יחזקאל (אדמונד) לַנְדַאו

עַל אַפְּרוֹקְסִימַצְיוֹת דִיוֹפַנְטִיוֹת

I

עַל אַפְּרוֹקְסִימַצִיּוֹת דִיוֹפַנְטִיּוֹת

מאת יחזקאל (אדמונד) לַנְדַאו, גטינגן.

תרגם ישראל ולפסון.

---

1. מקְרוֹנֶקֶר יש לנו

המשפט: יהי $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$ ממשיים; וכש n_ν שלמים, יהי $\sum\limits_1^m n_\nu \vartheta_\nu$ שלם רק אם כל $n_\nu = 0$. יהי $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ ממשיים. אז אפשר למצוא לכל $\varepsilon > 0$ ולכל τ ממשי מספר שלם $t \geqq \tau$ ו x_ν שלמים כאלה, שיהיה

$$|t\vartheta_\nu - \alpha_\nu - x_\nu| < \varepsilon \qquad (\nu = 1, \ldots, m). \tag{1}$$

מר הַרְדִי ומר לִטְלְווּד דנו בתחלת מאמרם *Some problems of Diophantine Approximation* [Acta Mathematica, כרך XXXVII (1914), עמוד 155—239] על הוכחות שונות למשפט הזה; אבל גם הפשוטה מכלן היא מסובכת כל כך, עד שהם מרצים אותה רק בעד $m \geqq 3$ ומניחים לקורא את ההוכחה האנלוגית מ m ל $m+1$. והנה מר וַיל במאמרו *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins* [Mathematische Annalen, כרך LXXVII (1916), עמוד 313—352] הורה דרך חדשה להוכחת המשפט הזה והגיע לידי משפטים יותר כלליים. אם נשוה לנגד עינינו רק את המשפט הנזכר ונשתמש בעקרו של דבר ברעיונו היסודי של מר וַיל, אז תצא לנו הוכחה המפתיעה בקצורה.

אנו רשאים להניח $\tau = 1$ (אם לא, הרינו מציגים $\alpha_\nu - [\tau]\vartheta_\nu$ במקום α_ν ו $t - [\tau]$ במקום t) ו $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

יְצַיֵן $f(y)$ את הפונקציה הזוגית המקשרת בקוים ישרים את הנקודות $(0, \varepsilon)$, $(\varepsilon, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ושמחזורה הוא 1. $f(y)$ אפשר לתאר בשורת קוסינוסים:

$$f(y) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 A_n \cos 2\pi n y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{2\pi n y i} \qquad (A_0 > 0,\ A_{-n} = A_n)$$

וכאן מתכנס

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} | A_n |. \tag{2}$$

(בערכים המדויקים של $A_0 = \varepsilon^2$, $A_n = \frac{1 - \cos 2\pi n \varepsilon}{2\pi^2 n^2}$ בעד $n > 0$ אין ענין לנו כאן.)
המשפט מחליט איפוא: יש מספר שלם $t \geqq 1$, אשר

$$\prod_{\nu=1}^{m} f(t\vartheta_\nu - \alpha_\nu) \neq 0. \tag{3}$$

בעד מספר שלם $\omega \geqq 1$, מפני התכנסותה של (2), יהיה

$$\frac{1}{\omega} \sum_{t=1}^{\omega} \prod_{1}^{m} f(t\vartheta_\nu - \alpha_\nu) = \sum_{\substack{n_\nu = -\infty \\ \nu = 1, \ldots, m}}^{\infty} \prod_{1}^{m} A_{n_\nu}\, e^{-2\pi i \sum_{1}^{m} n_\nu \alpha_\nu} \frac{1}{\omega} \sum_{t=1}^{\omega} e^{t \cdot 2\pi i \sum_{1}^{m} n_\nu \vartheta_\nu}; \tag{4}$$

כאן הסכום מימין מתכנס בהחלט ובמדה שוה ב־ω, כי הן אברו הכללי בערכו המחלט הוא $\leqq \prod_{1}^{m} | A_{n_\nu} |$. האבר עם $n_1 = n_2 = \ldots = n_m = 0$ הוא A_0^m; וכל אבר אחר רץ אל 0, אם $\omega \to \infty$, מפני

$$\left|\sum_{t=1}^{\omega} e^{t \cdot 2\pi i \sum_1^m n_\nu \vartheta_\nu}\right| \leqq \frac{2}{\left|e^{2\pi i \sum_1^m n_\nu \vartheta_\nu} - 1\right|}.$$

צדה הימני של (4) רץ לפי זה אל המספר החיובי A_0^m. לכן יש ω כזה, שצדה השמאלי של (4) אינו אפס; כלומר יש מספר שלם $t \geqq 1$ עם (3).

2. ויחד עם זה אנו מקבלים כאן הערכה עליונה של t בתור פונקציה של ε והמספרים ϑ_ν; ובזה ימלא אחד מן האיחוּיים, שנאמרו בעמוד 172 של מאמר הַרְדִי־לִטְלְוּד. אין לתתפלא, שכאן מופיעה הפונקציה

$$\mu_k = \underset{\substack{|n_\nu| \leqq k \\ \sum_1^m n_\nu^2 > 0}}{\mathrm{Max.}} \frac{1}{\left|e^{2\pi i \sum_1^m n_\nu \vartheta_\nu} - 1\right|} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

שתנהגתה בהתגדלותו של k משמשת מדה לאי־התליה הקַוית של המספרים ϑ_ν. מפני

$$A_0 = \varepsilon^2,\ 0 \leqq A_n \leqq \frac{1}{\pi^2 n^2}\ (n > 0),\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n = f(0) = \varepsilon$$

הנה, בהשאירנו לנו את הזכות לתקנות לk איזה ערך שנרצה, הבטוי (4) הוא

$$\geqq \varepsilon^{2m} - \sum{}' \prod_1^m A_{n_\nu} \frac{2\mu_k}{\omega} - \sum{}'' \prod_1^m A_{n_\nu};$$

כאן Σ' משתרע על $|n_\nu| \leqq k$ זולת $n_1 = n_2 = \ldots = n_m = 0$, ו־$\Sigma''$ על כל הסיסטמות זולת $|n_\nu| \leqq k$. כאן יהיה

$$\Sigma' \leqq \frac{2\mu_k}{\omega}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\right)^m = \frac{2\,\varepsilon^m \mu_k}{\omega},$$

$$\Sigma'' = \left(\sum_{n=-k}^{k} A_n + 2\sum_{n=k+1}^{\infty} A_n\right)^m - \left(\sum_{n=-k}^{k} A_n\right)^m \leqq m\cdot 2\sum_{n=k+1}^{\infty} A_n \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\right)^{m-1} \leqq \frac{2\,m\,\varepsilon^{m-1}}{\pi^2}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \frac{2\,m\,\varepsilon^{m-1}}{\pi^2 k}.$$

כאן אניח

$$k = [m\,\varepsilon^{-m-1}] + 1,\ \ \omega = [4\,\varepsilon^{-m}\mu_k] + 1.$$

אז יהיה

$$\Sigma' < \frac{2\,\varepsilon^m \mu_k}{4\,\varepsilon^{-m}\mu_k} = \frac{\varepsilon^{2m}}{2}, \qquad \Sigma'' < \frac{2\,m\,\varepsilon^{m-1}}{\pi^2\, m\,\varepsilon^{-m-1}} < \frac{\varepsilon^{2m}}{2},$$

$$\frac{1}{\omega}\sum_{t=1}^{\omega}\prod_{1}^{m} f(t\,\vartheta_\nu - \alpha_\nu) > \varepsilon^{2m} - \frac{\varepsilon^{2m}}{2} - \frac{\varepsilon^{2m}}{2} = 0.$$

המספר $t \geqq 1$ היותר קטן, המקים את אי־השוויונות (1) בעד $\varepsilon < \frac{1}{2}$ וב x_ν מתאימים, הוא איפוא לכל היותר שוה לערך הנזכר למעלה $\omega = \omega\,(\varepsilon,\ \vartheta_\nu)$.

כז כסלו תרפ״ב