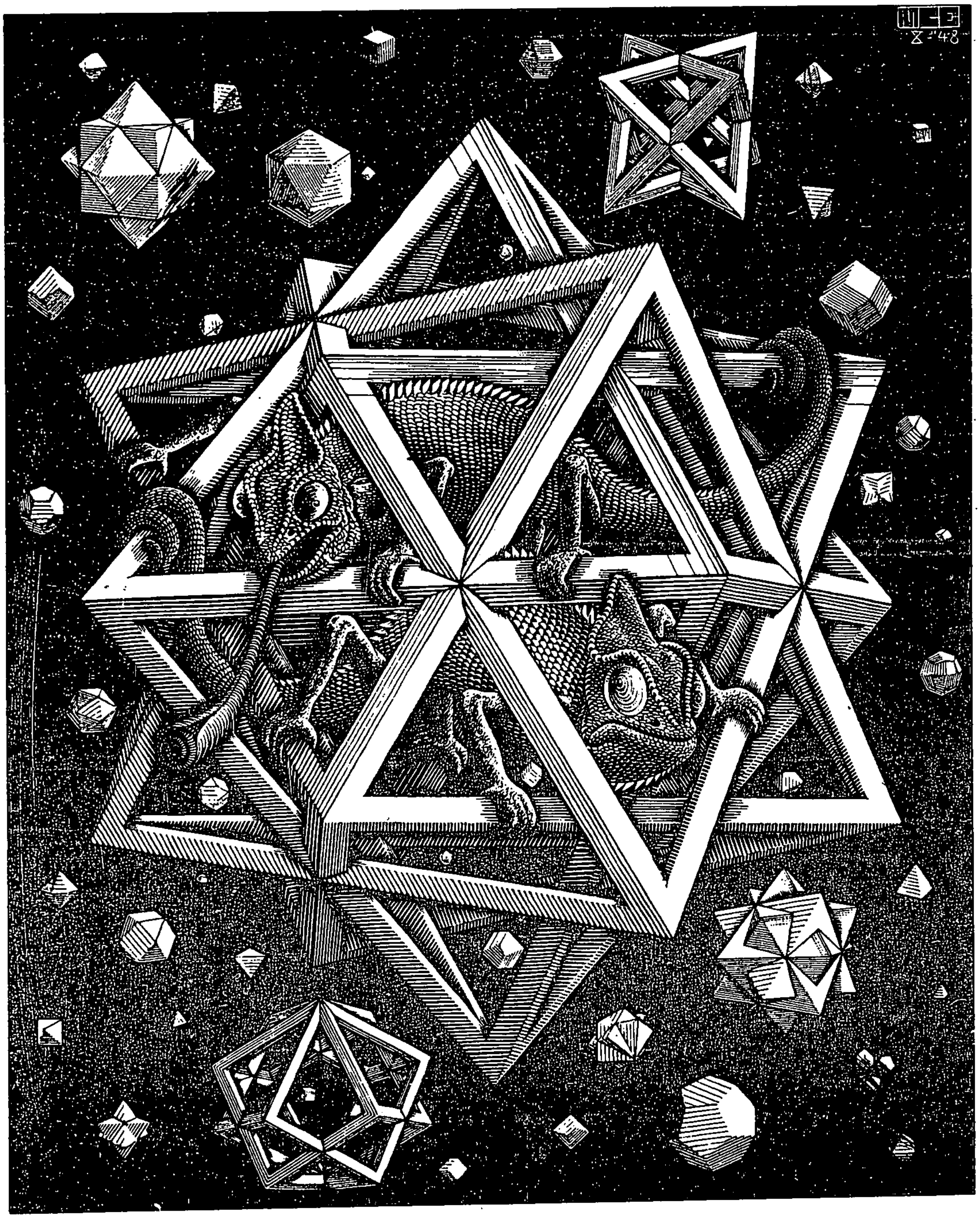
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס' 8 אב תשמ"ז - אוגוסט 1987



הטכניון
חיפה

הפקולטות למתמטיקה
Vladimir Gershovich
Jerusalem – ירושלים

מכון ויצמן
רחובות

בתמיכת המרכז המדעי י.ב.מ. ישראל

דבר - המערכת

אתם אוחזים בידכם את גליון מס' 8 של "אתגר-גליונות מתמטיקה. יחד אתו, חזרה המערכת אל הטכניון, ואת כל הפתרונות לבעיות יש כמובן לשלוח לפקולטה למתמטיקה, הטכניון, מכון טכנולוגי לישראל, חיפה. המאמר הראשי נכתב הפעם על ידי שוני דר, תלמיד כתה י"א, כסכום למחקר עצמו שלו כתוצאה מטענה שקרא בספר. נוסף לכך אנו מפרסמים מחדש את חלקו השני של מאמר מפרי עטו של פרופ' רוטנברג, שהתפרסם בגליון מס' 6 אך נפלו לצערנו בו שבושים רבים שאינם מאפשרים את הבנתו. כמוכן אנו מצרפים קטע מעמוד 19 של גליון מס' 7, שלא הופיע בשכפול מסיבות טכניות, ועמכם הסליחה.

בשעה שתקבלו גליון זה לידכם תהיו על סף שנת הלימודים תשמ"ח, ואנו מאחלים לכם שנת לימודים פוריה.

המערכת

על מעגל מקיף מינימלי של קבוצה במישור

שוני דר
תיכון עירוני ד', תל-אביב

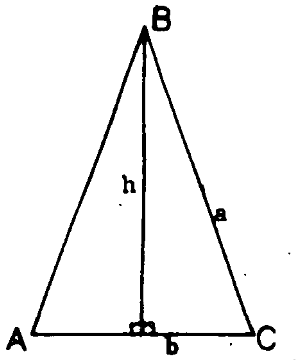
בספר Measure & Integration / Wheeden & Zigmund נמצאת ההדרכה הבאה: "הקף כל אחת מהקבוצות במעגל שקוטרו כקוטר הקבוצה" (הכוונה בקוטר של קבוצה כלשהי A במישור, שיסומן להלן $\delta(A)$, היא $(\sup\{\overline{xy} \mid x,y\in A\}$.

נשאלת השאלה - האם זה באמת אפשרי? האם לכל קבוצה חסומה ב-R^2 יש עגול המכיל את הקבוצה שקוטרו כקוטר הקבוצה? בציור מס' 1, מתואר משולש שוה שוקיים $(AB=BC)ABC$ שגובהו h גדול יחסית לאורך הבסיס b (היחס $\frac{h}{b}$ צריך להיות $>\frac{\sqrt{3}}{2}$),

מהו קוטרה של צורה זו? על שאלה זו נענה באמצעות הטענה הבאה, הכללית יותר, שתשמש אותנו בהמשך; קוטרו של משולש כלשהו שוה לאורך צלעו הארוכה. במקרה שלנו, כיוון ש-

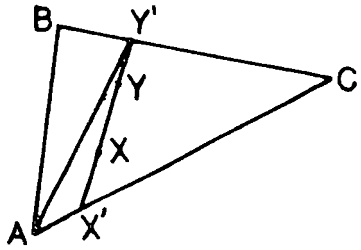
$h \ge \frac{\sqrt{3}}{2} b$, הרי $a = \sqrt{h^2 + (\frac{b}{2})^2} > b$

ולפיכך קוטר המשולש הוא אורך השוק a.



ציור מס' 1

יהיה איפוא ABC משולש, X ו-Y נקודות במשולש ותהיינה X',Y' נקודות החתוך של הישר XY עם היקף המשולש (ציור 2). ברור כי $\overline{XY} \le \overline{X'Y'}$. כמו כן ברור שאחת מהזויות הצמודות $\measuredangle AX'Y'$, $\measuredangle CX'Y'$ הינה קהה. נניח, בלי הפסד הכלליות שזו $\measuredangle AX'Y'$. כיוון ש- $\measuredangle AX'Y' + \measuredangle Y'AX' = \pi - \measuredangle AY'X' \le \pi$ בוודאי $\measuredangle Y'AX' \le \measuredangle AX'Y'$ ומכאן $\overline{X'Y'} \le \overline{Y'A}$. עתה שוב אחת מהזויות $\measuredangle AY'B$, $\measuredangle AY'C$, למשל $\measuredangle AY'C$, היא קהה ומכאן $\overline{AY'} \le \overline{AC}$.



ציור מס' 2

לסיכום $\overline{XY} \le \overline{AC}$ ובוודאי $\overline{XY} \le \max\{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}\}$.

מכאן יוצא גם שקוטר המשולש איננו גדול מאורך הצלע הארוכה במשולש ולפיכך שווה לו.

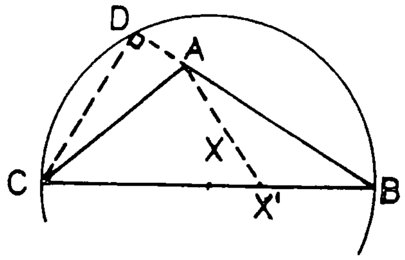
נחזור עתה למשולש המקורי שלנו. מציור 1, קבלנו שקוטרו הוא אורך השוק a. אילו היה עגול המקיים את הדרישה בשאלת הפתיחה, כלומר עגול המכיל את ABC שקוטרו a, אז כיוון ש- $\overline{AB} = a$ היינו מקבלים ש-AB קוטר בעגול זה ולפיכך מרכז העגול באמצע הקוטר AB. אך מאותו שקול עצמו נובע שמרכז העגול חייב להיות באמצע BC וזה בלתי אפשרי. לפיכך לא קיים עגול כזה עבור המשולש שלנו ומכאן שהטענה לא נכונה במקרה הכללי. בעמודים הבאים נחקור את טיב היחס בין קוטר קבוצה חסומה במישור לבין הקוטר ה"מינימלי" של מעגלים המכילים אותה.

2. פתרון הבעיה עבור משולשים

נגדיר, איפוא, לכל קבוצה A של נקודות במישור:

$D(A) = \inf\{d|A$ המכיל את הקבוצה d יש עגול שקוטרו$\}$.

עבור A חסומה שבה יותר מנקודה אחת $0 < \delta(A) < \infty$ ולכן נוכל להגדיר $r(A) = \frac{D(A)}{\delta(A)}$. אנו רוצים למצוא אלו ערכים יכול לקבל $r(A)$ כאשר $A \subset R^2$ חסומה כלשהי, המכילה יותר מנקודה אחת.



ציור מס' 3

קל לראות שלכל קבוצה A עבורה $r(A)$ מוגדר, $1 \le (A) \le 2$. כי אם $A \subseteq B$ כאשר B עגול שקוטרו d אז לכל $X,Y \in A$ $\overline{XY} \le d$ ומכאן גם $\delta(a) \le d$, ולפיכך יוצא גם ש-$\delta(A) \le D(A)$ כלומר $1 \le r(A)$. אם $X \in A$ אז $A \subset \overline{B}(X,\delta(A))$ ($\overline{B}(X,r)$ מסמן את העגול הסגור ברדיוס r סביב הנקודה X), כי לכל $Y \in A$, $\overline{XY} \le \delta(A)$. עתה, קוטר העגול $\overline{B}(X,\delta(A))$ הוא $2\delta(A)$ ומכאן $D(A) \le 2\delta(A)$, לפיכך $r(A) \le 2$.

ראינו בסעיף הקודם דוגמא לקבוצה T עבורה $r(T) > 1$. מכיוון שדוגמא זו היתה משולש נתמקד לרגע בחשוב $r(T)$ כאשר T הוא משולש. תהיה איפוא T משולש ABC, α הזוית ב-A, β ב-B, γ ב-C. נניח, בלי הגבלת הכלליות, ש-α הזוית הגדולה ואז $\overline{BC}$ הצלע הגדולה. לפי מה שהוכחנו בסעיף הקודם יוצא שקוטר המשולש הוא $\overline{BC}$, לכן אם קיים עגול המכיל את המשולש שקוטרו כקוטר המשולש, מרכזו חייב להיות באמצע הצלע BC. אם $\alpha \ge \frac{\pi}{2}$ אז העגול סביב אמצע BC ברדיוס $\frac{1}{2}\overline{BC}$ מכיל אמנם את המשולש ואז, כיוון שתמיד $1 \le r(T)$, נקבל במקרה זה, $r(\Delta ABC) = 1$. כדי לראות שעגול כזה מכיל באמת את המשולש, נשים לב ל-D, נקודת החתוך, הנוספת ל-B, של הישר AB עם שפת העגול. נקודה זו קיימת והיא אף מאותו צד של BC כ-A כיוון ש- $\beta \le \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$, בציור 3.

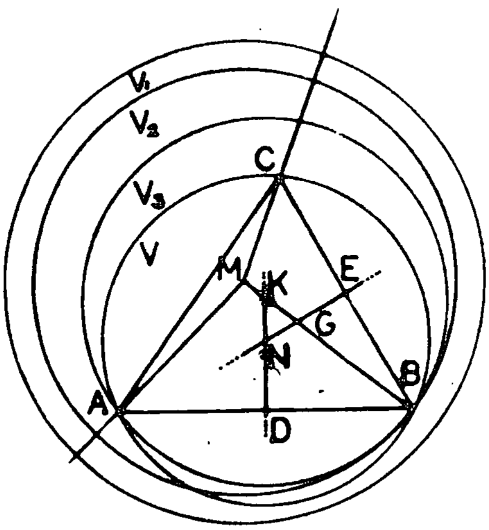
נניח ש-D היתה נמצאת בין A ל-B, אז היינו מקבלים ש- $\measuredangle CAD = \measuredangle CAB = \alpha \geq \frac{\pi}{2}$. אך

$\measuredangle CAD \leq \measuredangle ACD + \measuredangle CAD = \pi - \measuredangle ADC = \frac{\pi}{2}$ כששוויון מתקבל רק אם $\measuredangle ACD = 0$, כלומר

A=D, ואז ברור כי A בעגול, **אחרת** אי השויון חריף. מכאן יוצא ש-A פנימית לקטע BD, ולכן נמצאת בעגול. כיון שעגול הוא צורה קמורה, כלומר צורה המכילה יחד עם כל שתים מנקודותיה את כל הקטע המחבר אותן, נקבל שהעגול הזה מכיל את כל המשולש כי כל נקודה במשולש חלה בקטע המחבר את A עם נקודה כלשהי על BC.

במקרה $\alpha < \frac{\pi}{2}$ מראה חשבון דומה לקודם ש-A נמצאת מחוץ לעגול ברדיוס $\frac{\overline{BC}}{2}$ סביב אמצע BC ולפיכך $r(\Delta ABC) > 1$, במקרה זה. אך מהו בדיוק $r(\Delta ABC)$?

ראשית, בהינתן עגול V_1 המכיל את ΔABC, יהיו M מרכזו, R_1 רדיוסו אז נגדיר: $R_2 = \max\{\overline{MA},\overline{MB},\overline{MC}\}$. ברור כי $R_2 \leq R_1$ וכי עגול ברדיוס R_2 סביב M יכיל בוודאי את A,B,C. כיוון שהעגול צורה קמורה נקבל שגם הקטע BC מוכל בעגול ומכאן גם כל המשולש. נקרא לעגול זה V_2.



ציור מס' 4

נשים לב שאחד מקודקודי המשולש נמצא על שפת V_2 שכן אם למשל $R_2 = \overline{MB}$, B נמצאת על שפת V_2 - כבציור 4. נסתכל עתה בנקודות החתוך K ו-G של הישר MB עם האמצעים לצלעות BA ו-BC, בהתאמה. מתוך $\overline{MC},\overline{MA} \leq \overline{MB}$ נקבל ש-K ו-G חלות בקטע BM. נניח, בלי הגבלת הכלליות, שהקרובה ביניהן ל-M היא K. יהיו עתה V_3 המעגל סביב K ברדיוס R_3 כש- $R_3 = BK \leq R_2$. אז $\overline{AK} = \overline{BK} = R_3$, $\overline{CK} \leq \overline{BK} = R_3$ כי K נמצאת באותו צד של האנך האמצעי ל-BC כ-C. לפיכך A,B,C מוכלים ב-V_3.

ומכאן שכל המשולש מוכל בו, כש-A,B על שפתו. לסיום, נסתכל בנקודת החתוך N של האנכים האמצעים לצלעות AB ו-BC ויהיו E,D אמצעי הצלעות AB ו-BC בהתאמה. כיוון ש-K ו-C באותו צד של EG וכן D ו-B באותו צד של EG (כי $\measuredangle DEB = \measuredangle ACB = \gamma \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$) נקבל ש-$D$ ו-K נמצאים משני צדי GE ולפיכך N בתוך הקטע KD כלומר $\overline{DN} \leq \overline{DK}$. מכאן

$\overline{BN} = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{DN}^2} \leq \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{DK}^2} = \overline{BK} = R_3$. אך $\overline{BN}$ הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש ולפיכך נקבל ש- $R \leq R_1$, כש- $R = \overline{BN}$ הוא רדיוס המעגל החוסם של ΔABC, ומכאן $2R \leq D(\Delta ABC)$. אך ברור שהעגול V ששפתו הוא המעגל החוסם של ABC מכיל את המשולש וקוטרו $2R$ ולפיכך $D(\Delta ABC) = 2R$. ממשפט הסינוסים נקבל עכשיו: $r(\Delta ABC) = D(\Delta ABC) / \delta(\Delta ABC) = 2R / \overline{BC} = 1/\sin\alpha$.

עתה, לכל $\frac{\pi}{3} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ יש משולש שזויתו הגדולה היא α (למשל, משולש שוה שוקים שזוית הראש שלו היא α - כי זוית הבסיס במשולש כזה תהיה $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \leq \alpha$). כיוון ש- $\alpha < \frac{\pi}{2}$ יוצא ש-$r(T)$, כאשר T נע על קבוצת משולשים אלו, מקבל את כל הערכים של $1/\sin\alpha$ עבור $\frac{\pi}{3} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ כלומר את כל הערכים בקטע הפתוח $(1,2/\sqrt{3})$. לסיכום קבלנו שכש-T נע על קבוצת כל המשולשים, $r(T)$ מקבל את כל הערכים בקטע הסגור $[1,2/\sqrt{3}]$. המשך המאמר יוקדש להוכחה שאלו גם כל הערכים שמקבל $r(T)$ כש-T נע על קבוצת כל הקבוצות במישור עבורן הוא מוגדר.

3. הכנה לקראת הפתרון במקרה הכללי

הדיון בבעיה עבור משולשים נעשה בעזרת שקולים גאומטרים פשוטים. העסוק בבעיה במקרה הכללי מצריך שימוש בכלים מתקדמים יותר. במשך הסעיפים הבאים ימלא תפקיד נרחב במשפט היסודי הבא מחשבון אינפיניטסימלי:

משפט בולצנו וירשטראס במישור: תהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות במישור, חסומה (כלומר מוכלת בעגול כלשהו) אז ל- $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש תת סדרה מתכנסת. הוכחת המשפט פשוטה אך היא ארוכה למדי ולכן לא נביא אותה כאן.

במקרה המיוחד של הבעיה, שבדקנו בסעיף הקודם, מצאנו שתמיד קיים עגול שקוטרו $D(\Delta ABC)$ המכיל את המשולש ABC. המשפט הבא שישמש אותנו מאוחר יותר מראה שתופעה זו אינה מיוחדת למשולשים:

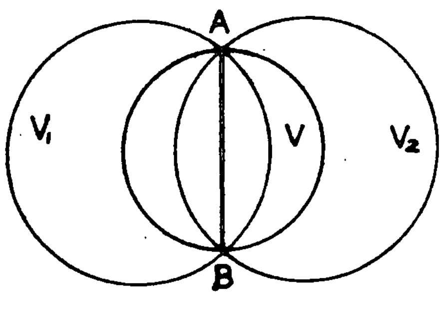
משפט: לכל $T \subset R^2$ עבורה $r(T)$ מוגדר יש עגול שקוטרו $D(T)$ המכיל את T. עגול זה הוא אף יחיד ויסומן מעתה $B(T)$.

הוכחה: נסמן, למשך הוכחה זו, $r = D(T)/2$ כאשר T, המקיימת את תנאי המשפט, קבועה בהוכחה זו. לפי הגדרת $D(T)$ יש סדרה $\{(X_n,r_n)\}_{n=1}^{\infty}$, $X_n \in R^2$, $r \le r_n \in R^n$ כך ש- $T \subset \bar{B}(X_n,r_n)$ לכל n ו- $\lim r_n = r$. תהי עתה Y כלשהי השייכת ל-T אז $\overline{X_nY} \le r_n$. אך $|r_n - r| < r$ לכל $n > N$ (עבור N מספיק גדול) ולפיכך $\overline{YX_n} \le 2r$ לכל n כזה. כלומר, הסדרה $\{X_n\}_{n=N}^{\infty}$ חסומה ב-$\bar{B}(Y,2r)$ ולפיכך לפי משפט בולצנו-וירשטראס יש לה תת-סדרה מתכנסת $\{X_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k\to\infty} X_{n_k} = X$, נראה עתה ש-$T \subset \bar{B}(X,r)$. נניח בשלילה שלא כך. אז יש $z \in T$ כך ש-$d = \overline{ZX} > r$. אך כיוון ש-$\lim_{k\to\infty} r_{n_k} = r$, $\lim X_n = X$ אז יש K כך שלכל $K<k$: $|r_{n_k} - r| < \frac{d-r}{2}$ וגם $\overline{X_{n_k}X} < \frac{d-r}{2}$. אז $\overline{X_{n_k}Z} \le r_{n_k}$ ומכאן עבור $k>K$

$$d = \overline{XZ} \le \overline{XX_{n_k}} + \overline{X_{n_k}Z} < \frac{|d-r|}{2} + r_{n_k} < \frac{|d-r|}{2} + r + \frac{|d-r|}{2} = d$$

סתירה.

הוכחנו איפוא קיום עגול בקוטר $D(T)$ המכיל את T. נוכיח עתה את היחידות.



ציור מס' 5

נניח ש-T קבוצה עבורה $r(T)$ מוגדר, ו- V_1,V_2 עגולים שונים שקוטרם $D(T)$

המכילים את T. אז T מוכלת גם ב- $V_1 \cap V_2$. אך $\delta(T) > 0$ כלומר T מכיל לפחות שתי נקודות. לכן לא יתכן ש- $V_1 \cap V_2$ לא נחתכים או שהם משיקים מבחוץ כי במקרים אלו היה החתוך ריק או שהיה מכיל נקודה אחת בלבד, בהתאמה. לא יתכן גם שאחד העגולים מוכל בשני כי אז היינו מקבלים שהם מתלכדים כי קוטריהם שוים. לפיכך יוצא שהמעגלים התוחמים את V_1 ו- V_2 נחתכים בשתי נקודות A,B. AB הוא מיתר בעגולים V_1,V_2 שאינו קוטר (כי אז היו המרכזים של V_1,V_2 שניהם באמצע AB ומכאן $V_1=V_2$ כי רדיוסיהם שוים).

תהי איפוא $v \in V_1 \cap V_2$. מרכזי V_1 ו- V_2 נמצאים מצדדים שונים של AB לפיכך אחד מהם לא נמצא בצד של AB בו נמצאת v, למשל מרכז העגול V_1. לכן v נמצאת במקטע התחום ע"י הקטע AB והקשת הקטנה בין B ו-A של המעגל התוחם את V_1. חשבון דומה לזה שהבאנו בתחילת סעיף 2 מראה שזוית הראיה של הקטע AB מהנקודה v גדולה או שוה לזוית התקפית הנשענת על AB מנקודות הקשת הקטנה בין A ל-B וזוית זו גדולה מ- $\frac{\pi}{2}$. עוד מראה חשבון כזה ש-v נמצאת בעגול הבנוי על AB כקוטר. לפיכך T מוכל בעגול על AB כקוטר, בסתירה להגדרת $D(T)$ ומכאן שאין V_1,V_2 שונים.

מושג נוסף שנזדקק לו, הלקוח הפעם מטופולוגיה, הוא הסגור של קבוצה A. בשם זה נכנה את הקבוצה המורכבת מכל הנקודות X המהוות גבול של סדרת נקודות $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב-A. הסגור של A יסומן ב- $\bar{A}$. ברור ש- $A \subset \bar{A}$ כי לכל $a \in A$, a היא הגבול של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת כ- $a_n=a$ לכל n. כמו כן $\bar{A}$ היא קבוצה סגורה כלומר קבוצה המכילה את כל נקודות הגבול שלה (בשם זה מכנים אותן נקודות המהוות גבול של סדרת נקודות מהקבוצה). כי נניח ש-x היא נקודת גבול של $\bar{A}$ ו- B עגול הפתוח סביב x ברדיוס r, אז ב-B יש $y \in \bar{A}$ כי הרי יש ב-$\bar{A}$ סדרה המתכנסת ל-x. נניח $\overline{xy}=d$. אז $d < r$ ויש בעגול הפתוח ברדיוס $r-d$ סביב y נקודה כלשהי $z \in A$ כי y נקודת גבול של A.

אך עגול זה מוכל ב-B ולפיכך יש ב-B נקודה של A. דבר זה נכון לכל עגול סביב x. מכאן נובע בקלות שיש סדרת נקודות ב-A המתכנסת ל-x כלומר $x \in A$.

התכונה האחרונה של הסגור שנדון בה היא החשובה ביותר לענינינו:

טענה: לכל $A \subset R^2$ חסומה מתקיים $\delta(\bar{A}) = \delta(A)$ וכן $D(\bar{A}) = D(A)$.

הוכחה: לכל $B \supset A$ הרי $\{\overline{xy}|x,y \in A\} \subset \{\overline{xy}|x,y \in B\}$

לכן $\delta(A) = \sup\{\overline{xy}|x,y \in A\} \leq \sup\{\overline{xy}|x,y \in B\} = \delta(B)$. אבל $A \subset \bar{A}$, ולפיכך $\delta(A) \leq \delta(\bar{A})$. להוכחת אי השויון ההפוך נשים לב שלכל $x,y \in \bar{A}$ יש $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}, \{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ השייכים ל-A כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$, $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = Y$ ואז $\overline{XY} = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{X_nY_n} \leq \sup \overline{X_nY_n} \leq \{xy|x,y \in A\} = \delta(A)$, לפיכך גם $\delta(\bar{A}) = \sup\{\overline{xy}|y \in \bar{A}\} \leq \delta(A)$ ($\lim\limits_{n\to\infty} X_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = y$ אכן גוררים $xy = \lim\limits_{n\to\infty} X_nY_n$, בדוק!). אשר לחלק השני של הטענה - כל עגול המכיל את $\bar{A}$ מכיל בודאי גם את A כי $A \subset \bar{A}$, וגם כל עגול המכיל את A מכיל גם את $\bar{A}$. כי אם B עגול סגור המכיל את A ו-X נקודה ב-$\bar{A}$ אז $X = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ עבור $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ השייכים ל-A ולפיכך גם ל-B. כלומר אם O מרכז העגול B ו-r רדיוסו אז $\overline{OX_n} \leq r$ לכל n ולפיכך גם $OX = \lim\limits_{n\to\infty} OX_n \leq r$, כלומר גם $X \in B$. מאלה נובע ש-$D(\bar{A}) = D(A)$ מ.ש.ל. כעת יש בידינו את כל ההכנה הדרושה כדי לגשת לפתרון הבעיה.

4. פתרון הבעיה במקרה הכללי

בסעיף זה נוכיח שלכל $T \subset R^2$ עבורה $r(T)$ מוגדר מתקיים $r(T) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

לפי הטענה שבסוף הסעיף הקודם מתקיים לכל T כזו $r(T) = r(\bar{T})$ ולפיכך מספיק להוכיח את הטענה עבור קבוצות סגורות. תהי איפוא $A \subset R^2$ קבוצה סגורה עבורה מוגדר $r(A)$ קבועה למשך סעיף זה, $B=B(A)$ העגול היחיד בקוטר $D(A)$ המכיל את A. יהי O מרכז B, ו- $r = \frac{D(A)}{2}$ רדיוסו.

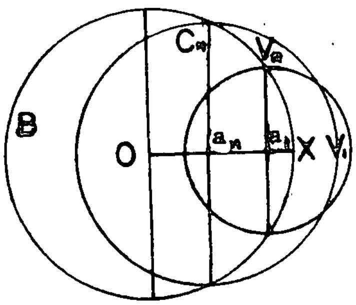
השלב הראשון בהוכחה יהיה להראות ששפת B מכילה נקודות של A:

נגדיר $r_n = r(1 - \frac{1}{n})$ לכל n טבעי, אזי $\lim r_n = r$. לפי הגדרת D(A), $A\setminus\bar{B}(0,r_n)$ אינה ריקה לכל n. תהי $X_n \in A\setminus\bar{B}(0,r_n)$. אז $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה כי היא מוכלת בקבוצה החסומה A. לפיכך לפי משפט בולצנו-ויירשטראס יש לה תת-סדרה $\{X_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת לאיזשהי נקודה X. אז $X \in A$ כי A סגורה וגם $\overline{XO} = \lim_{k\to\infty} \overline{X_{n_k}O} \geq \lim_{k\to\infty} r_{n_k} = r$, אך $X \in A \subset B$ ולפיכך $\overline{XO} \leq r$ ומכאן $XO = r$ כלומר X על שפת B.

נראה עתה שעל שפת B יש נקודה של A נוספת על X: ניקח סדרת נקודות כלשהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ על הקטע OX כך ש- $\lim \overline{Xa_n} = \overline{XO}$. בכל נקודה a_n נעביר את המיתר C_n המאונך לישר OX ונבנה עליו כקוטר עגול V_n. קוטרו מיתר ב-B שאינו קוטר ב-B ולכן קוטרו של כל V_n קטן מ-D(A) ולפיכך $A\setminus V_n$ אינה ריקה לכל n. תהי $Y_n \in A\setminus V_n$ אז $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה לכן יש לה תת-סדרה Y_{n_k} המתכנסת ל-Y. $Y \in A$ כי A סגורה. אם נסמן ב-δ_n את קוטר העגול V_n נקבל:

$$\overline{OY} = \lim_{k\to\infty} \overline{OY_{n_k}} \geq \lim_{k\to\infty} \overline{Y_{n_k}a_{n_k}} \geq \lim \overline{a_{n_k}O} \geq \lim_{k\to\infty} \frac{\delta_{n_k}}{2} - 0 = r \; .$$

מכאן, כמקודם, יוצא ש-Y על שפת B.



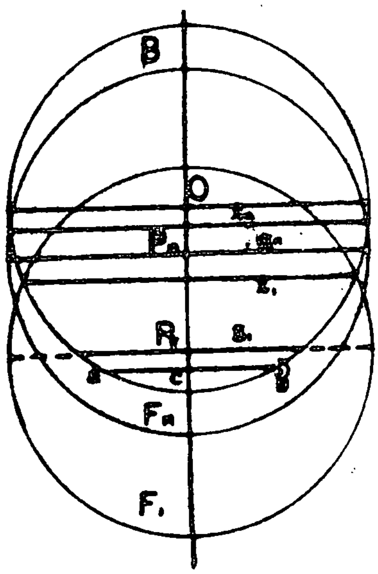
ציור מס' 6

נותר עוד להראות ש-$Y \neq X$. אך הרי ברור, כבהוכחת היחידות של B(X) בסעיף הקודם, שכל V_n מכיל את המקטע של B התחום על ידי C_n ועל ידי הקשת של המעגל, התוחם את B, הנשענת עליו (ציור מס. 6).

יוצא שלכל נקודה $Z \in B\setminus V_n$ הקטע $\overline{XZ}$ חותך את המיתר C_n באיזה שהיא נקודה W,

אז $\overline{ZX} \ge \overline{WX}$ והרי $\overline{WX} \ge \overline{a_nX}$ לפיכך $\overline{ZX} > \overline{a_nX}$ לכל $Z \in B \setminus V_n$, בפרט $\overline{Y_nX} > \overline{a_nX}$ ואז $\overline{YX} = \lim_{k\to\infty} \overline{Y_{n_k}X}' \ge \lim_{k\to\infty} \overline{a_{n_k}X} = r$ ולפיכך $Y \neq X$.

הוכחנו שעל שפת B יש לפחות שתי נקודות שונות של A ולכן $m = \sup\{\sphericalangle aOb \mid a,b \in A \cap \partial B\} > 0$ כאשר ∂B מסמן את שפת B והכוונה ב-$\sphericalangle aOb$ תמיד לזוית הקטנה הנוצרת בין הקרניים Oa , Ob. שימוש דומה לזה שעשינו קודם במשפט בולצנו-ויירשטראס מראה שקיימת $a,b \in A \cap \partial B$ כך ש-$\sphericalangle aOb = m$. אם $\sphericalangle aOb = \pi$ גמרנו כי אז $\overline{ab} = D(A)$ ולפיכך $\delta(A) \ge D(A)$ והרי תמיד $\delta(A) \le D(A)$ ומכאן $r(A) = 1 < \frac{2}{\sqrt{3}}$. אם $\sphericalangle aOb < \pi$ אז יהי c אמצע הקטע ab. תהי $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות על הקטע Oc כך ש- $\overline{OC} > \overline{Op_n} \to 0$ ויהי F_n העגול שמרכזו P_n ורדיוסו r, אז



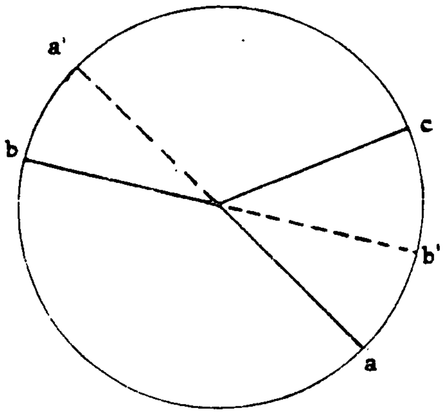
ציור מס' 7

בגלל ש-B הוא העגול היחיד ברדיוס r שמכיל את A נקבל שיש $Z_n \in A \setminus F_n$.

אז ל- $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש, כרגיל, תת-סדרה מתכנסת $Z_{n_k} \to Z$ וכמקודם מתקבל $Z \in A \cap \partial B$.

נראה עוד ש-Z לא חלה בקשת הקטנה של שפת B בין a ל-b: F_n מכיל את המקטע של B התחום על ידי המיתר ℓ_n המשותף לשפת B ושפת F_n ועל ידי הקשת הקטנה של ∂B הנשענת על מיתר זה (לפי חשבון דומה לזה שערכנו הוכחת היחידות של $(B(X)$. כמוכן, ℓ_n מאונך ל-Oc ולפיכך מקביל ל-ab וכן כפי שכבר ראינו P_n ו-O נמצאים מצדדים שונים של המיתר ℓ_n ולפיכך יוצא ש-F_n מכיל את המקטע של B התחום על ידי המיתר של B העובר דרך P_n במקביל ל-ab (g_n בציור 7). מכאן ש-Z

לא נמצאת בחצי העגול B התחום על ידי הקוטר המקביל ל-ab והקשת נשענת עליו העוברת דרך a ו-b, ובפרט Z לא חלה בקשת הקטנה של שפת B בין a ל- b.



ציור מס' 8

עתה תהיינה a', b' הנקודות הסמטריות ל-a ו-b דרך O (ציור מס. 8) אז לא יתכן שבקשת של ∂B בין a ל-b' יש נקודה של A נוספת ל-a כי זה היה סותר את המקסימליות של $\measuredangle bOa$. בדומה אין בקשת בין b ל-a' נקודות של A נוסף ל-b ולפיכך Z נמצאת בקשת הקטנה שבין a' ל-b'. אם נניח שההתקדמות מ-a ל-b בקשת הקטנה ביניהן היא בכוון השעון אז המשך ההתקדמות מ-b ל-Z בכוון השעון לאורך ∂B גם הוא יעשה על הקשת הקטנה ביניהן, ולבסוף הדרך מ-Z ל-a תעשה בכוון השעון לאורך הקשת הקטנה ביניהן. מכאן נקבל:

$\measuredangle aOb + \measuredangle bOZ + \measuredangle ZOa = 2\pi$. אך לפי המקסימליות של $\measuredangle aOb$ הרי $aOb \geq \measuredangle ZOa$, $aOb \geq bOZ$ ולפיכך $3\cdot\measuredangle aOb \geq 2\pi$ כלומר $\measuredangle aOb \geq \frac{2\pi}{3}$. אך מכאן יוצא שאורך המיתר $\overline{ab}$ אינו קטן מאורך המיתר של B שהזוית המרכזית הנשענת עליו היא $\frac{2\pi}{3}$ והרי אורך מיתר זה הוא $\frac{\sqrt{3}}{2}D(A)$. כלומר נקבל ש- $\delta(A) \geq ab \geq \frac{\sqrt{3}}{2}D(a)$ ומכאן $r(A) \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$ ולפיכך גמרנו.

ר. רוטנברג
הטכניון

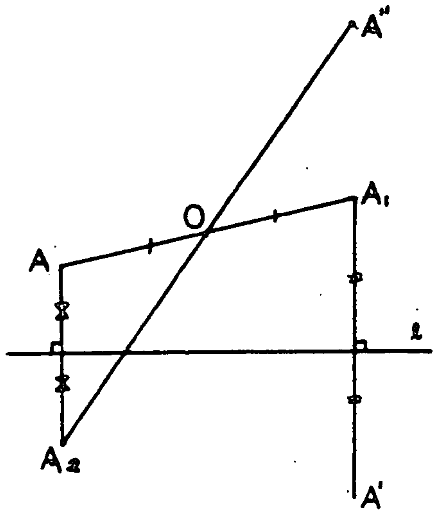
IV מכפלת טרנספורמציות

א. הגדרה:

תהיינה T_2,T_1 שתי טרנספורמציות של E^2. נגדיר את מכפלתן $T_2 \circ T_1$ כהעתקה של E^2 ל-E^2 אשר לכל נקודה A במישור מתאימה הנקודה $(T_2 \circ T_1)(A)=A'$ על ידי $T_2(T_1(A))=A'$, במלים אחרות: בשלב ראשון נעתיק A ל-$T_1(A)=A_1$ ולאחר מכן נעתיק A_1 לנקודה A': $T_2(A_1)=A'$. בצענו, זו אחר זו את הטרנספורמציות T_2,T_1 (שים לב ש-T_1 מופעלת ראשונה למרות שבסימון $T_2 \circ T_1$ היא כאילו שניה).

דוגמא:

אם T_1 הוא שיקוף בנקודה O, $\sigma_O=T_1$, ו-T_2 שיקוף בישר ℓ שאינו עובר דרך O: $\sigma_\ell=T_2$, אנו רואים באיור 12 את תוצאת המכפלה $\sigma_O(A)=A_1;\sigma_\ell \circ \sigma_O=T_2 \circ T_1$ ו-$A'=\sigma_\ell(A_1)$, לכן $(\sigma_\ell \circ \sigma_O)(A)=A'$. רואים גם באיור 12 שאם נבצע מכפלה בסדר הפוך $T_1 \circ T_2$ אז $\sigma_\ell(A)=A_2$, לכן $(\sigma_O \circ \sigma_\ell)(A)=A''$ וברור כי $A'\neq A''$, ז"א $\sigma_O \circ \sigma_\ell \neq \sigma_\ell \circ \sigma_O$;



ציור מס' 12

מכפלת טרנספורמציות אינה מקיימת, בדרך כלל, חוק החילוף (קומוטטיביות).

ב. משפטים:

1. מכפלה של שתי טרנספורמציות היא בעצמה טרנספורמציה.

2. אם T טרנספורמציה ו-T^{-1} הטרנספורמציה ההפוכה (סעיף I ד') אזי

$e=ToT^{-1}=T^{-1}oT$ (e הזהות).

3. לכל טרנספורמציה T; $T=eoT=Toe$.

4. אם T_1 , T_2 , T_3 הן שלוש טרנספורמציות של המישור אזי

$(T_3oT_2)oT_1=T_3o(T_2oT_1)$. מקום הסוגריים מסביר מהי הכוונה במכפלות.

זהו חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות).

5. מאחר ש-T_2oT_1 היא טרנספורמציה (סעיף 1 לעיל), יש לה טרנספורמציה

הפוכה $(T_2oT_1)^{-1}$ ואמנם: $(T_2oT_1)^{-1}=T_1{}^{-1}oT_2{}^{-1}$ (שים לב לסדר הגורמים

בכל אגף).

הוכחת המשפטים הנ"ל לא קשה. נסה להוכיחם.

6. ראינו כי עבור שקופים: $\sigma_0{}^{-1}=\sigma_0$ ו-$\sigma_\ell{}^{-1}=\sigma_\ell$ (ראה סעיף I ד') לכן בשימוש

תכונה 2 לעיל נקבל $e=\sigma_0 o\sigma_0$ ו-$e=\sigma_\ell o\sigma_\ell$.

7. אם ρ_1,ρ_2 הם שני סיבובים סביב אותה נקודה O בזויות φ_1,φ_2 בהתאמה.

אזי $\rho_1 o\rho_2=\rho_2 o\rho_1=\rho_{(O,\varphi_1+\varphi_2)}$. למשל, אם ρ_1 הוא סבוב סביב O

ב-$\varphi_1=+140^0$, ו-ρ_2 סיבוב סביב O ב-$\varphi_2=+55^0$, אזי $\rho_2 o\rho_1$ הוא

סיבוב סביב O בזוית $+195^0$ (או היינו הך סיבוב סביב O ב--165^0)

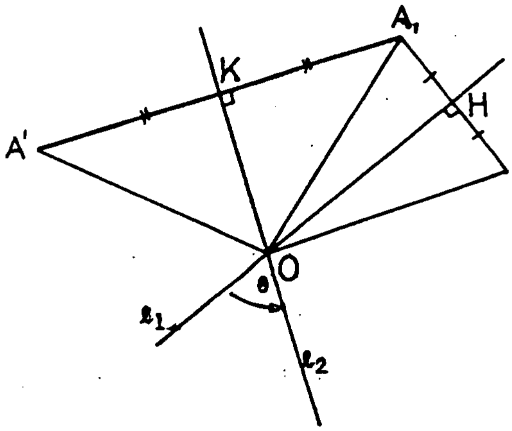
ואם $\varphi_1=80^0$, $\varphi_2=-100^0$ אזי $\rho_2 o\rho_1$ הוא סיבוב סביב O ב--20^0.

במקרה זה של מכפלת סיבובים סביב אותה נקודה חוק החילוף פועל:

$\rho_1 o\rho_2=\rho_2 o\rho_1$. (הוכח זאת).

ג. מכפלת שיקופים בישרים נחתכים:

משפט: מכפלת שני שיקופים בישרים ℓ_2,ℓ_1 הנחתכים בנקודה O כך שהזוית (המכוונת) בין ℓ_1 ל-ℓ_2 היא בת θ, היא סיבוב סביב O בזוית $\varphi=2\theta$: $\rho_{(O,2\theta)}=\sigma_{\ell_2}\circ\sigma_{\ell_1}$.



ציור מס' 13

הוכחה: (ראה איור 13): לכל A ב-E^2, תהי $\sigma_{\ell_1}(A)=A_1$ לכן ℓ_1 הוא אנך אמצעי לקטע AA_1; O על ℓ_1 ולכן: $|OA_1|=|OA|$. כמו כן אם $AA_1\cap\ell_1=H$, אזי $m\measuredangle HOA_1=m\measuredangle AOH$,

כעת אם $\sigma_{\ell_2}(A_1)=A'$ אזי, מסיבות דומות $|OA'|=|OA_1|$ ואם $A_1A'\cap\ell_2=K$, $m\measuredangle KOA'=m\measuredangle A_1OK$. כל הזויות הן "מכוונות", ז.א. עם סימן מתאים (חיוביות, שליליות או אפס).

מסקנה ראשונה $|OA'|=|OA|$, וכמו כן (החיבור להלן הוא אלגברי), $\measuredangle AOA'=\measuredangle AOA_1+\measuredangle A_1OA'=2\measuredangle HOA_1+2\measuredangle A_1OK=2\measuredangle HOK=2\theta$. קבלנו שהאורכים $|OA|$, $|OA'|$ שווים והזוית $\measuredangle AOA'$ היא בעלת גודל קבוע $\varphi=2\theta$. זה בדיוק אומר ש-A' מתקבל מ-A על ידי סיבוב סביב O בזוית $\varphi=2\theta$. $A'=\rho_{(O,2\theta)}(A)$ וזה נכון לכל נקודה A במישור; לכן, $\rho_{(O,2\theta)}=\sigma_{\ell_2}\circ\sigma_{\ell_1}$ מ.צ.ל.

ד. משפט הפוך:

אם נתון סיבוב ρ של המישור E^2 סביב נקודה O בזוית φ אזי אפשר לקבל ρ כמכפלת שני שיקופים בישרים ℓ_1, ℓ_2 העוברים דרך O כשהזוית מ-ℓ_1 ל-ℓ_2 היא בת $\theta=\varphi/2$. אפשר לבחור באופן שרירותי אחד הישרים ℓ_1 או ℓ_2.

הוכחה: יהיו O ו- φ נתונים. נבחור ישר ℓ_1 דרך O ונסובב ℓ_1 סביב O בזוית $\theta=\varphi/2$. נקבל ישר שני ℓ_2, ברור כי $\rho_{(O,\varphi)}=\sigma_{\ell_2}\circ\sigma_{\ell_1}$ ואם נרצה לבחור דוקא ℓ_2 עובר דרך O, אז נסובב ℓ_2 סביב O בזוית $-\varphi/2$ לקבל ℓ_1.

ה. הערות:

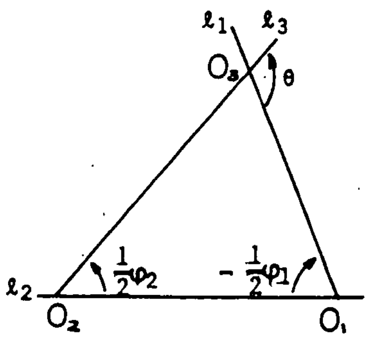
1. אם $\rho=\sigma_{\ell_2}\circ\sigma_{\ell_1}$ אזי $\rho^{-1}=\sigma_{\ell_1}\circ\sigma_{\ell_2}$.

2. אם ℓ_1 ניצב ל-ℓ_2 כך ש-$\theta=90^0$ אזי $2\theta=\varphi=180^0$. במקרה זה המכפלה נותנת חצי סיבוב או שיקוף ב-O: $\sigma_O=\sigma_{\ell_2}\circ\sigma_{\ell_1}=\sigma_{\ell_1}\circ\sigma_{\ell_2}$. מכאן המשפט:

מכפלת שני שיקופים בישרים ניצבים זה לזה נותנת שיקוף בנקודת החיתוך של הישרים והסדר במכפלה לא חשוב. להיפך: כל שיקוף בנקודה O הוא מכפלה של שני שיקופים בישרים ניצבים זה לזה העוברים דרך O, כאשר ניתן לבחור אחד הישרים.

ו. מכפלת סיבובים במרכזים שונים:

משפט: מכפלת שני סיבובים ρ_1, ρ_2 במרכזים שונים O_1, O_2 בזויות φ_1, φ_2 כאשר $\varphi_1+\varphi_2\neq 0$ הוא סיבוב סביב מרכז שלישי O_3 ובזוית $\varphi_1+\varphi_2=\varphi_3$.



ציור מס' 14

הוכחה: הדרישה $\varphi_1+\varphi_2\neq 0$ היא, בהנחה ש-$-180^0<\varphi_1\leq 180^0$ וגם $-180^0<\varphi_2\leq 180^0$ ופירושה למעשה ש: $\varphi_2\neq-\varphi_1$. כעת יהיה ρ_1 הסיבוב סביב O_1 בזוית φ_1 ו-ρ_2 הסיבוב סביב O_2 בזוית φ_2 (ראה איור 14).

בעזרת סעיפים ג' ו-ד' בפרק זה (ראה לעיל),

נבחר $\ell_2=O_1O_2$ וישר ℓ_1 דרך O_1 כך שהזוית המכוונת בין ℓ_1 ל-ℓ_2 (O_1O_2) תהי $+\varphi_1/2$ ויהיה ℓ_3 הישר דרך O_2 העושה עם O_1O_2 זוית מכוונת בת $\varphi_2/2$. מסעיפים ג' ו-ד' לעיל נובע כי: $\rho_1=\sigma_{\ell_2}\circ\sigma_{\ell_1}$, $\rho_2=\sigma_{\ell_3}\circ\sigma_{\ell_2}$, לכן $\rho_2\circ\rho_1=(\sigma_{\ell_3}\circ\sigma_{\ell_2})\circ(\sigma_{\ell_2}\circ\sigma_{\ell_1})$. בפעיל חוק הקיבוץ (סעיף IV, ב' 4) פעמיים: $(\sigma_{\ell_3}\circ\sigma_{\ell_2})\circ((\sigma_{\ell_2}\circ\sigma_{\ell_1}))=\sigma_{\ell_3}\circ(\sigma_{\ell_2}\circ(\sigma_{\ell_2}\circ\sigma_{\ell_1}))=\sigma_{\ell_3}\circ((\sigma_{\ell_2}\circ\sigma_{\ell_2})\circ\sigma_{\ell_1})$. לפי סעיפים ב' 3,2 לעיל: $e=\sigma_{\ell_2}\circ\sigma_{\ell_2}$ ו- $e\circ\sigma_{\ell_1}=\sigma_{\ell_1}$ כך שקבלנו $\rho_2\circ\rho_1=\sigma_{\ell_3}\circ\sigma_{\ell_1}$.

$\varphi_2\neq-\varphi_1$ לכן $\varphi_2/2\neq-\varphi_1/2$, זה אומר ש: ℓ_1 ו-ℓ_3 אינם מקבילים זה לזה, לכן הם נחתכים בנקודה O_3 ואז לפי המשפט בסעיף ג' בפרק זה $\sigma_{\ell_3}\circ\sigma_{\ell_1}$ נותנת סיבוב סביב O_3 בזוית 2θ כאשר θ היא הזוית בין ℓ_1 ל-ℓ_3. כפי שרואים באיור 14, θ היא זוית חיצונית במשולש $O_1O_2O_3$ ואז (בהתחשב בצורה נכונה בסימנים) נקבל $\theta=\varphi_1/2+\varphi_2/2$, ז.א. $2\theta=\varphi_1+\varphi_2$. הוכחנו אם כן ש: $\rho_{(O_3,\varphi_1+\varphi_2)}=\rho_2\circ\rho_1$.

נעיר כאן שבהוכחת המשפט ניתנת גם דרך לבנית הנקודה O_3, מרכז הסיבוב שהוא מכפלת הסיבובים ρ_1, ρ_2.

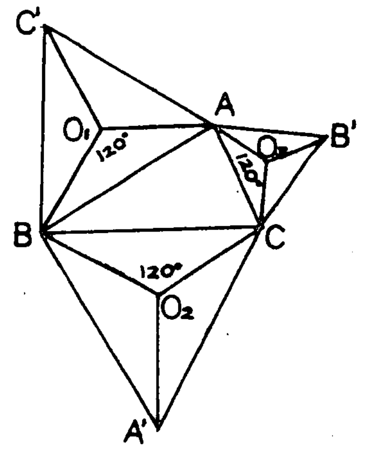
ז. __מסקנה:__

המכפלה של שני סיבובים ρ_1, ρ_2 במרכזים שונים O_1, O_2 ובזויות ישרות: $\varphi_1=\varphi_2=90^0$ (או $\varphi_1=\varphi_2=-90^0$) היא חצי סיבוב או שיקוף בנקודה O_3 כך שהמשולש $O_1O_2O_3$ הוא ישר-זוית ושווה-שוקיים: $|O_1O_3|=|O_2O_3|$.

__הוכחה:__ זה נובע מהמשפט הקודם: $45^0=\varphi_1/2=\varphi_2/2$ לכן המשולש $O_1O_2O_3$ הוא שווה שוקיים והזוית השלישית $m\angle O_1O_3O_2=90^0$. מ.צ.ל.

נביא בפרק זה מספר תרגילים נוספים לאלה שבפרק III כשכאן נוכל להעזר במכפלת סיבובים כפי שפתחנו בפרק הקודם. שני התרגילים הראשונים הם מעין המשכים לשני התרגילים הראשונים בפרק III.

1. יהיה ABC משולש נתון ב-E^2. על כל אחת מצלעותיו ומחוץ למשולש, נבנה משולשים שווי צלעות 'ABC', 'BCA', 'CAB. הוכח כי מרכזי משולשים אלה הם קודקודי משולש שווה-צלעות (מרכז משולש שווה-צלעות הוא מרכז המעגל החוסם, ז.א. פגישת הגבהים).



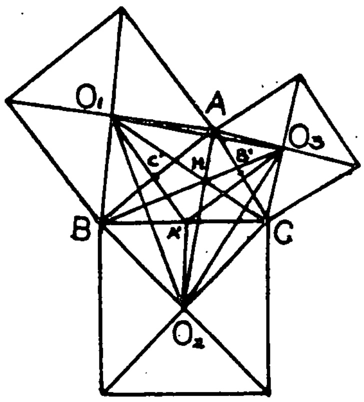
ציור מס' 15

פתרון

יהיו $O_1O_2O_3$ מרכזי המשולשים 'ABC, 'BCA, 'ACB בהתאמה (ראה איור 15). משולשים אלה הם שווי צלעות לכן $|BO_1|=|O_1A|$, $|AO_3|=|O_3C|$ (זה נכון כי O_1, O_3 הם מרכזי מעגלים חוסמים), וגם $m\measuredangle BO_1A=m\measuredangle AO_3C=+120^0$. יהיו: ρ_1 סיבוב סביב O_1, ρ_3 סיבוב סביב O_3, שניהם בזוית בת $+120^0$, אזי: $\rho_1(B)=A$ ו-$\rho_3(A)=C$, לכן המכפלה $\rho_3\circ\rho_1$ מעתיקה B ל-C. לפי משפט בסעיף ו' פרק IV, $\rho_3\circ\rho_1$ הוא סיבוב סביב נקודה O ובזוית $\varphi=240^0=120^0+120^0$ או אם נגביל φ: $-180^0<\varphi\le180^0$: $\varphi=240^0-360^0=-120^0$.
כעת אם ρ_2 הוא סבוב סביב O_2 בזוית -120^0, אזי $\rho_2(B)=C$ וגם $(\rho_3\circ\rho_1)(B)=C$ ובשני המקרים זוית הסיבוב היא -120^0. לפי סעיף ג' 7 בפרק II (תכונות של סיבוב) קיים סיבוב יחיד המעתיק B ל-C עם זוית נתונה. המסקנה היא: $\rho_2=\rho_3\circ\rho_1$, וזה אומר ש-$O_2=O$. לפי הבניה שבהוכחת

המשפט שבסעיף ו' פרק IV (מכפלת סיבובים), נקבל כי $m\angle O_2O_1O_3=60^0$
וגם $m\angle O_1O_3O_2=60^0$ (חצי זוית הסיבוב של ρ_1 ו-ρ_3) לכן המשולש $O_1O_2O_3$
הוא שווה-צלעות מ.צ.ל.

2. על כל אחת מצלעותיו של משולש ABC ומחוצה לו נבנה ריבועים. יהיו O_1,O_2,O_3, מרכזי הרבועים הבנויים על AB, BC, CA בהתאמה (מרכז רבוע הוא נקודת פגישה של אלכסוניו, וגם מרכז המעגל החוסם); ויהיו A', B', C' אמצעי הצלעות BC, CA, AB בהתאמה.
הוכח כי המשולשים $O_1B'O_2$, $O_2C'O_3$, $O_3A'O_1$ הם ישרי זוית ושווי-שוקיים (הזוית הישרה היא בקודקודים B', C', A' בהתאמה) כמו-כן הישרים AO_2, BO_3, CO_1 נפגשים בנקודה אחת.



ציור מס' 16

<u>הוכחה:</u> (ראה איור 16):

נוכיח כי המשולש $O_1A'O_3$ ישר זוית
ושווה-שוקיים: $m\angle O_1A'O_3=90^0$, $|O_1A'|=|A'O_3|$.

ברבוע, האלכסונים ניצבים זה לזה ושווים באורכם,
לכן $|BO_1|=|O_1A|$, $|CO_3|=|O_3A|$

ו-$m\angle BO_1A=m\angle AO_3C=90^0$. אם ρ_1 הוא סיבוב סביב O_1 ו-ρ_3- סיבוב סביב O_3, שניהם בזוית $+90^0$: $\rho_1(B)=A$ ו-$\rho_3(A)=C$,
נובע שהמכפלה $\rho_3\circ\rho_1$ מעתיקה B ל-C: $(\rho_3\circ\rho_1)(B)=C$, אבל במקרה זה, זוית סיבוב המכפלה היא $90^0+90^0=180^0$. לכן אם A' אמצע BC קבלנו ש: $\rho_3\circ\rho_1=\sigma_{A'}$,
המכפלה $\rho_3\circ\rho_1$ היא שיקוף ב-A' (ראה סעיף ז' בפרק IV) ואז
$m\angle O_3A'O_1=90^0$, $|O_1A'|=|A'O_3|$. באופן דומה נוכיח כי $O_2B'O_1$ ו-$O_2C'O_3$ הם משולשים ישרי זוית (ב-B' ו-C') ושווי-שוקיים. כעת, ידוע כי O_2A' אנך-אמצעי ל-BC (O_2 מרכז הרבוע כש-BC היא אחת מצלעותיו), לכן $m\angle BA'O_2=90^0$

ו-$|BA'|=|O_2A'|=|BC|/2$. מתוצאה זאת והתוצאה הקודמת על המשולש $O_1A'O_3$ נובע שאם ρ הוא סבוב סביב A' בזוית 90^0 נקבל: $\rho(B)=O_2$ ו-$\rho(O_3)=O_1$, ז.א. $\rho(BO_3)=O_2O_1$, ואז לפי סעיפים ג'1 ו-ג' 3 בפרק II מקבלים כי $|O_1O_2|=|BO_3|$ וגם כי BO_3 ניצב ל-O_1O_2. באופן דומה AO_2 ניצב ל-O_1O_3 ו-CO_1 ניצב ל-O_2O_3. אם כך AO_2, BO_3, CO_1 הם גבהים של המשולש $O_1O_2O_3$; לכן הם נפגשים בנקודה אחת H. מ.צ.ל.

3. נרשום כאן תרגיל דומה לתרגיל 2 לעיל ונשאיר לקורא לפתור אותו: יהיה $ABCD$ מרובע נתון. על כל אחת מצלעותיו, בונים מחוץ למרובע ריבועים. יהיו O_1,O_2,O_3,O_4 מרכזי ריבועים אלה (O_1 מרכז הרבוע הבנוי על AB, O_2 על BC וכן הלאה לפי הסדר).
הוכח כי O_1O_3 ניצב ל-O_2O_4 ו-$|O_1O_3|=|O_2O_4|$.
כמו-כן הוכח כי $O_1O_2O_3O_4$ הוא בעצמו ריבוע אם ורק אם $ABCD$ היא מקבילית.

* *

....

לכבוד
מערכת "אתגר-גליונות מתמטיקה"
הפקולטה למתמטיקה,
הטכניון-מכון טכנולוגי לישראל
חיפה - 32000

א.נ.,

מצורפת בזה המחאה מספר ....משוכה על בנק ....
סניף ...., על סך -.6 ש"ח, עבור חידוש המנוי על "אתגר - גליונות מתמטיקה" לשנת תשמ"ח.

השם: ____________ כתובת: ____________

מיקוד: ________ טלפון: ________

ביה"ס: ____________ (או צה"ל) ________

כתה: ______ ד.צ.: ________

____
חתימה

התחרות במתמטיקה ע"ש פרופ' י. גרוסמן ז"ל

שנערכה בל"ג בעומר תשמ"ז

בתחרות, שנערכה ביום יח' באייר תשמ"ז - 17.5.87 השתתפו 35 תלמידים מכל רחבי הארץ.

בפרסים זכו:

פרס ראשון - שכר לימוד לשנתיים - ארז לפיד
פרס שני - שכר לימוד לשנה - עודד לבנה
פרס שלישי - שכר לימוד לחצי שנה - איל אלאלוף

הפרסים מיועדים ללימודים בפקולטה למתמטיקה של הטכניון.

שאלה מס. 1

יהיו $a_1,a_2,\dots,a_n$ מספרים טבעיים שונים.

הוכח כי
$$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\dots+\frac{a_n}{n^2}\geq 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$$

מתי יתקיים השויון?

פ ת ר ו ן

נראה תחילה כי אם $b_1<b_2<\dots<b_n$ הוא סידור עולה של $a_1,a_2,\dots,a_n$

אזי
$$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\dots+\frac{a_n}{n^2}\geq b_1+\frac{b_2}{2^2}+\dots+\frac{b_n}{n^2}\,.$$

נשים לב כי הסידור $b_1,\dots,b_n$ מתקבל מ - $a_1,\dots,a_n$ על ידי מספר סופי של תמורות של שני אברים a_i,a_j כאשר $i<j$ אבל $a_i>a_j$. אבל, עבור כל תמורה כזו

$$\left(\frac{a_i}{i^2}+\frac{a_j}{j^2}\right)-\left(\frac{a_j}{i^2}+\frac{a_i}{j^2}\right)=(a_i-a_j)\left(\frac{1}{i^2}-\frac{1}{j^2}\right)>0$$

והטענה נובעת. לבסוף, מאחר ש - $b_1,\dots,b_n$ מספרים טבעיים שונים,

נקבל $b_i \geq i$ לכל i ולכן

$$b_1 + \frac{b_2}{2^2} + \dots + \frac{b_n}{n^2} \geq 1 + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

* * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * *

שאלה מס. 2

משולש ABC נמצא בשלמותו בפנים מצולע.

הוכח כי היקף המשולש ABC אינו גדול מזה של המצולע.

פ ת ר ו ן

באריך את הצלע $a=\overline{BC}$ (בהתאמה $b=\overline{CA}$, $c=\overline{AB}$), מעבר לקדקד C (בהתאמה B,A) עד שתחתוך את המצולע, בנקודה X (בהתאמה Z,Y). על ידי כך יתחלק המצולע לשלשה קוים שבורים, YZ , ZX ו-XY בעלי האורכים x , y ו-z בהתאמה (ראה ציור). אזי, מתוך אי שויון המשולש

$$\overline{XC}+a = \overline{XB} \leq y+\overline{ZB}$$

$$\overline{YA}+b = \overline{YC} \leq z+\overline{XC}$$

$$\overline{ZB}+c = \overline{ZA} \leq x+\overline{YA}$$

$$a+b+c \leq x+y+z$$

* * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * *

שאלה מס. 3

חידק מסוג לגטוס חי דקה אחת, ובסופה הוא מת או מתחלק לשניים, כאשר ההסתברות למקרה השני היא p. בודדו חידק לגטוס אחד בצנצנת וצפו ברביתו. מהי ההסתברות שאוכלוסית הלגטוסים שבצנצנת לא תמות לעד?

פ ת ר ו ן

נאמר שחידק הוא בן אלמות אם אוכלוסית צאצאיו לא מתה בשלמותה לעד.

תהי x ההסתברות שחידק יהיה בן אלמות. זה יקרה, אם ורק אם החידק יתחלק לשנים ולפחות אחד מהחלקים יהיה בן אלמות. בהנחה שהחידק אמנם התחלק, ההסתברות שאף אחד מהחלקים לא יהיה בן אלמות היא $(1-x)^2$, ולכן ההסתברות שלפחות אחד מהם יהיה בן אלמות היא $1-(1-x)^2$, ומאחר שההסתברות להתחלקות היא p, נקבל $x=p(1-(1-x)^2)$.

זוהי משוואה ריבועית ששרשיה הם $x=0$ או $x = 2 - \frac{1}{p}$.

במקרה ש - $p \le \frac{1}{2}$, $2 - \frac{1}{p} \le 0$ וברור שפתרון הבעיה היא $x = 0$.

לעומת זאת, אם $p > \frac{1}{2}$ נראה שפתרון הבעיה הוא $x = 2 - \frac{1}{p} > 0$.

כדי להוכיח זאת, מספיק להראות כי לכל n. ההסתברות x_n שאוכלוסית הצאצאים לא תמות במשך n דורות לפחות מקיימת $x_n > 2 - \frac{1}{p}$, אבל זה נובע בקלות תוך שימוש באינדוקציה מנוסחת הנסיגה $x_{n+1}=p(1-(1-x_n)^2)$ עם תנאי התחלה $x_1 = p$.

* * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * *

שאלה מס. 4

הוכח בלי שימוש בחשבון דיפרנציאלי, כי הבטוי $\tan 3\theta\cot^3\theta$ יכול לקבל כל ערך שהוא שאיננו בין המספרים $17 \pm 12\sqrt{2}$.

פ ת ר ו ן

תוך שימוש בנוסחאות טריגונומטריות סטנדרטיות, נקבל:

$$\tan 3\theta\cot^3\theta = \frac{\tan(2\theta+\theta)}{\tan^3\theta} = \frac{1}{\tan^3\theta}\,\frac{\tan 2\theta+\tan\theta}{1-\tan 2\theta\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\tan^3\theta}\,\frac{(2\tan\theta/(1-\tan^2\theta))+\tan\theta}{1-2\tan^2\theta/(1-\tan^2\theta)} = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{\tan^3\theta(1-3\tan^2\theta)} = \frac{3-x}{x(1-3x)}$$

כאשר $x=\tan^2\theta$ נשאר להראות כי הבטוי $y=(3-x)/x(1-3x)$ מקבל ערך כלשהו שאיננו בין המספרים $17 \pm 12\sqrt{2}$ כאשר x מספר חיובי כלשהו. קל לראות כי השויון האחרון שקול למשואה הריבועית ב-x $3yx^2-(1+y)x+3=0$, ולה יש שורש ממשי אם ורק אם היא בעלת דיסקרימיננט אי-שלילי, דהיינו $(1+y)^2-4\cdot3y\cdot3 \ge 0$ או $(y-17)^2 > 12^2\cdot2$, אי שויון המתקיים אם ורק אם $y \ge 17+12\sqrt{2}$ או $y \le 17-12\sqrt{2}$. נשאר לבדוק כי במקרים אלה אחד השורשים באמת חיובי. אבל זה ברור, כי אחרת יהיה סכום השורשים אי-חיובי ומכפלתם אי שלילית, כלומר, $\frac{1+y}{3y} \le 0$ ו- $\frac{3}{3y} \ge 0$, שני אי שויונות הסותרים זה את זה.

ה ע ר ה:

הערכים הקיצוניים מתקבלים כאשר $x=(17\pm12\sqrt{2})^{-1/2}=3\mp2\sqrt{2}$ או $|\tan\theta|=(3\mp2\sqrt{2})^{1/2}=\sqrt{2}\mp1$ וזה כאשר $|\tan\theta|=1$ או $\theta=(2k+1)\frac{\pi}{8}$ (k שלם).

* * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * *

שאלה מס. 5

נתון משולש ישר זוית ABC. בנה נקודה N בתוך המשולש כך שהזויות NAB, NBC ו-NCA תהיינה שוות ביניהן.

הוכח בניתך, כמה פתרונות לבעיה?

פ ת ר ו ן

בהנחה שקיימת נקודה N כדרוש, נמשיך את הקטע $\overline{AN}$ מעבר ל-N עד חיתוכו בצלע $\overline{BC}$ בנקודה D, אזי

$$\sphericalangle DNB = \sphericalangle NAB + \sphericalangle NBA = \sphericalangle NBC + \sphericalangle NBA = \sphericalangle ABC$$

$$\sphericalangle DNC = \sphericalangle NCA + \sphericalangle NAC = \sphericalangle NAB + \sphericalangle NAC = \sphericalangle BAC$$

לכן,

$$\sphericalangle BNC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle ACB$$

$$\sphericalangle ANB = 180^\circ - \sphericalangle CBA$$

ב נ י ה

תהי ℓ קשת הראיה בזוית $180^\circ-\sphericalangle\overline{ACB}$ של הקטע $\overline{BC}$ מצידו של A

ו-m קשת הראיה בזוית $180^\circ-\sphericalangle CBA$ של הקטע $\overline{AB}$ מצידו של C. נקודת

החיתוך של הקשתות (מחוץ ל-B) היא הנקודה המבוקשת N והיא כמובן יחידה.

ה ו כ ח ה:

מאחר שהקטע $\overline{BC}$ משיק לקשת m (מתוך $\sphericalangle CBA=180^\circ-\sphericalangle ANB$) ומתוך שהנקודה

A חיצונית למעגל ℓ (שוב כי $\overline{AC}$ משיק ל-ℓ), נובע כי הקשתות m,ℓ

נחתכות בנקודה נוספת N.

N פנימית במשולש כי

$$\sphericalangle ANB + \sphericalangle BNC = 180^\circ - \sphericalangle CBA + 180^\circ - \sphericalangle ACB$$

$$= 180^\circ + \sphericalangle BAC > 180^\circ$$

היחידות נובעת כמובן מאי האפשרות לקבל נקודת חיתוך נוספת.

* * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * *

שאלה מס. 6

מתוך קבוצת המספרים 1,4,7,...,97,100 בוחרים באופן אקראי 20 מספרים שונים. הוכח כי תמיד ימצא מתוכם זוג מספרים אחד לפחות שסכומם 104.
מהו המספר המינימלי של מספרים שיש לבחור על מנת להבטיח את קיום התכונה?

פ ת ר ו ן

הזוגות שסכומם 104 הם: 4+100=7+97= ... =49+55, דהיינו,

$\frac{49-4}{3}+1=16$ זוגות כאלה. אם נרצה לבחור מספרים כך שהתכונה לא תתקיים, נוכל לבחור לכל היותר אחד מכל זוג, ובנוסף לכך את המספרים 1 ו-52, כלומר 18 לכל היותר. לכן בבחירת 19 מספרים לפחות יובטח שהתכונה תתקיים.

* * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * *

<u>שאלה מס. 7</u>

נתונים n מספרים שונים $a_1,\dots,a_n$ הסדורים לפי גדלם. מהו המספר המכסימלי של שלשות a_i,a_j,a_k המהוות סדרה חשבונית?

<u>פ ת ר ו ן</u>

נתבונן באחד המספרים הנתונים a_i,a_j,a_k, a_j, ונשאל בכמה אפנים יוכל להיות אבר אמצעי של סדרה חשבונית. ברור כי כאשר $j=1$, זה לא יקרה אף פעם, כאשר $j=2$ תהיה סדרה אחת לכל היותר (כאשר $i=1$) כאשר $j=3$ שתי סדרות לכל היותר (כאשר $i=1$ או $i=2$), וכן הלאה עד שנעבור את מחצית מספר המספרים הנתונים, מטעמי סימטריה, נקבל התנהגות דומה עבור המחצית השניה (דהיינו, כאשר $j=n$, $j=n-1$, $j=n-2$ וכו'). לכן, המספר המכסימלי האפשרי של סדרות חשבוניות יהיה, עבור n זוגי,

$$2(0+1+2+\dots+\frac{n-2}{2})=\frac{n(n-2)}{2}$$

ועבור n אי־זוגי

$$2(0+1+2+\dots+\frac{n-3}{2})+\frac{n-1}{2}=\frac{(n-1)^2}{2}$$

מספר זה יתקבל במקרה ש-n המספרים הנתונים יוצרים בעצמם סדרה חשבונית.

* * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * *

<u>פתרונות לבעיות מ"אתגר-גליונות מתמטיקה"</u> - גליון מספר 6

35. עבור כל מספר טבעי n מגדירים

$$f(n) = 1^n + 2^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + (n-2)^3 + (n-1)^2 + n$$

מהו הערך המינימלי של $f(n+1)/f(n)$?

פ ת ר ו ן

עבור $n\geq 5$ רואים כי

$$f(n+1) - 3f(n) = 1^{n+1} + 2^{n} + 3^{n-1} \dots + (n+1)$$

$$- 3\left\{1^{n} + 2^{n-1} + 3^{n-2} \dots + n\right\}$$

$$= -2 -2^{n-1} + (4^{n-2} - 3\cdot 4^{n-3}) + \dots + n(n-3) + (n+1)$$

$$> -2 - 2^{n-1} + 4^{n-3} > 0$$

ולכן $f(n+1)/f(n)>3$. מאידך קל לראות כי

$$f(1)=1$$

$$f(2)=3 = 3f(1)$$

$$f(3)=8 = \frac{8}{3}f(2)$$

$$f(4)=22 = \frac{11}{4}f(3)$$

ולכן הערך המינימלי של $f(n+1)/f(n)$ הוא $f(3)/f(2)$, דהיינו $2\frac{2}{3}$.

* * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * *

36. עבור כל קבוצה S של מספרים טבעיים, נסמן ב- $m(S)$ המכפלה המשותפת הקטנה ביותר של האיברים של S. אם X היא קבוצה כלשהי של 6 מספרים טבעיים עוקבים, הוכח כי אי אפשר לחלק את X לשתי קבוצות זרות U,V (דהיינו ללא איבר משותף) כך ש- $m(U) = m(V)$.

פ ת ר ו ן

בקבוצה X ישנם 3 מספרים זוגיים, נגיד a , $(a+2)$, $(a+4)$.
אם $(a+2)$ מתחלק ב-4 אזי a ו- $(a+4)$ לא יתחלקו ב-4 ולכן אם נציב את $(a+2)$ ב- U יצא כי $m(U)$ יתחלק ב-4 ו- $m(V)$ לא יהיה כזה ומכאן ש- $m(U) \neq m(V)$.
אם גם a וגם $(a+4)$ מתחלקים ב-4 אזי בדיוק אחד מהם יתחלק ב-8 והוא יהיה המספר היחידי ב- X עם תכונה זו. אם נציב אותו ב- U יהיה $m(U)$ כפולה של 8 בעוד $m(V)$ איננו כפולה של 8.

* * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * *

37. אם x,y,z הם מספרים ממשיים המקיימים

$$x + y + z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6$$

מהו הערך המירבי של $x^2y + y^2z + z^2x$?

פ ת ר ו ן

יש לנו $x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 6$

ולכן $x^2 + xy + y^2 = 3$

בעוד

$$\begin{aligned} F &= x^2y + y^2z + z^2x \\ &= x^2y - y^2(x+y) + x(x+y)^2 \\ &= x(x^2+xy+y^2) - y(x^2+xy+y^2) + 3x^2y \\ &= 3(x-y+x^2y). \end{aligned}$$

אבל ראינו כי

$$y^2 + xy + (x^2-3) = 0$$

ולכן

$$y = \frac{-x \pm D}{2}$$

כאשר כתבנו

$$D = \sqrt{3(4-x^2)}$$

אם נציב את זה ב-F נקבל

$$F = \frac{3}{2}\left\{(3x - x^3) \pm (x^2 - 1)D\right\}$$

כדי למצוא את הערכים הקיצוניים, נגזור ונקבל

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{dF}{dx} = 3(1-x^2) \pm \left[2xD - \frac{3x(x^2-1)}{D}\right]$$

$$= 3(1-x^2) \pm \frac{x}{D}\left[2D^2-3(x^2-1)\right]$$

$$= 3(1-x^2) \pm \frac{9x(3-x^2)}{D}$$

ולכן עלינו לחפש את הערכים הקיצוניים בין הפתרונות של המשואה

$$9(1-x^2)^2 = \frac{81x^2(3-x^2)^2}{D^2}$$

שזה מוביל ל -

$$x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 1 = 0$$

נציב $U=x^2-2$ ונקבל

$$U^3-3U+1 = 0$$

אם נכתוב עכשיו

$$U = 2\cos\Theta$$

נקבל

$$8\cos^3\Theta - 6\cos\Theta + 1 = 0$$

אבל

$$\cos3\Theta = 4\cos^3\Theta - 3\cos\Theta$$

ולכן

$$2\cos3\Theta = -1$$

עבור x,y,z אלה יהיה

$$F = x^2y + y^2z + z^2x$$

$$= 8\,(\cos^2 20^0\cos 40^0 + \cos^2 40^0\cos 80^0 - \cos^2 80^0\cos 20^0)$$

$$= 4\left\{\cos 40^0(1+\cos 40^0) + \cos 80^0(1+\cos 80^0)\right.$$

$$\left. - \cos 20^0(1+\cos 160^0)\right\}$$

$$= 4\left\{(\cos 40^0 + \cos 80^0 - \cos 20^0) +\right.$$

$$\left. + (\cos^2 40^0 + \cos^2 80^0 + \cos^2 20^0)\right\} = 6$$

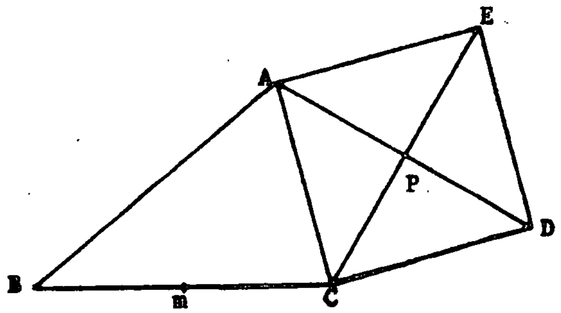
נזהו הערך המירבי של F.

* * * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * *

38. על הצלעות AC , AB של משולש ABC כלשהו בונים רבועים.
אם PQ הם מרכזי הרבועים האלה ו-M הוא האמצע של BC,
הוכח כי $MP = MQ$ והזוית $\measuredangle PMQ$ היא 90^0.

<u>פתרון</u>

נפתור בעיה זו בעזרת מספרים מרוכבים



ניקח $A = z = x + iy$, $B=-a$, $C=a$, $M=0$ כאשר a ממשי.
אזי $CA = z-a$ ולכן $CD = -i\cdot CA = i(a-z)$

$$3\Theta = 120^0 \ , \ 240^0 \ , \ 480^0$$

$$\Theta = 40^0 \ , \ 80^0 \ , \ 160^0$$

$$U = 2\cos 40^0 \ , \ 2\cos 80^0 \ , \ 2\cos 160^0$$

הערכים האפשריים עבור x^2 הם איפוא:

$$2(1+\cos 40^0) = 4\cos^2 20^0$$

$$2(1+\cos 80^0) = 4\cos^2 40^0$$

$$2(1+\cos 160^0) = 4\cos^2 80^0$$

ואלה של x הם: $\pm 2\cos 20^0 \ , \ \pm 2\cos 40^0 \ , \ \pm 2\cos 80^0$

מאחר שקיימת סימטריה בין x,y,z יהיו אלה גם הערכים האפשריים של y,z. יש איפוא לבחור מבין הערכים האלה שלושה שיקיימו:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{array}\right\}$$

וקל לאשר כי האפשרויות הן:

$$x = -2\cos 20^0 \ , \ y = 2\cos 40^0 \ , \ z = 2\cos 80^0$$

וגם $x = 2\cos 20^0 \ , \ y = -2\cos 40^0 \ , \ z = -2\cos 80^0$

לדוגמא במקרה הראשון

$$x + y + z = 2\cos 20^0 + 4\cos 20^0 \cos 60^0$$

$$= -2\cos 20^0 + 2\cos 20^0 = 0$$

בעוד $x^2 + y^2 + z^2 = 4(\cos^2 20^0 + \cos^2 40^0 + \cos^2 80^0)$

$$= 2(1 + \cos 40^0 + 1 + \cos 80^0 + 1 + \cos 160^0)$$

$$= 6 + 2(\cos 40^0 + \cos 80^0 - \cos 20^0) = 6$$

ומכאן ש -

$$D = a+i(a-z)$$

אבל

$$P = \frac{1}{2}(A+D)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{z+a+i(a-z)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(1+i)a+(1-i)z\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(1+i)a+(1-i)(x+iy)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(x+y+a) - i(x-y-a)\right\}$$

בדרך דומה מקבלים

$$Q = \frac{1}{2}\left\{(x-y-a) + i(x+y+a)\right\}$$

מכאן שהשפוע של MP הוא

$$m_P = \frac{x-y-a}{x+y+a}$$

ואילו זה של MQ הוא

$$M_Q = -\frac{x+y+a}{x-y-a}$$

מאחר ש- $m_P m_Q = -1$ אנו מסיקים כי $\measuredangle QMP=90^0$

מאידך

$$MP^2 = \frac{1}{4}\left\{(x+y+a)^2 + (x-y-a)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + a^2 + 2ay)$$

וקל לאשר כי גם

$$MQ^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + a^2 + 2ay).$$

* * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * *

.39 AB,BC הם שני מיתרים שווים של מעגל בעל רדיוס r. D היא נקודה בפנים המעגל כך שהמשולש DBC הוא שווה צלעות והישר AD חותך את המעגל ב-E.

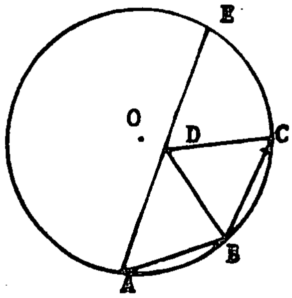
הוכח כי DE = r.

פ ת ר ו ן

יהיה O מרכז המעגל

ונגדיר $\alpha = \measuredangle COB = \measuredangle AOB$

ואז $AB = BC = CD = DB = 2r \sin \alpha/2$



מאידך $\measuredangle AOC = 2\alpha$ ולכן $\measuredangle AEC = \alpha$

ומכאן ש - $\measuredangle ABC = \pi - \alpha$

אבל $\measuredangle DBC = \pi/3$

ולכן $\measuredangle ABD = \pi - \alpha - \pi/3$

$= 2\pi/3 - \alpha$

מאחר ש - $BA = BC = BD$

יוצא ש - $\measuredangle BAD = \measuredangle ADB = \frac{1}{2}\left\{\pi - (2\pi/3 - \alpha)\right\}$

$= \pi/6 + \alpha/2$

וכי $\measuredangle CDE = \pi - \pi/3 - (\pi/6 + \alpha/2) = \pi/2 - \alpha/2$

אבל $\measuredangle DEC = \frac{1}{2} \measuredangle AOC = \alpha$

ולכן

$$\frac{DE}{DC} = \frac{\sin(\pi/2 - \alpha/2)}{\sin \alpha} = \frac{1}{2 \sin \alpha/2}$$

$$DE = \frac{1}{2\sin \alpha/2} \cdot 2r \sin \alpha/2 = r$$

* * * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * *

46. נתונות ארבע נקודות במישור. הראה איך לבנות מלבן, בעל שטח נתון אשר צלעותיו עוברות דרך הנקודות האלה. האם הדבר תמיד אפשרי?

- - - - - - - - - - - - - - -

47. חשב את הסכום

$$2^n - n\cdot 2^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!}\cdot 2^{n-4} - \frac{n(n-3)(n-6)}{3!}2^{n-6} + \dots$$

כאשר n הוא מספר שלם גדול מ-2.

- - - - - - - - - - - - - - -

48. קרה קלקול למחשב הכיס שלך ואיננו מסוגל לבצע כפל. מאידך הוא עדיין מסוגל לבצע חיבור וחיסור וגם, עבור כל $x\neq 0$, לחשב $1/x$.
האם תוכל בעזרת מחשב במצב זה לחשב, עבור כל x,y נתונים את המכפלה xy?

- - - - - - - - - - - - - - -

49. הוכח כי ניתן להציג כל מספר טבעי n בצורה

$$n = \epsilon_1\cdot 1^2 + \epsilon_2\cdot 2^2 + \epsilon_3\cdot 3^2 + \dots + \epsilon_m\cdot m^2$$

כאשר m הוא מספר טבעי מתאים ו- $\epsilon_i = \pm 1$ $(i=1,2,\dots,m)$.

- - - - - - - - - - - - - - -

50. אם b, a הם מספרים ממשיים ו- $b>a>0$, נגדיר

$x_o=a$, $y_o=b$.

עבור כל $n\geq 1$, נגדיר

$$x_n = \left\{x_{n-1}(x_{n-1}+y_{n-1})/2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$y_n = \left\{y_{n-1}(x_{n-1}+y_{n-1})/2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

הוכח כי y_n, x_n שואפים שניהם, כאשר n שואף לאינסוף,

לערך

$$2^{-\frac{1}{2}}(b^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}(\ln b - \ln a)^{-\frac{1}{2}}$$

- - - - - - - - - - - - - -

51. הוכח כי אי אפשר לרצף קבוצה קמורה במישור על ידי מספר סופי של רבועים לא קמורים.

- - - - - - - - - - - - - -

52. n תחנות דלק מסודרות במעגל. בכולן יחד יש כמות דלק המספיקה בדיוק לסבוב שלם. להוכיח שיש תחנה בה ניתן להתחיל ולסיים את הסבוב.

- - - - - - - - - - - - - -

53. נתונות n נקודות אדומות ו- n נקודות ירוקות במצב כללי במישור (אין ישר שעובר דרך יותר משתי נקודות).
להוכיח שניתן לחבר נקודות אדומות לנקודות ירוקות על ידי קטעים ישרים, בלי שהקטעים יחתכו.

- - - - - - - - - - - - - -