BC,CA,AB בהתאמה ו- D הוא
הקוטר של מעגל המשיק ל- C_1,C_2,C_3 כך שאלה נמצאים בפנים לו.
אם $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$, הוכח כי

$$\sqrt{\frac{p}{D-p}} = \sqrt{\frac{D}{p-a}-1} + \sqrt{\frac{D}{p-b}-1}+\sqrt{\frac{D}{p-c}-1}$$

31. נתון משולש ABC, אשר אורכי צלעותיו הם a,b,c ושטחו S, ובונים משולש שווה צלעות אשר שלושת קדקדיו נמצאים על שלוש צלעות ABC.
אם x הוא אורכה של כל צלע במשולש שווה הצלעות הוכח כי

$$x \geqslant 2\sqrt{2}\, S(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\, S)^{-\frac{1}{2}}$$

32. במישור נתונים ארבעה ישרים l_1,l_2,l_3,l_4. הראה איך לבנות ישר l במישור כך ששלושת הקטעים שיוקצו עליו ע"י פגישותיו עם l_1,l_2,l_3,l_4 יהיו ביחסים נתונים.

33. n הוא מספר טבעי נתון ואנחנו מגדירים:

$$x_1 = n, \quad y_1 = 1 \qquad \text{(i)}$$

(ii) עבור כל $i \geqslant 0$

$$x_{i+1} = \left[\frac{x_i+y_i}{2}\right], \quad y_{i+1} = \left[\frac{n}{x_i}\right]$$

כאשר, לכל x, $[x]$ מציין כרגיל את המספר השלם הגדול ביותר שאינו גדול מ-x. הוכח כי עבור $i = 1,2,\ldots,n$ קיים $[n] \geqslant x_i$ וכי יש לפחות ערך אחד של i בתחום זה אשר $x_i = [\sqrt{n}]$.

34. M היא נקודה כלשהי על האלכסון AC של מרובע קמור ABCD. P,Q הן נקודות על הצלעות BC,AD בהתאמה כך ש- MP מקביל ל-AB ו- MQ ל- CD. הוכח כי

$$MP^2 + MQ^2 \geqslant \frac{AB^2 \cdot CD^2}{AB^2+CD^2}$$