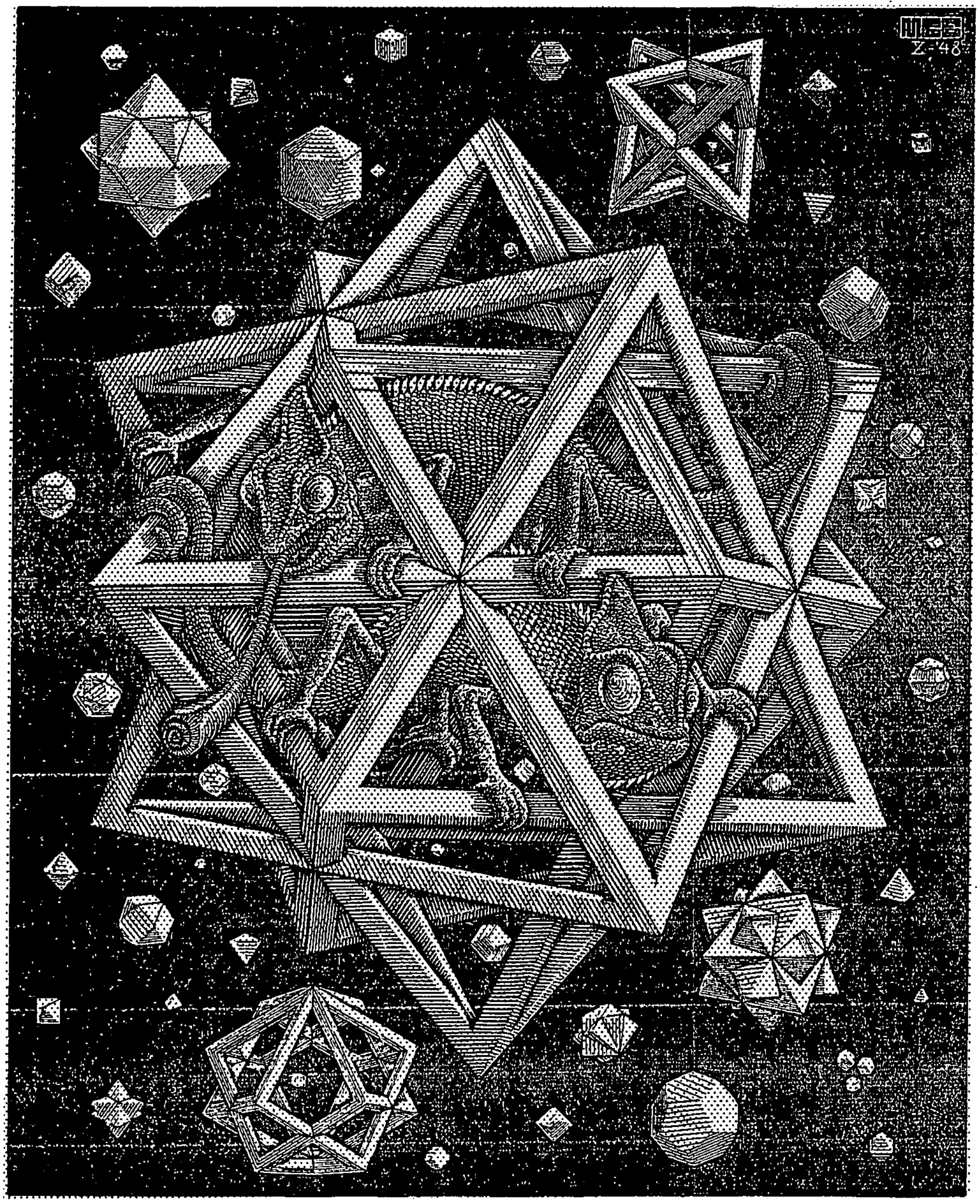
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס׳ 12
חשון תשמ״ט - נובמבר 1988



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון וייצמן למדע
רחובות

בחסות המרכז המדעי י.ב.מ. ישראל

תוכן העניינים

מוצא לאור ע"י הפקולטות למתמטיקה במכון וייצמן ובטכניון.

המערכת: פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שימושית, מכון וייצמן.

פרופ' א. ברמן ודו"ר צ. הראל, הפקולטה למתמטיקה, הטכניון.

מען המערכת: היחידה לפעולות נוער, מכון ויצמן למדע, רחובות, 76100,

טל. 08-482970. ISSN 0334 - 0201

עיבוד תמלילים והדפסה: קתדרה - הוצאה לאור טל. 08-411690

דבר המערכת

אנו מתנצלים על האיחור המשמעותי בהוצאת גליון זה,
דבר שנגרם ע"י כמה תקלות וקשיים טכניים בקשר
להעברת המערכת מחיפה לרחובות.

כפיצוי חלקי אנו מגישים בזה גליון עבה יותר מן
הרגיל ונשתדל להבא להוציא את החוברות בזמנן.

בעמוד של גליון זה תמצאו דו"ח על האולימפיאדה
הבינלאומית במתמטיקה שהתקיימה באוסטרליה ביולי
1988.

הישגי נבחרת ישראל היו מכובדים מאד ומעודדים אותנו
לנסות להשיג עוד יותר בשנת 1989. בהקשר זה אנו
מפנים את תשומת לב קוראנו לעמוד 28, תוך תקוה
שרבים מביניהם ימצאו לאפשר לשתף פעולה, במיוחד בכך
שישלחו פתרונות על השאלות המוצעות שם.

השערות פתוחות

והשערות פתורות

ר. אהרוני (חיפה)

(תקציר של הרצאה שניתנה ב-30.5.88 בטכניון במסגרת הסדרה "תגליות המשנות את פני המאה").

כששואלים אותי למקצועי ואני עונה "מתמטיקאי" אני נתקל לעיתים קרובות בתגובה: "מה, האם יש עוד מה לחקור במתמטיקה? האם עדין לא מצאו את המכנה המשותף? האם לא פתרו את כל המשוואות הריבועיות?"

מעט קשה לי אז להסביר מה אני עצמי חוקר, משום שהדברים טכניים מדי. אבל כדי להסביר שיש עדין מה לחקור במתמטיקה, אני יכול לספר על בעיות שקל מאוד לנסחן, ושעדין לא ידועה להן תשובה. שאלות אלו הן ההשערות המפורסמות של המתמטיקה. השערות אינן חייבות להיות בעלות ניסוח פשוט דוקא, אבל ההשערות הפשוטות הן אלו שזוכות לפרסום, מסיבות מובנות.

הנה השערה עתיקת יומין, פשוטה במיוחד לניסוח. היא נשאלה ע"י גולדבך, במכתב שכתב ב-1750 לאוילר.

השערת גולדבך: כל מספר זוגי הוא סכום של שני מספרים ראשוניים. למשל: 6=3+3, 8=5+3, 10=7+3, 12=7+5,...

אין ספק שהשערה זו נכונה. למעשה, ברור גם שככל שהמספר הזוגי גדול יותר, כך גדל מספר האפשרויות לכתבו כסכום של שני ראשוניים. למשל:

$$100=97+3=89+11=83+17=71+29=59+41=35+47$$

הנה נימוק "היוריסטי" (לא לגמרי מדויק) לכך. הוא מסתמך על משפט על צפיפות המספרים הראשוניים.

נסמן ב-$\pi(n)$ את מספר המספרים הראשוניים הקטנים מ-n. [למשל- $\pi(10)=4$, משום שהמספרים הראשוניים הקטנים מ-10 הם 7, 5, 3, 2.]. המשפט אומר כי שווה "בערך" ל- $n/\ln n$ (הניסוח המתמטי המדויק:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\pi(n)\cdot \ln n/n\right]=1$$

עתה ל-n כלשהו, מספר הדרכים לכתוב את n כ-x+y הוא n-1

(למשל: $100=99+1=98+2=\ldots=50+50=49+51=\ldots=1+99$)

עכשיו, לפי המשפט בכ- $n/\ln n$ בדרכים אלו x הוא ראשוני (משום שזהו מספר המספרים הקטנים מ-n שהם ראשוניים), כלומר - מספר הפירוקים $n=x+y$ שבהם x ראשוני הוא בערך $n/\ln n$.

עתה, בכ- $1/\ln n$ מהפירוקים האלה גם y ראשוני (אנו מסתמכים כאן על הנחה אינטואיטיבית ולא מוכחת שראשוניותו של y אינה תלויה בראשוניותו של x). כלומר, מספר הפירוקים $n=x+y$ שבהם גם x וגם y ראשוניים הוא בערך $n/(\ln n)^2$ וכידוע זה שואף לאינסוף עם n.

כלומר- לא זו בלבד שסביר שניתן לפרק את n כסכום של שני ראשוניים, אלא שאפשר לעשות זאת במספר דרכים השואף לאינסוף כש-n שואף לאינסוף.

כיום קרובים אנחנו בצורה כמעט מרגיזה לפתרון ההשערה. ב-1937 הוכיח וינוגרדוב שכל מספר <u>אי-זוגי</u> ניתן לכתיבה כסכום של שלושה מספרים ראשוניים, וב-1966 הוכיח צ'ן ג'ינג רון שכל מספר זוגי ניתן לכתיבה ב-$p+q\cdot r$, כאשר r, q, p, ראשוניים.

נעבור להשערה נוספת בתורת המספרים, שהיא בודאי ההשערה הידועה ביותר במתמטיקה. זוהי השערת פרמה, שאם n, z, y, x, הם מספרים טבעיים ו-$n>2$, אז לא יתכן ש- $x^n+y^n=z^n$. (כידוע, ל-$n=2$ יש שלשות z, y, x, המקיימות $x^2+y^2=z^2$, אלו הן השלשות הפיתגוראניות, למשל $3^2+4^2=5^2$) פרסומה של ההשערה בא לה מכך שהיא קרוב לודאי ההשערה הותיקה ביותר בין ההשערות הפתוחות (מאמצע המאה ה-17). וסיבה נוספת - פרמה רשם את השערתו בשולי ספר האריתמטיקה של דיופנטוס, והוסיף הערה שיש לו הוכחה מופלאה, אך אין די מקום בשוליים לרושמה. דורות רבים היו משוכנעים שאכן היתה לפרמה הוכחה וניסו לשחזרה. כיום, לאחר למעלה מ-300 שנים של נסיונות סרק להוכיח את ההשערה, מתחילים להעלות את הסברה שאולי השלה פרמה את עצמו. דבר זה קרה גם לרבים אחריו. מדי שנה מגיעות עשרות הוכחות מוטעות של חובבים לידיהם של אנשי תורת המספרים. אך הדבר קורה גם למתמטיקאים מקצועיים - במאה שעברה לקח זמן רב לעולם המתמטי למצוא טעות בהוכחה של מתמטיקאי בשם קומר (שאמנם לא היתה פתרון מלא, אך השיגה התקדמות רבה). לפני מספר שנים קרה דבר דומה להוכחה של מתמטיקאי יפני אשר שמועות על הוכחתו הגיעו גם לעיתונות הכללית. בכל זאת הושגה התקדמות רבה במשך השנים. כיום ידועה ההשערה לגבי כל $n<125,000$. ולפני כשנתיים הוכיח Faltings השערה ותיקה של Mordell שממנה נובע שלכל n קבוע גדול מ-2 מספר השלשות z, y, x, המקיימות את משוואת פרמה, אם אמנם ישנם כאלה, הוא סופי (השערת פרמה היא שמספר זה הוא אפס, אבל היותו סופי היא התקדמות! השערת Mordell דנה במשוואות דיופנטיות כלליות. משוואה דיופנטית היא משוואה פולינומיאלית בכמה משתנים, שבה דורשים שהפתרונות יהיו שלמים).

והנה עוד השערה בתורת המספרים:
זוג מספרים ראשוניים שההפרש בינהם 2 נקרא זוג "ראשוניים תאומים" לדוגמא: 3,5; 11,13; 29,13; 101,103; הם זוגות כאלה. השאלה: האם יש אינסוף זוגות ראשוניים תאומים? גם כאן, משיקולי הסתברות נראה שהתשובה חיובית, אבל לא ידועה הוכחה.

מהי חשיבותן של ההשערות האלה? אין להן כל חשיבות בפני עצמן. מנכונותה או אי נכונותה של השערת פרמה לא תנבע שום מסקנה חשובה, וגאוס התבטא פעם

שהשערת פרמה איננה מעניינת אותו. אבל יש להן חשיבות עקיפה רבה, בכך שהן מעוררות מחקר וגורמות לפיתוחן של תאוריות חשובות. המתמטיקאים זקוקים לפעמים לשאלות שאליהן יוכלו לשאת את נפשם, ושאולי לא יזכו לפותרן, אך הן תעוררנה אותם לחקור.

אי אפשר לספר על השערות מתמטיות מבלי להזכיר את אוסף ההשערות המפורסם ביותר, הלא הוא אוסף "בעיות הילברט". הילברט היה המתמטיקאי הגדול של תחילת המאה, ובקונגרס מתמטי ב-1900 הציג 23 בעיות תוך הבעת תקוה שימצאו את פתרונן במרוצת המאה. רובן אכן נפתרו בינתיים. כאן נזכיר רק שלוש מהן, בתחום הנקרא "לוגיקה מתמטית". לשלוש הבעיות ניתנה תשובה מאותו סוג, שמיד נראה מהו, ושלושת הפתרונות היו נקודת ציון חשובה ביותר בהתפתחות הלוגיקה המתמטית, ענף שפרץ ושגשג במאה זו, לא מעט בגלל בעיות הילברט.

בעיה 1: האם קיים אלגוריתם המכריע לכל נוסחא בתורת המספרים אם ניתן להוכיחה או לא? ובלשון ימינו: האם ניתן לכתוב תכנית מחשב שבהינתן לה נוסחה תוכל לספק לה הוכחה פורמלית, או תחליט שאינה ניתנת להוכחה? שנים רבות חיפשו מתמטיקאים את האלגוריתם המבוקש עד שב-1930 הוכיח גדל, שהיה אז בן 25, שאין אלגוריתם כזה. הוא הוכיח דבר נוסף, מפתיע עוד יותר: קיימת נוסחה F בתורת המספרים שאי אפשר להוכיחה, ואי אפשר להוכיח את שלילתה! לא זו בלבד, אלא שניתן להוכיח שאם גם תורת המספרים חסרת סתירה, אז F נכונה! ("חסרת סתירה" פירושו שאי אפשר להוכיח נוסחה וגם להוכיח את שלילתה). מכאן נובע גם שאי אפשר להוכיח שתורת המספרים חסרת סתירה (משום שאחרת ניתן היה להוכיח את F). כל זה היווה מהפכה שלמה בחשיבה מתמטית - לוגית ופתח ענפי מחקר חדשים בלוגיקה.

הבה נראה ש-F וגם שלילתה אינן ניתנות להוכחה. לשם כך נעיר תחילה שאם אפשר להוכיח נוסחה G אז G נכונה במספרים טבעיים. מה שניתן להוכיח, נכון.

לכן, אם F ניתנת להוכחה, כי אז היא נכונה. אבל פירוש הדבר, לפי משמעותה של F, שהיא לא ניתנת להוכחה. לכן מהנחת קיום הוכחה ל-F נובעת סתירה. הראינו

בכך של-F אין הוכחה (שוב לפי המשמעות של F) אבל פירוש הדבר ש-F נכונה. לכן אין גם להוכיח את שלילתה של F, משום שאחרת שלילתה של F הינה נכונה.

אגב, אף כי הנוסחה F מסובכת מבחינה טכנית, הרעיון העומד מאחורי בנייתה פשוט: F היא נוסחה הנכונה במספרים הטבעיים אם ורק אם אין ל-F הוכחה. (כלומר - F "אומרת" על עצמה : "אינני ניתנת להוכחה").

בעייה שנייה של הילברט היתה - מצא אלגוריתם המכריע, בהינתן לו משוואה דיופנטית, אם קיים לה פתרון או לא (כזכור - במשוואה דיופנטית דורשים פתרון שלם!). התשובה לבעייה זו חיכתה עד 1970, וניתנה ע"י מתיאשביץ, רוסי שהיה אז בן 19. האם ניחשתם אותה? כמובן - אין אלגוריתם כזה. במהלך ההוכחה למשפטו של מתיאשביץ מוכחת העובדה המפתיעה מאוד הבאה: קיים פולינום ב-10 משתנים, שאם מציגים בו את כל המשתנים הטבעיים האפשריים וזורקים את ההצבות הנותנות מספר שלילי כתוצאה, מקבלים כתוצאות את כל המספרים הראשוניים ורק אותם! (הוכח לעצמך שהדבר איננו ניתן להיעשות עם פולינום במשתנה אחד).

לקראת סוף המאה ה-19 הוכיח קנטור שיש יותר מספרים ממשיים מאשר מספרים טבעיים.

משמעות הדבר היא זו: אי אפשר להתאים באופן חד-חד ערכי לכל מספר טבעי n מספר ממשי x כך שכל המספרים הממשיים יופיעו ברשימה $x_0, x_1, x_2, \ldots$ (יש "יותר מדי" ממשיים, כך שאי אפשר "לספור" את כולם). ההוכחה כה פשוטה ויפה שכדאי להביאה כאן :

נניח כי:

$$x_0 = a.\ a_1^{(0)}\ a_2^{(0)} \ldots\ldots$$

$$x_1 = a.\ a_1^{(1)}\ a_2^{(1)} \ldots\ldots$$

$$x_2 = a.\ a_1^{(2)}\ a_2^{(2)} \ldots\ldots$$

בהצגה עשרונית.

אזי נגדיר:

$$S = a.\overset{(0)}{}\ a_1^{(1)}\ a_2^{(2)}\ a_3^{(3)}$$

ברור כי בפיתוח של S, הספרה במקום ה-n אחרי הנקודה שוה לזאת שבמקום ה-n ב-r_n. עכשיו, נשנה כל ספרה של S לפי החוקים הבאים:

לספרה a המקיימת $0 \le a \le 8$ נתאים $T(a)=a+1$ ואילו ל-9 נתאים $T(9)=1$.

נעבור עכשיו על הספרות של S ונגדיר לגבי כל r

$$G_r = T(a_r^{(r)})$$

בעוד $t = G_0 \cdot G_1 G_2 G_3 \ldots\ldots$

ונכתוב $G_0 = T(a_0)$

ברור ש-t שונה מ-r_k בספרה ה-k אחרי הנקודה, כי הרי

$$G_k = T(a_k^{(k)}) = a_k^{(k)}$$

ולכן t אינו שווה ל-r_k. כמו כן t שונה מכל המספרים r_0, r_1, ... כלומר ש-t אינו נמצא בסדרה זו. מכאן שאין הסדרה ממצה את כל המספרים הממשיים.

מאז הוכחתו של קנטור נשארה השאלה הבאה פתוחה: האם קיימת קבוצה S שיש בה יותר איברים מאשר בקבוצת המספרים הטבעיים, אך פחות מאשר בקבוצת המספרים הממשיים? זו היתה אחת מבעיות הילברט. ב-1940 הוכיח גדל שאי אפשר להוכיח שקיימת S כזו. ובשנת 1963 נסגר הנושא כליל כשכהן הוכיח שאי אפשר להוכיח גם שאין S כזו. כלומר - התשובה היא שאין להכריע את השאלה, לא לכאן ולא לכאן! שוב, שני הפתרונות היוו נקודת מפנה בלוגיקה.

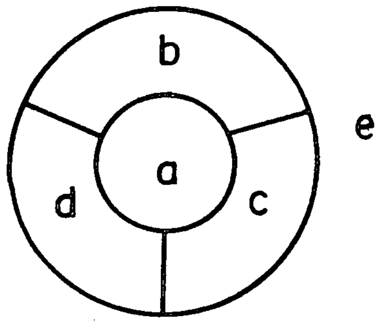
לא כל ההשערות המפורסמות טבעיות כל כך. הנה השערה הנחשבת בעיני מתמטיקאים רבים לחשובה ביותר במתמטיקה, "השערת רימן", מאמצע המאה ה-19. אין לי אפשרות להסביר כאן את חשיבותה, אבל אזכירה משום שלא יתכן לפסוח עליה. נגדיר פונקציה של משתנה מרוכב,

$$(z)=1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\ldots\ldots$$

ההשערה אומרת שאם $(a+t)=0$ ו- $a>0$, אזי $a=0.5$.
(למעשה, הגדרת מסובכת קצת יותר, אך נניח לזאת).

בשנים האחרונות זכינו למבול זוטא של פתרון השערות מפורסמות. נזכיר אחדות מהן: השערת ונדרורדן, השערת ביברבך (ר' אתגר גליונות מתמטיקה, גליון מס' 1), השערת מורדל (שהוזכרה למעלה), השערת פואנקרה ובעית מיון החבורות הפשוטות.

בעיה אשר פתרונה זכה להדים הנרחבים היא בעית ארבעת הצבעים, שנפתרה ע"י אפל והקן ב-1976, ושוב, הסיבה היא שהבעיה כה טבעית ופשוטה לניסוח. כאשר צובעים מפה מדינית הדרישה היא, כמובן, שכל שתי מדינות סמוכות תהיינה צבועות בצבעים שונים. השאלה היא כמה צבעים נחוצים לצביעת מפה כלשהי. הבה נתבונן במפה הבאה. יש בה חמישה תחומים:

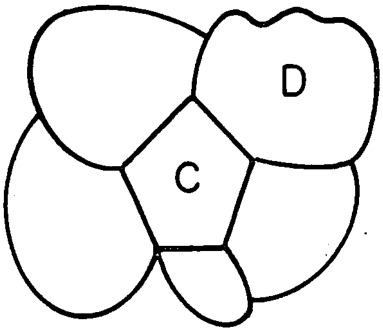


איור 1

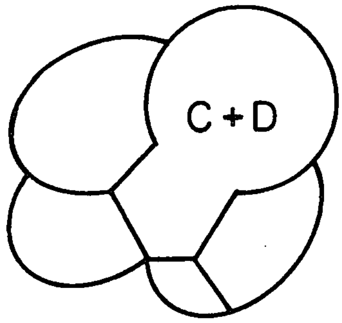
(סופרים גם את התחום החיצוני, הים) התחומים a, b, c, d נוגעים כל אחד זה בזה, ולכן נחוצים ארבעה צבעים לצביעתם. את התחום e אפשר אז לצבוע באותו הצבע כמו a, ולכן מספיקים ארבעה צבעים. באמצע המאה שעברה נשאלה השאלה - האם ארבעה צבעים מספיקים לכל מפה? בסוף המאה שעברה הוכיח קמפה שתמיד מספיקים חמישה צבעים (למעשה היה סבור שפתר את הבעיה כולה) ושלושת רבעי מאה עברו עד שבוצעה הקפיצה בת המספר האחד מחמש לארבע. מתברר שההוכחה אכן קשה במיוחד, ודרשה שימוש במחשב בכדי לבדוק את המקרים המרובים.

כדי להראות את רוב הרעיונות של הפתרון, נוכיח את משפט "ששת הצבעים"

באינדוקציה על מספר המדינות. כל מפה ניתנת לצביעה בשישה צבעים. לשם כך נסתמך על טענה שנוכיח בהמשך: בכל מפה קיימת מפה עם חמש שכנות או פחות. נקרא למדינה כזו C. נרחיק מן המפה גבול שלה עם שכנה אחת, כאמור D, ו"נאחד" בכך את שתי המדינות. נקבל מפה עם מדינה אחת פחות, ולפי הנחת אינדוקציה אפשר לצבוע מפה זו ב-6 צבעים. עתה, C+D יחד עם השכנות של C במפה הישנה (מחוץ ל-D) הן חמש במספר, לכל היותר, ולכן צריכים לכל היותר 5 צבעים שונים. נותר אם כן צבע מבין ה-6 שלא השתמשנו בו. נצבע בו את C, ונחזיר את הגבול בין C ל-D למקומו, ונקבל צביעה טובה ב-6 צבעים של המפה הישנה!



איור 2



איור 3

נותר לנו להוכיח את הטענה בדבר קיום מדינה עם לא יותר מ-5 שכנות.

בכל מפה נסמן ב-V את מספר ה"צמתים" (נקודות חיבור של 3 מדינות או יותר), E - מספר הקווים (גבולות בין המדינות השכנות), ו-F מספר המדינות. הנה דוגמאות: (זכור כי סופרים גם את המדינה החיצונית, ה"ים"!)

V	E	F
3	3	2
4	5	3
6	8	4

המשך בע' 28

בעיות במרובעים

א. סיגלר (נהריה)

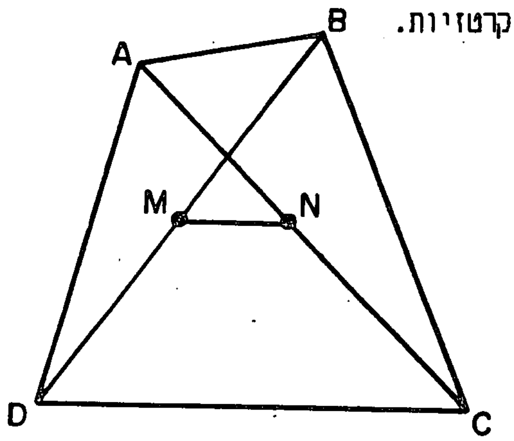
I. <u>אי-שוויונים הנובעים ממשפט של אוילר</u>

1. <u>משפט אוילר</u>

במרובע ABCD, MN הוא הקטע המחבר את אמצעי האלכסונים AC ו- BD.
אזי קיים:

$$AB^2+BC^2+DC^2+DA^2 = AC^2+DB^2+4MN^2 \quad (1)$$

<u>הוכחה:</u> מיידית באמצעים אנליטיים על ידי הבעת אורכי הקטעים באמצעות קואורדינטות קרטזיות.



איור 4

2. <u>אי שוויון זהותי א</u>

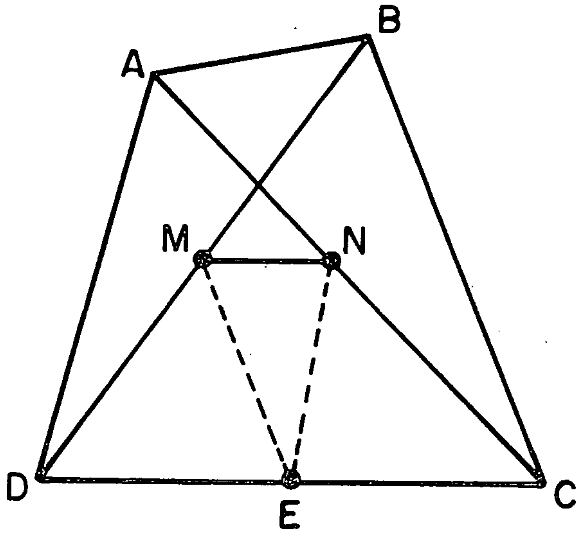
במרובע ABCD קיים:

$$AB^2+CD^2+2AD\cdot BC \geq AC^2+BD^2 \quad (2)$$ והשוויון קיים אם <u>ורק אם</u> $AD||BC$

<u>הוכחה:</u>
תהי E אמצע DC, M אמצע BD ו- N אמצע AC. במשולש MNE קיים

$$\begin{cases} ME+EN>MN \\ MN+NE>ME \\ MN+ME>NE \end{cases}$$

אבל



איור 5

$ME = BC/2$
$NE = AD/2$

ולכן (3) $$MN \ge \left|\frac{BC-AD}{2}\right|$$

וידוע שהשויון קיים כאשר $BC||AD$.

לפי משפט אוילר (1) קיים

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4MN^2\ge AC^2+BC^2-2BC\cdot D$$

לכן קיבלנו את (2) - טענת אי-השויון. ברור שרק

כאשר $MN = \left|\frac{BC-AD}{2}\right|$ יתקיים השויון, לכן מותנה קיום השויון בהיותו של ABCD טרפז.

3. <u>אי שויון זהותי ב</u>

במרובע בר חסימה ABCD, יהיו M, N אמצעי האלכסונים. אזי קיים:

$$MN \ge \left|\frac{AC-BD}{2}\right| \quad (4)$$

<u>הוכחה:</u>

הוכחנו כבר כי $$MN \ge \left|\frac{BC-AD}{2}\right|$$

וכמו כן $$MN \ge \left|\frac{DC-AB}{2}\right|$$

לכן $$2MN^2 \geq \frac{AB^2+BC^2+CD^2+AD^2 - 2(BC\cdot AD+AB\cdot DC)}{4}$$

$$= \frac{AC^2+BD^2+4MN^2 - 2(BC\cdot AD+AB\cdot DC)}{4}$$

לפי (1)

אבל לפי משפט תלמי $BC\cdot AD+AB\cdot DC = AC\cdot BD$ במרובע בר חסימה.

ולכן $$2MN^2 \geq \frac{AC^2+BD^2-2AC\cdot BD+4MN^2}{4}$$

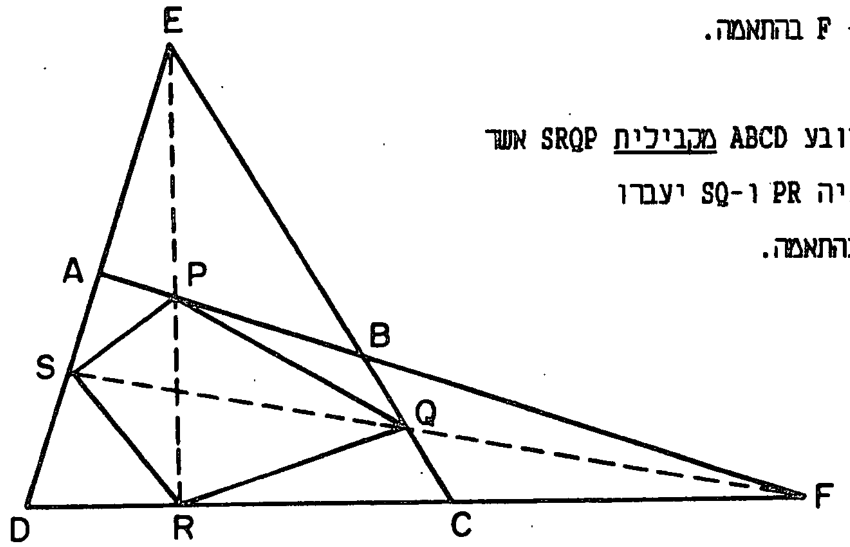
דהיינו $$MN \geq \left|\frac{BC-AD}{2}\right|$$

מ. ש. ל.

II. <u>בעית בניה ופתרונה</u>

נתון מרובע ABCD. המשכי הצלעות AD ו- BC והמשכי הצלעות AB ו- DC נפגשים בנקודות E ו- F בהתאמה.

יש לחסום במרובע ABCD <u>מקבילית</u> SRQP אשר המשכי אלכסוניה PR ו-SQ יעברו דרך E ו- F בהתאמה.



איור 6

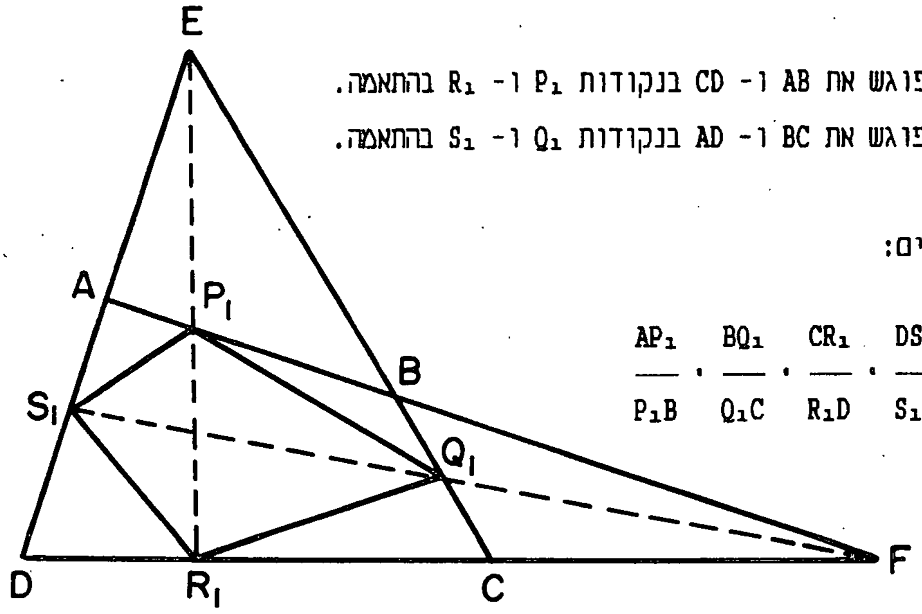
<u>פתרון :</u>

<u>ניתוח הבעיה</u>

<u>משפט</u> I בנתונים של הבעיה יהיה m ישר העובר דרך E ופנימי לזוית DEC ויהי n ישר העובר דרך F ופנימי לזוית AFD.

m פוגש את AB ו- CD בנקודות P_1 ו- R_1 בהתאמה.

n פוגש את BC ו- AD בנקודות Q_1 ו- S_1 בהתאמה.



איור 7

קיים:

$$\frac{AP_1}{P_1B} \cdot \frac{BQ_1}{Q_1C} \cdot \frac{CR_1}{R_1D} \cdot \frac{DS_1}{S_1A} = 1 \quad (1)$$

<u>הוכחה:</u>

קיים:

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{EC}{ED} = \frac{AP_1}{P_1B} \cdot \frac{CR_1}{R_1D}$$

(משיקולי יחסי שטחים של המשולשים EAP_1 ו-EBP_1
ויחסי השטחים של המשולשים ECR_1 ו- ER_1D).

אם נסתכל על אלומת ארבעת הישרים היוצאים מ-F, דהינו: FD, n, FA, FE מתוך תכונת שמירת היחס הכפול בהתייחס לישרים ED ו- EC הנחתכים על ידי אלומת ארבעת הישרים הנ"ל קיים:

$$\frac{BQ_1}{Q_1C} : \frac{EB}{EC} = \frac{AS_1}{S_1D} : \frac{EA}{ED}$$

לכן

$$\frac{BQ_1}{Q_1C} \cdot \frac{DS_1}{S_1A} = \frac{EB}{EC} \cdot \frac{ED}{EA}$$

מהכפלת (2) ב-(3) אגף אגף מקבלים את טענת המשפט 1.

<u>משפט 2:</u>

בנתוני משפט 1 המשכי P_1Q_1 ו- R_1S_1 נפגשים בנקודה אחת.

<u>הוכחה:</u>

לפי משפט 1 קיים (1). לכן

$$\frac{AP_1}{P_1B} \cdot \frac{BQ_1}{Q_1C} = \frac{AS_1}{S_1D} \cdot \frac{DR_1}{R_1C}.$$

על ידי שימוש במשפט מנלאוס במשולש ABC הנחתך על ידי P_1Q_1 ובמשולש ADC הנחתך על ידי R_1S_1, נובעת טענת משפט 2.

<u>משפט 3:</u>

בנתוני משפט 1 אם $P_1Q_1R_1S_1$ מקבילית, אזי קיים:

$$\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{CQ_1}{Q_1B} = \frac{CR_1}{R_1D} = \frac{AS_1}{S_1D} \qquad (4)$$

<u>הוכחה:</u>

לפי משפט 2, המשכי Q_1P_1 ו- R_1S_1 נפגשים בנקודה אחת. אבל אם $P_1Q_1R_1S_1$ מקבילית, אז הפגישה היא ב-∞ לכן P_1R_1 וגם S_1R_1 מקבילים ל-AC ומאותו שיקול P_1S_1 ו- D_1R_1 מקבילים ל-BD.

לכן (4) הוכח (משפט טלס).

<u>בניה:</u>

נבנה את היחס $\sqrt{\dfrac{AE \cdot EC}{EB \cdot ED}} = \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{CR}{RD} = \dfrac{CQ}{QB} = \dfrac{AS}{SD}$

(בניה אלמנטרית)

<u>טענה</u> א. PQRS מקבילית

ב. R_1P_1E על קו ישר אחד ו- S_1Q_1F על קו ישר אחר.

<u>הוכחה</u> א. מיידי

ב. נובע ממשפט (1) נוסחה (2).

<u>טענות נוספות</u>

<u>טענה</u> א. בתנאי הבעיה הכרחי ומספיק ש-SPQR יהיה מעוין הוא ש- ABCD בר חסימה.

<u>הוכחה</u>: <u>מספיק</u> - אם המרובע SPQR מעוין, אזי ER חוצה את הזוית E (כי ER גם תיכון וגם גובה במשולש ESQ). לכן:

$$\frac{EC}{ED} \overset{\text{חוצה זוית}}{=} \frac{RC}{RD} \overset{\text{תנאי הבניה}}{=} \frac{AP}{PB} \overset{\text{משפט חוצה זוית}}{=} \frac{AE}{EB}$$

לכן $EB \cdot EC = EA \cdot ED$. כלומר, המרובע הוא בר חסימה.

<u>הכרחי</u>: אם המרובע ABCD בר חסימה, אזי $EA \cdot ED = EB \cdot EC$

מתנאי הבניה נובע כי:

$$\frac{CR}{RD} = \sqrt{\frac{AE}{CB} \cdot \frac{EC}{ED}} = \sqrt{\frac{EC^2}{ED^2}} = \frac{EC}{ED}$$

לכן לפי משפט חוצה הזוית ההפוך ER חוצה את E לכן SPQR מעוין (כי ER חוצה זוית ותיכון במשולש ESQ ולכן גם גובה).

<u>טענה ב</u>. בתנאי הבעיה יהיה SPQR מלבן - אך ורק כאשר אלכסוני המרובע ABCD מאונכים.

<u>הוכחה:</u>

אם אלכסוני ABCD מאונכים, בהתחשב בעובדה שהוכחה במשפט 3 - כל אלכסון ב-ABCD מקביל לשתי צלעות נגדיות של המקבילית SPQR.
לכן הזוית בין SP ו- PQ שווה לזוית בין האלכסונים AC ו- DB. לכן SPQR מלבן. השיקול פועל גם בכיוון ההפוך.

<u>מסקנה</u> - תנאי הכרחי ומספיק שבתנאי בעית הבניה, המרובע SPQR הוא ריבוע, הוא שהמרובע ABCD יהיה בר חסימה ואלכסוניו מאונכים.

<u>הוכחה</u> זאת מסקנה של טענות א' ו-ב'.

האולימפיאדה הבינלאומית
למתמטיקה 1988

התחרות הנ"ל, ה-29 במספר, התקיימה בחודש יולי השנה בקנברה, אוסטרליה, בהשתתפות 268 תלמידים מ-50 מדינות. לפי התקנון יכלה כל מדינה לשלוח עד 6 מתחרים, ואמנם רוב המדינות המתחרות עשו כך. היו כמה ששלחו נבחרות קטנות יותר.

הבחינה הורכבה משני שאלונים, בכל אחד 3 שאלות, שהוצגו בפני המתחרים בשני ימים רצופים. תשובה נכונה ומלאה על שאלה זיכתה את המשתתף ב-7 נקודות, כך שהציון המירבי האפשרי על שני השאלונים היה 42.
בסוף התחרות הוענקו מדליונים למשתתפים כדלקמן:

1) לכל אחד מ-17 המשתתפים שהגיעו לציון כולל מ-32 ומעלה הוענק מדליון זהב.
2) ל-48 תלמידים שקיבלו ציונים מ-23 עד 31 הוענקו מדליונים של כסף.
3) 66 התלמידים שקיבלו מ-14 עד 22 זכו למדליון של ארד.

מבין ששת חברי נבחרת ישראל זכו חמישה במדליונים, כדלקמן:

<u>זהב</u>: שוני דר, בי"ס תיכון עירוני ד', תל-אביב
<u>ארד</u>: יואב יפה, בי"ס ריאלי, חיפה
אילון לינדנשטראוס, תיכון ליד האוניברסיטה, ירושלים
ארז לפיד, תיכון עירוני ד', תל-אביב
גדי קוזמה, תיכון עירוני ד', תל-אביב

בנוסף לזכיות האישיות האלה, יש ענין לסקור גם את "ההישגים הקבוצתיים" כלומר הסך הכולל של ציוני חברי המשלחות השונות. ברור כי בענין זה נהנות המדינות הגדולות מיתרון רציני - פשוט מפני שיותר קל למצוא שישה מתחרים מצטיינים ככל שהמדינה יותר גדולה. ואמנם שבעת המקומות הראשונים נתפסו ע"י

ברית המועצות, רומניה, סין העממית, מערב גרמניה, ויטנאם, ארצות הברית, מזרח גרמניה (לפי סדר זה). ישראל הופיעה במקום השלושה עשר, כאשר את שנים-עשר המקומות היותר גבוהים תפסו מדינות שהיו כולן בעלות אוכלוסין של למעלה מ-15 מליון.

בהתחשב באוכלוסיה הקטנה של ישראל וגם במשאבים הדלים ביותר המוקדשים להכנות ואימונים, יש לראות את התוצאה כהישג של ממש לתלמידים.

להלן תמצאו את שש השאלות שבהן התמודדו המתחרים. פתרונות יופיעו בגליון הבא, אבל יתכן שבינתיים ימצאו קוראינו ענין לנסות את כוחם הם.

לא נוכל לסים מבלי להעלות על נס את הגישה החיובית והאוהדת של משרד החינוך והתרבות, בין השאר את ההשתתפות הכספית שכיסתה את החלק המכריע של הוצאות הנסיעה.

<u>השאלונים</u>

1. נתונים שני מעגלים, בעלי מרכז משותף O ורדיוסים R ו-r ‏($r>R$). P היא נקודה קבועה על המעגל הקטן, וישר העובר דרך P פוגש את המעגל הגדול ב-C,B. A היא נקודה על המעגל הגדול כך ש-AP מאונך ל BC.

   (i) קבע את קבוצת הערכים האפשריים של $BC^2+AB^2+CA^2$, כאשר הישר BPC משתנה.

   (ii) אם U הוא האמצע של B, ו-V הוא האמצע של AC, קבע את מקומם ההנדסי של V ,U.

2. נתון מספר שלם n ו- $A_1, A_2 \dots A_{2n+1}$ שהם $2n+1$ קבוצות, כל אחת בעלת 2n איברים. כמו כן נתון, כי לכל זוג מבין הקבוצות האלה יש בדיוק איבר אחד משותף, בעוד כל איבר של האיחוד

$$\bigcup_{i=1}^{2n+1} A_i$$

שייך לפחות לשתיים מהקבוצות הנתונות. רוצים להתאים לכל איבר מהאיחוד הזה אחד המספרים 0 או 1, כך שבכל אחת מהקבוצות A_r $(r=1,2...2n+1)$ יהיו בדיוק n איברים אשר להם מותאם 0. עבור אילו ערכים של n אפשרי הדבר?

3. הפונקציה $f(n)$ מוגדרת על המספרים הטבעיים וגם ערכי הפונקציה הם כולם מספרים טבעיים. נתון כי:

$f(1)=1$, $f(3)=3$

ועבור כל n, $f(2n)=f(n)$

$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n)$

$f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n)$

כמה מספרים טבעיים ישנם מ-1 עד 1988 המקיימים את $f(n)=n$? נמק!

4. הוכח כי קבוצת המספרים הממשיים x המקיימים את אי-השוויון

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq 5/4$$

היא איחוד של אינטרוולים זרים אשר סכום אורכיהם הוא 1988.

5. במשולש ABC, A היא זוית ישרה ו-D היא עקב הגובה מ-A ל-BC. הישר העובר דרך מרכזי המעגלים החסומים במשולשים ABD,ACD פוגש את הצלעות AC, AB בנקודות K,L בהתאמה. אם S,T הם שטחי המשולשים AKL, ABC בהתאמה, הוכח כי $S\geq 2T$.

6. a,b הם מספרים טבעיים כך ש- $(ab+1)$ מחלק את (a^2+b^2). הוכח כי

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

הוא ריבוע שלם.

טבלאות של YOUNG

י. גיליס (רחובות)

מבוא

בזמנו הציע יונג את הבעיה הבאה: נניח שאנו רוצים לסדר את כל המספרים הטבעיים מ-1 עד mn ב-m שורות של n מספרים כל אחת, כך שבכל עמודה (מלמעלה למטה) ובכל שורה (משמאל לימין) תיווצר סידרה מונוטונית עולה. בכמה אופנים ניתן לבצע את המשימה?

יונג פתר את הבעיה והוכיח כי מספר האופנים הוא:

$$\frac{(mn)!1!2!.....(m-1)!}{n!(n+1).....(n+m-1)!} \qquad (1)$$

למשל כאשר m=2, n=3 הטבלאות הבאות בחשבון הן :

$$\begin{bmatrix}123\\456\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}124\\356\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}125\\346\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}134\\256\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}135\\246\end{bmatrix}$$

שמספרם 5 ואמנם-

$$\frac{6!1!}{3!4!} = 5$$

את הנוסחה (1) הסיק יונג כמקרה פרטי של נוסחה יותר כללית. נניח שנתונים m מספרים טבעיים

$a_1, a_2, ...a_m$

כאשר $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_m$ ו- $\sum_{i=1}^{m} a_i = S$.

אנו רוצים לסדר את המספרים הטבעיים מ-1 עד S ב-m עמודות, כך שבעמודה הראשונה יופיעו a_1 מספרים, בשניה a_2 מספרים וכו' ושבכל עמודה ובכל שורה תיווצר סדרה מונוטונית עולה.

נסמן ב- $F(a_1,a_2,\dots\dots,a_m)$ את מספר הדרכים שניתן לבצע סידור כזה, והבעיה היא לחשב את $F(a_1, a_2,\dots\dots,a_m)$. יונג הוכיח כי:

$$(2)\quad F(a_1,\dots,a_m) = s!\prod_{\substack{i=1\\ j>i}}^{m}(a_i+m-i)!\ \prod_{i=1}^{m}(a_i+m-i)!$$

כאשר (1) מקבלת את הצורה הפשוטה יחסית (2) ולא קשה לראות כי הנוסחה $a_1 = a_2 =\dots= a_m = n$.

הוכחה:

ההוכחה היא בעזרת אינדוקציה לגבי כל ה- a_i, ומתבססת על שני משפטי עזר:

<u>משפט עזר 1</u>:

$$(3)\ F(a_1,a_2,\dots,a_m)= =F(a_1-1,a_2,\dots,a_m)+\dots+ +F(a_1,a_2,\dots,a_m-1)$$

ההוכחה מיידית כי הרי בכל סידור של S המספרים מוכרח המספר S עצמו להופיע בתחתית עמודה ובקצה הימני של שורה. לכן נקבל ע"י מחיקתו מערכת, המתאימה למה שיתקבל ע"י קיצור אחת העמודות ב-1.

<u>משפט עזר 2</u>:

יהיו $a_1,a_2,\dots\dots,a_m$ מספרים כלשהם. אזי -

עכשיו עלינו להוכיח את הנוסחה (4), ז.א. משפט עזר 2.

<u>הוכחת משפט עזר 2:</u>

נגדיר:

$$f(x)=x\prod_i\left[1+\frac{1}{A_i-x}\right]$$

אזי קל לראות כי:

$$f(x)\qquad f(x)=x-m+\frac{Q(x)}{\prod_i(A_i-x)}$$

כאשר $Q(x)$ הוא פולינום ממעלה $m-1$. נוכל אם כן להשתמש בעיקרון של שברים חלקיים, ונקבל:

$$(7)\qquad f(x)=x-m+\sum_k\frac{C_k}{A_k-x}$$

ויש עוד לקבוע את המקדמים C_k. נכפיל את (7) ב- (A_j-x), ונקבל:

נציב כאן $x=A_j$:

$$A_j\prod_i^{(j)}\left[1+\frac{1}{A_i-x}\right]=C_j$$

ולכן מ-(7)

$$(8)\qquad x\prod_i\left[1+\frac{1}{A_i-x}\right]=x-m+\sum_{(k)}\frac{A_k}{A_k-x}\prod_i^{(k)}\left[1+\frac{1}{A_i-A_k}\right]$$

$$(4)\quad \sum_{k=1}^{s} A_k\left\{1-\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}\left[1+\frac{1}{A_j-A_k}\right]\right\} = m(m-1)/2$$

הערה:

מאחר שהוכחת משפט עזר זה מסובכת במקצת, נדחה אותה לסעיף הבא. בינתיים נעיר כי המשפט כשלעצמו מפתיע, מאחר שקשה היה לנחש שערכה של הנוסחה המסורבלת ב-(4) יהיה תלוי רק ב-m ולא במספרים A_i. כדי לפשט את הטיפול בנוסחאות כאלה נשתמש במונחים הבאים:

יהיו $x_1,x_2,\ldots,x_m$ מספרים כלשהם. אזי נכתוב:

$$\sum_i^{(j)} x_i = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} x_i \qquad , \qquad \sum_i x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i$$

כאשר במקרה השני הסכום הוא על כל הערכים של i מ-1 עד m פרט ל-$i=j$.

נשתמש גם בסימונים דומים, $\prod_i$-ו $\sum_i^{(j)}$ עבור מכפלות.

נוכל אפוא לכתוב את המשוואה (4) בצורה:

$$(4^1)\qquad \sum_k A_k\left\{1-\prod_i^{(k)}\left[1+\frac{1}{A_j-A_k}\right]\right\} = m(m-1)/2$$

עכשיו ניגש להוכחת המשפט העיקרי. ברור שהוא נכון במקרה - $a_1=a_2=\ldots=a_m=1$. לכן מספיק להוכיח כי הנוסחה ב-(2) מקיימת גם היא את היחס (3). אבל זה יהיה נכון אם:

$$(5)\quad S!\left\{\prod_i (a_i+m-i)!\right\}^{-1}\cdot\prod_{j>i}(a_i-a_j+j-i) =$$

$$=(s-1)!\left[\prod_i (a_i+m-i)!\right]^{-1}\prod_{j>i}(a_i-a_j+j-i)\cdot\sum_j^{(k)}\left[1+\frac{1}{a_j-a_k+k-j}\right]$$

אנו משאירים לקורא לאשר כי (5) אמנם מבטא בדיוק את העובדה ש-(3) מקיים את היחס (2) אם נוכיח כי-

$$(6)\qquad S=\sum_k (a_k+m-k)\cdot\prod_j^{k}\left[1+\frac{1}{a_j-a_k+k-j}\right]$$

ולכן נשאר להוכיח רק את (6).

למטרה זו נציב ב-(4) $A_k=a_k+m-k$,

ונקבל:

$$\sum_k (a_k+m-k)\left[1-\prod_j^{(k)}\left[1+\frac{1}{a_j-a_k+k-j}\right]\right]=m(m-1)/2$$

ולכן

$$\sum_k (a_k+m-k)\left[1-\prod_j^{(k)}\left[1+\frac{1}{a_j-a_k+k-j}\right]\right]=$$

$$=\sum_k (a_k+m-k)-m(m-1)/2$$

$$=S+\sum_{k=1}^{m}(m-k)-m(m-1)/2$$

$$=S$$

מ. ש. ל.

נפתח את שני אגפי (8) לפי חזקות יורדות של x

$$x\prod_i \left\{1-\frac{1}{x}-\frac{A_i}{x^2}-\frac{A_i^2}{x^2}\;.....\right\}$$

$$(9)\quad =(x-m)-\sum_k \frac{A_k}{x}\prod_i^{(k)}\left[1+\frac{1}{A_i-A_k}\right]\left[1+\frac{A_k}{x}+\frac{A_k^2}{x^2}\ldots\right]$$

ז.א.

$$(10)\quad x\left\{1-\frac{m}{x}+\frac{m(m-1)/2-\Sigma A_k}{x^2}\;\ldots\right\}$$

$$=x-m-\sum_k A_k\cdot\prod_i^{(k)}\left\{1+\frac{1}{A_i-A_k}\right\}\cdot\left[\frac{1}{x}+\frac{A_k}{x^2}+\ldots\right]$$

נשווה את מקדמי $1/x$ משני האגפים: -

$$m(m-1)/2-\sum_k A_k=-\sum_k A_k\cdot\prod_i^{(k)}\left\{1+\frac{1}{A_i-A_k}\right\}$$

ז.א.

$$(11)\quad \sum_k A_k\left\{1-\cdot\prod_i^{(k)}\left[1+\frac{1}{A_i-A_k}\right]\right\}=m(m-1)/2$$

אם נוסיף קבוע γ לכל A_j נקבל:

$$(11')\qquad \left[A_k+\gamma\right]\left\{1-\prod_i^{(k)}\left[1+\frac{1}{A_i-A_k}\right]\right\}=m(m-1)/2$$

נחסר עכשיו (11) מ-('11) ונחלק ב-λ. נקבל:

$$\sum_k \left\{ 1-\pi_i^{(k)} \left[1+\frac{1}{A_i-A_k} \right] \right\} = 0$$

בבליוגרפיה:

A. YOUNG, Quant. Substit. Analysis, Proc. London Math. Soc. II, 28 (1928) 255

השערות פתוחות והשערות פתורות (המשך מע' 11)

קל להבחין בחוקיות המספרים הכלו: $E=V+F-2$ או: $V-E+F = 2$

זוהי נוסחת "אוילר" המפורסמת. היא מוכחת בקלות באינדוקציה, אך לא נביא את ההוכחה כאן. עתה נניח, בשלילה לטענה שברצוננו להוכיח שלכל מדינה לפחות שש שכנות. אז לכל מדינה 6 גבולות (קוים) סמוכים לפחות, ולכן מספר הגבולות, E, הוא לפחות 6F. האמנם? לא בדיוק. בדרך זו ספרנו כל קו ב-E פעמים, משתי שכנותיו, ולכן האמת היא:

$$E \geq 6F/2=3F$$

$$F \leq E/3$$

עתה בכל צומת יש לפחות שלושה קוים נפגשים, ולכן $E \geq 3V$. האמנם?
בדרך זו שוב ספרנו כל קו פעמים משני קצותיו, ולכן האמת היא $E \leq 3V/2$.
נציב כל זאת בנוסחת אוילר, ונקבל:

$$2=V-E+F \leq 2E/3-E+E/3=0$$

זוהי סתירה שמקורה בהנחת השלילה לטענה, ואם כך הטענה הוכחה.

אני מקווה שהצלחתי להראות לקורא שהמתמטיקה היא עדיין תחום "חי". למעשה תחום פעיל כיום יותר מאשר אי פעם. ואם עוררתי במישהו חשק לפתור השערה פתוחה - כי אז אהיה מרוצה עוד יותר.

האולימפיאדה הבינלאומית

למתמטיקה 1989

בשנה הבאה תתקים התחרות הנ"ל במערב גרמניה וקיבלנו על עצמנו לחפש תלמידים מצטינים במתמטיקה שיוכלו להשתתף בנבחרת ישראל. בהקשר זה יופצו בין בני נוער המעונינים שאלונים מתמטיים.

יש לצרף לפתרונות פרטים אישיים (שם משפחה, שם פרטי, שם בית ספר, הכיתה בה הוא לומד). המשתתף יקבל בחזרה פתרונות על השאלות וגם את השאלון הבא. להלן הטופס של השאלון הראשון לשנה"ל תשמ"ט.

1. הוכח כי עבור $0 \le X \le 1$ ו $1 < \alpha$, קיים

$$(1+X)^{\alpha} \ge (1-X)^{\alpha} + 2\alpha X \cdot (1-X^2)^{(\alpha-1)/2}$$

2. מצא את כל המספרים הטבעיים n, עבורם יש למשוואה:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{n}{x+y}$$

פתרונות שלמים.

3. נתון משולש ABC ובתוכו נקודות Q,P כך ש -

$ABQ = CBP$, $BCQ = ACP$.

הוכח כי: $CAQ = BAP$

4. A_1, A_2,....,A_k הם k סדרות אינסופיות של מספרים טבעיים. נתון כי עבור כל i $(1 \le i \le k)$ וכל n טבעי מספר האברים של A_1 שהם $\le n$ הוא לפחות $n/2$. עבור כל X טבעי נגדיר $N_{ij}(X)$ שהוא מספר האיברים בחיתוך $A_i \cap A_j$ שאינם גדולים מ-X. הוכח כי קיים לפחות זוג אחד i,j $(1 \le i < j \le k)$ כך שלאי-שוויון:

$$N_{ij}(X) \ge \frac{k-4}{4 \cdot (k-1)} X$$

יש אינסוף פתרונות.

אנו מקווים כי מקבלי השאלונים ישלחו את פתרונותיהם לכתובת המערכת. (מען המערכת נמצא בע' 2 בחוברת זו).

ישן וחדש על מספרים ציקליים

ד. רימר (רחובות)

1. <u>הקדמה:</u>

במאמרים [1],[4] הוכחנו את קיומם של 72 מספרים, בבסיס 10 בעלי התכונה שאם מעבירים את ספרת האחדות ממקומה בימין המספר, למקום הראשון שבשמאל המספר, המספר החדש גדול פי p $(p=2,3,...,9)$ מהמספר המקורי. נתנו שם גם את המבנה המשותף של אותם המספרים. לדוגמה: מן $A=1,012,658,227,848$ מתקבל $B=8,101,265,822,784$ ו-$B=8A$.

במאמר הנוכחי נרחיב את הנושא ונתייחס למקרה שמעבירים מימין המספר לשמאלו, לא רק את ספרת האחדות, אלא קבוצה שלמה של k ספרות, והמספר החדש הינו כפולה של המספר המקורי. דוגמה: מן $A=02,439$ מתקבלים:

$B=90,243=37A$, $C=39,024=16A$, $D=43,902=18A$, $E=24,390=10A$.

נדון רק על מספרים בבסיס 10, אבל השיטה פועלת על מספרים בכל בסיס שהוא, בשינויים טכניים קלים ושגרתיים בלבד.

2. <u>מספר ציקלי, מהו?</u>

יהא המספר הראשוני 7. כידוע $1:7=0.(142857)$ הוא מספר עשרוני מחזורי והמחזור יכול להתקבל מהחילוק $(10^6-1):7$, כאשר 6 הוא מספר הספרות של המחזור. נסמן $A(7)=142,857$, וכאשר 7 ידוע, נסמן את המספר הזה, בקיצור, A. יהיו $p_k(A)$, $k=0,1,2,3,4,5$ התמורות הציקליות של A. הן מתקבלות מן A כאשר מעבירים את k הספרות האחרונות של A, מימין המספר לשמאלו. כך, לדוגמה, מן $A(7)$ מתקבלות התמורות הציקליות דלקמן:

$p_1(A)=714,285=5A$, $p_2(A)=571,428=4A$, $p_3(A)=857,142=6A$,

$p_4(A)=285,714=2A$, $p_5(A)=428,571=3A$, $p_0(A)=142,857=1A$,

כפי שרואים מדוגמה זו, כל שש התמורות הציקליות של A הן כפולות של A במספרים הטבעיים הקטנים מ-7. אבל 7 אינו המספר היחיד בעל תכונה כזו. עבור כל מספר ראשוני p הגדול מ-5, החילוק $1:p$ נותן כמנה מספר עשרוני מחזורי. אם למחזור r ספרות, אז $(10^r-1):p$ נותן כמנה בדיוק את המחזור. נסמנו $A(p)=c_{r-1}c_{r-2}...c_kc_{k-1}...c_1c_0$ וכאשר המספר p ידוע ואין צורך לציינו במיוחד, נסמנו רק ב-A. כל התמורות הציקליות של A הן

כפולות של A במספרים טבעיים הקטנים מ-p, ז.א. עבור כל k, $k=0,1,2,\dots n-1$, קיים $m_k \in \{1,2,\dots,p-1\}$, m_k כך ש- $p_k(A)=m_k \cdot A$.
בדוגמה דלעיל $m_k=1,2,\dots,6$ ז.א. הקבוצה $\{m_k\}$ מכילה את כל המספרים הטבעיים הקטנים מ-7. אותו הדבר במספרים ראשוניים p אחרים, כמו 17, 19, 59; אבל לא בכולם, למשל, $A(11)=09$.

יהא המספר הראשוני $p=13$. החילוק 1:13 נותן כמנה $0.(076923)$, מספר עשרוני מחזורי. גם כאן המחזור הוא בן 6 ספרות. לכן הוא יכול להתקבל מהחילוק $(10^6-1):13=076,923$, נסמנו $A(13)$ או רק A. התמורות הציקליות שלו הן: $p_1(A)=307,692=4A$, $p_2(A)=3A$, $p_3(A)=12A$, $p_4(A)=9A$, $p_5(A)=10A$, $p_0(A)=1A$. אבל גם התמורות הציקליות של המספר $2A=153,846$ הינן כפולות של A, דהיינו:

$p_1(2A)=615,384=8A$, $p_2(2A)=6A$, $p_3(2A)=11A$, $p_4(2A)=5A$,
$p_5(2A)=7A$, $p_0(2A)=2A$.

בשתי הדוגמות דלעיל, בין מספר 6 של הספרות של A והמספרים הראשוניים $p=7$ או $p=13$ בהתאמה, קיימים הקשרים $6=(7-1):1$, $6=(13-1):2$ לכן $A(7)=142,857$ מוגדר כמספר ציקלי מסדר 1 ו- $A(13)=076,923$ כמספר ציקלי מסדר 2. בדרך כלל, אם $n=(p-1):r$, $A(p)$ מוגדר כמספר ציקלי מסדר n [2], [3].

הנה הסבר למושג "ציקלי": אם נכתוב את $A(p)$ סביב מעגל, (מעגל=kyklos ביוונית), נוכל לחתוך את המעגל ליד כל ספרה, ולישר אותו. באופן זה נקבל את המספרים $p_k(A)$, ז.א. כל התמורות הציקליות של A. נעיר כאן כי תכונה זו אינה טריביאלית. ובאמת, אם ניקח מספר כלשהו באקראי, נאמר, 256, אז התמורות הציקליות שלו, 625, ו-562 אינן כפולות של 256.

על מנת להבין עמוק יותר את הנושא, נחוץ לברר כמה שאלות.

3. <u>הקשר בין k ו- m_k.</u>

נסמן $C_k=c_{k-1}c_{k-2}\dots c_1c_0$. ז.א. C_k הוא המספר המוזז מימינו של A לשמאלו, ונוכיח את הנוסחות

$m_k=(m_{k-1}+p\cdot c_{k-1})\ /\ 10$

$m_k=(1+p\cdot C_k)/10^k$

לדוגמה יהא

$A(7)=142{,}857=1\cdot10^5+4\cdot10^4+2\cdot10^3+8\cdot10^2+5\cdot10+7$

עבור $k=4$ (ולכן $k-1=3$) נכתוב את $p_4(A)$ ו-$p_3(A)$

$p_4(A)=285{,}714=2\cdot10^5+8\cdot10^4+5\cdot10^3+7\cdot10^2+1\cdot10+4$

$p_3(A)=857{,}142=8\cdot10^5+5\cdot10^4+7\cdot10^3+1\cdot10^2+4\cdot10+2$

מתקבל מיד ההפרש

$E=10\cdot p_4(A)-p_3(A)=2\cdot(10^6-1)$ (*)

היות ש-$10^6-1=7\cdot A$ ו-$c_3=2$, השויון (*) דלעיל נעשה ל- $E=c_3\cdot7\cdot A$ אבל $p_4(A)=m_4\cdot A$, $p_3(A)=m_3\cdot A$ ולכן -

$E=10m_4\cdot A-m_3\cdot A=c_3\cdot7\cdot A$

ואחרי הצמצום ב-A זה נותן $10m_4-m_3=c_3\cdot7$

ומכאן $m_4=(m_3+c_3\cdot7)/10$.

בדרך כלל, התהליך דלעיל הוא

$10p_k(A)-p_{k-1}(A)=10(c_{k-1}\cdot10^{r-1}+\ldots+c_0\cdot10^{r-k}+c_{r-1}\cdot10^{r-k-1}+\ldots+c_k)-$

$-(c_{k-2}\cdot10^{r-1}+\ldots+c_0\cdot10^{r-k+1}+c_{r-1}\cdot10^{r-k}+\ldots+c_{k-1})=c_{k-1}(10^r-1)=$

$=c_{k-1}\cdot p\cdot A$

מאחר ש- $p_i(A)=m_i\cdot A$, נובע כי

$10m_k\cdot A-m_{k-1}\cdot A=c_{k-1}\cdot p\cdot A$

לאחר הצמצום ב-A מתקבל

$10m_k=m_{k-1}+p\cdot c_{k-1}$

ומכאן $m_k=(m_{k-1}+p\cdot c_{k-1})/10$, מ.ש.ל.

את הנוסחה (1) נוכל לרשום גם בעזרת הקונגרואנטיה

$10m_k\equiv m_{k-1}(\mathrm{mod}\ p).$

הנוסחה (1) נותנת עבור $k=1$,

$m_1=(m_0+p\cdot c_0)/10$.

אבל מן $P_0(A)=1\cdot A=m_0\cdot A$ נובע $m_0=1$ ולכן $m_1=(1+pc_0)/10$.

באופן דומה מוצאים

$m_2=(m_1+p\cdot c_1)/10$. וכשנציב כאן את הערך של m_1 דלעיל נקבל:

$m_2=[(1+p\cdot c_0)/10+p\cdot c_1]/10=[1+p(c_0+10c_1)/10^2$

אבל $C_0+10c_1=C_2$, ולכן $m_2=(1+p\cdot C_2)/10^2$.

נניח כי עבור $k-1$, נכונה הנוסחה

$$m_{k-1}=(1+p\cdot C_{k-1})/10^{k-1}$$

ונחשב את m_k. מ-(1) נובע כי

$$m_k=(m_{k-1}+p\cdot c_{k-1})/10=[(1+p\cdot C_{k-1})/10^{k-1}+p\cdot c_{k-1}]/10= \qquad (**)$$

$$=[1+p\cdot(C_{k-1}+c_{k-1}\cdot 10^{k-1})]/10^k$$

היות ש-

$$C_{k-1}+c_{k-1}\cdot 10^{k-1}=(c_0+c_1\cdot 10+\dots+c_{k-2}\cdot 10^{k-2}+c_{k-1}\cdot 10^{k-1}=C_k,$$

(**) נעשית ל- $m_k=(1+p\cdot C_k)/10^k$

מ.ש.ל.

דוגמה: $A(7)=142,857$. עבור $k=3$, הנוסחה (2) נותנת

$$m_3=(1+7\cdot 857)/10^3=6000/1000=6$$

ז.א. $P_3=6A$, מה שנכון כפי שצוין לעיל.

ולהרחבת הנושא.

4. <u>הקשר בין k והגורמים $m_{i,k}$ במספרים ציקליים מסדר n.</u>

אם $A(P)$ מספר ציקלי מסדר n, אז קיימות n כפולות של A, נסמנן $A_{1,o},A_{2,o},\dots,A_{n,o}$ כך שכל אחת מהכפולות - $m_{i,k}\cdot A$ $(m_{i,k}=1,2,\dots,p-1)$ היא תמורה ציקלית של אחד המספרים $A_{i,o}$ $(i=1,2,\dots,n)$,

ז.א. עבור כל זוג (i,k) $(k=,0,1,\dots,r-1$, $i=1,2,\dots,n-1)$ קיים מספר טבעי $m_{i,k}$ $(m_{i,k}=1,2,\dots,p-1)$, כך ש- $m_{i,k}\cdot A$ $=P_k(A_{i,o})$.

בדוגמה דלעיל, עבור $p=13$, ראינו כי $n=2$ וקיימים המספרים $A_{1,o}=A$ ו- $A_{2,o}=2A$ כך שהמספרים $12A$, $10A$, $9A$, $4A$, $3A$, A הם כל התמורות הציקליות של $A_{1,o}=A$ והמספרים $11A$, $8A$, $7A$, $6A$, $5A$, $2A$ הם כל התמורות הציקליות של $A_{2,o}=2A$.

את המספרים $A_{i,o}$ נרשום באופן דומה ל-A, רק בתוספת של i בציון.

$$A_{i,0}=c_{i,r-1}\cdot 10^{r-1}+\ldots+c_{i,k}\cdot 10^{k}+c_{i,k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+c_{i,1}\cdot 10+c_{i,0}$$

בתהליך דומה לזה מסעיף 3, מתקבלות הנוסחות

$$m_{i,k}=m_{i,k-1}+p\cdot c_{i,k-1})/10 \qquad (3)$$

$$m_{i,k}=(m_{i,0}+p\cdot C_{i,k})/10^{k}$$

דוגמה. יהא $p=41$. אז $1:41=0.(02439)$, מספר מחזורי, והמחזור בן חמש ספרות. אבל $(41-1)/5=8$, ולכן $A(41)=(10^5-1)/41=02,439$ הוא מספר ציקלי מסדר 8. בחישוב קל מתקבלים המספרים $A_{1,0}(41)=A(41)=A$,

$A_{2,0}=2A(41)=2A$, $A_{3,0}=3A$, $A_{4,0}=4A$, $A_{5,0}=5A$, $A_{6,0}=6A$,

$A_{7,0}=11A$, $A_{8,0}=15A$, והתמורות הציקליות של $A_{i,0}$ $(i=1,2,\ldots,8)$ הן כל 40 הכפולות של A במספרים $1,2,\ldots,40$.

מאחר ש- $P_k(A_{i,0})=m_{i,k}\cdot A$, אחרי חישוב רגיל מקבלים את כל הערכים $m_{i,k}$ $(k=0,1\ldots4;\ i=1,2,\ldots,8)$. הקורא יוכל לבדוק כי המספרים $m_{i,k}$ מקיימים את הנוסחות (3),(4). הנה מקרה אחד מהם:

$k=3$, $i=7$; $A_{7,0}=11A=26,829$; $P_3(A_{7,0})=82,926=34A$, ז.א. $m_{7,3}=34$. ב- $A_{7,0}$ הספרה $c_{7,3}=6$. נחשב את $m_{7,4}$.

הנוסחה (3) נותנת:

$m_{7,4}=(m_{7,3}+p\cdot c_{7,3})/10=(34+41\cdot 6)/10=28$.

ובאמת, $p_4(A_{7,0})=68,292=28A$. כמו כן הנוסחה (4) נותנת:

$$m_{7,4}=(m_{7,0}+p\cdot C_{7,4})/10^4=(11+41\cdot 6829)/10^4=28$$

עד כאן עסקנו במקרים ש-p מספר ראשוני. מענין לדעת משהו גם על המקרים ש-p מספר פריק. ובזה מגיעים לנושא חדש.

5. מספרים כמעט ציקליים.

יהא המספר הפריק $p=39$. נחשב $1:39$ ונקבל כמנה את המספר העשרוני המחזורי $0.(025,641)$, שבו המחזור הוא בן שש ספרות. לכן $(10^6-1):39=025,641$, ז.א. $A(39)=025,641$ הוא בדיוק המחזור. בין המספר $r=6$ של ספרות המחזור (או של A) והמספר $p=39$, קיים הקשר $[(39-1):6]=6$ כאשר הסימון [ ] מסמן את החלק השלם של המנה. נגדיר את המספר $A(39)=025,641$, מספר <u>כמעט</u> ציקלי מסדר 6. והנה הסבר למלה הבלתי רגילה "כמעט": בין כפולותיו של $A(39)$ בגורמים $1,2,\ldots,38$ קיימים 36 מספרים המהווים שש קבוצות, כשמספרי כל

קבוצה הינם התמורות הציקליות של אחד משושת המספרים: $A=025,641=A_{1,0}$, $2A=051,282=A_{2,0}$, $3A=A_{3,0}$, $6A=A_{4,0}$, $7A=A_{5,0}$, $14A=A_{6,0}$ ועוד שני מספרים המהווים "חריגים" $13A=333,333$ ו-$26A=666,666$. אזי, עבור 36 מבין 38 הכפולות של $A(39)$, מתקיים כל מה שנאמר לעיל כאשר p היה מספר ראשוני ורק עבור שתי כפולות של A, קיימים חריגים. ההסבר ל"חריגים" הוא כי ל-13, 26 ו-39 יש גורם משותף - $13A=13\cdot(10^6-1)/39=333,333$

$26A=26\cdot(10^6-1):39=666,666$.

נעסוק להלן בתכונה חשובה נוספת של מספרים ציקליים.

6. <u>חבורות של מספרים ציקליים.</u>

יהא שוב $A(7)=142,857$ והתמורות הציקליות:

$C=P_2(A)=571,428=4A$, $B=p_5(A)=428,571=3A$

ו- $D=p_3(C)=P_3[p_2(A)]=428,571=3A$. ברור כי $p_3[p_2(A)]=p_5(A)$ והציון 5 של $p_5(A)$ הוא סכום הציונים של p_2 ו- p_3. נחשב עוד $p_4[p_3(A)]$ ונקבל בדיוק $p_1(A)$ והציון 1 של p_1 שווה לסכום הציונים של 4 ו-3 של p_4 ו-p_3, הסכום modulo 6. בדרך כלל, אם נסמן $(i+j)_6=(i+j)\mathrm{mod}_6$, אז $P_i[P_j(A)] = P[i+j]_6(A)$, איפה $i,j\varepsilon\{0,1,\ldots,5\}$

הקורא יוכל לבדוק תוצאה זו עבור כל זוג של תמורות ציקליות של A.

אם מספר הספרות של $A(p)$ הוא r, אז קיים השויון

$$P_i[P_j(A)]=P_{(i+j)r}(A)$$

פעולה זו של הרכבת שתי תמורות ציקליות של המספר הציקלי A, מסומנת על-ידי עיגול.

$$P_i(A)oP_j(A)=P_{(i+j)r}(A)$$

תהא $P=\{P_0(A),P_1(A),\ldots,P_{r-1}(A)\}$ קבוצת כל התמורות הציקליות של מספר ציקלי כלשהו. A מסדר 1, ופעולת ההרכבה "o". הקורא יוכל לבדוק כי פעולה זו היא בעלת התכונות:

א) היא אסוציאטיבית, ז.א. עבור כל שלוש תמורות ציקליות $P_i(A)$, $P_j(A)$, $P_k(A)$, מהקבוצה P (תמורות שונות או שוות) קיים השוויון

$$P_i(A)o[P_j(A)oP_k(A)]=[P_i(A)oP_j(A)]oP_k(A)$$

ב) היא חילופית $P_i(A)oP_j(A)=P_j(A)oP_i(A)$

ג) ב-P קיימת תמורה $P_o(A)$ כך שעבור כל $P_i(A)$ קיים $P_i(A)oP_o(A)=P_i(A)$. האיבר $P_o(A)$ נקרא האיבר הניטרלי של P.

ד) עבור כל תמורה $P_i(A)$, קיימת ב-P תמורה $P_j(A)$ כך ש-

$P_i(A)oP_j(A)=P_o(A)$

$P_j(A)$ נקרא האיבר הנגדי ל-$P_i(A)$.

הערה. פעולת ההרכבה של התמורות הציקליות, בעלת התכונות (א)-(ד) "דומה" לפעולת החיבור בקבוצת המספרים השלמים (הרציונאליים, הממשיים המרוכבים), בהן המספר 0 הוא האיבר הניטרלי ולכל מספר חיובי מהקבוצה, מתאים המספר הנגדי, וסכומם שווה ל-0.

הגדרה. קבוצה $E=\{a_1,...,a_i,...,a_n\}$, שבה הוגדרה פעולת הרכבה "o" כך שלכל שני איברים מ-E a_i,a_j, קיים ב-E איבר $a_m=a_ioa_j$ ולפעולת ההרכבה "o" התכונות (א)-(ד), נקראת חבורה חילופית מסדר n. זהו מושג חשוב ובעל יישום רב במדע. לכן, הקבוצה P של התמורות הציקליות של מספר ציקלי מסדר 1 מהווה חבורה חילופית מסדר n.

אם $A(p)$ מספר ציקלי מסדר n, או מספר כמעט ציקלי מסדר n, אז קבוצת התמורות הציקליות של $A_{1,o}$ מהווה חבורה חילופית מסדר r. יהא לדוגמה p=37 ולכן $1:37=0.(027)$ אז מתקבל $(10^3-1):37=027$, ז.א. $A(37)=027$.

היות ש- $(37-1):3=12$, נובע כי 027 הוא מספר ציקלי מסדר 12;

$A_{1,o}=027=A$

$A_{2,o}=054=2A,...,A_{7,o}=243=9A.....A_{12,o}=567=21A$.

בקבוצת המספרים $M_1=\{1,26,10\}$ = $\{m_{1,o}\ ,m_{1,1}\ ,m_{1,2}\}$ נגדיר את הפעולה "כפל מודול 37" ונסמנה ב-$(x)_{37}$.

לדוגמה:

$$m_{1,1}(x)_{37}m_{1,2}=26(x)_{37}10=(26\cdot 10)_{mod37}=1=m_{1,o}=m_{1,(1+2)_3}$$

הערה: הכפל mod p מתבצע לפי סכימה זו:

$1)m_i(x)_pm_j=a;$

$2)a:p=b\ ;$

$3)[b]\cdot p=c\ ;$ [b]=הערך השלם של b

$$4)a-c=d \Rightarrow m_i(x)_p m_j=d$$

והנה טבלת פעולה זו

(x)37	$m_{1,0}=1$	$m_{1,1}=26$	$m_{1,2}=10$
$m_{1,0}=1$	$m_{1,0}=1$	$m_{1,1}=26$	$m_{1,2}=10$
$m_{1,1}=26$	$m_{1,1}=26$	$m_{1,2}=10$	$m_{1,0}=1$
$m_{1,2}=10$	$m_{1,2}=10$	$m_{1,0}=1$	$m_{1,1}=26$

לכן הקבוצה M_1 מהווה חבורה חילופית מסדר 3. נשאיר לקורא לבדוק כי עבור אף אחת משאר הקבוצות M_i לא קיים $m_{i,k}(x)m_{i,h}=m_{i,l}$ ז.א. המכפלה מודולו 37 של שני איברים מקבוצה M_i אחרת (i=1) אינה איבר של אותה קבוצה M_i.

והנה טבלת הפעולה $(x)_7$
$M=\{m_0=1 ,m_1=5 ,m_2=4 ,m_3=6 ,m_4=2 ,m_5=3\}$

המשך בע' 38

שאלה:

פעם פרץ ריב בין ממשלות ארה"ב וקנדה. כדי לפגוע בקנדים הכריזו האמריקאים שמכאן ואלך יהיה הדולר הקנדי שוה אצלם רק 90 סנט. בתגובה הודיעו הקנדים שהדולר האמריקאי יהיה שוה אצלם רק 90 סנט.
אמריקאי אחד קנה דולר קנדי בצד האמריקאי. הוא שילם דולר של ארה"ב וקיבל 10 סנט עודף. עם הדולר הקנדי עבר את הגבול, ובקנדה קנה דולר אמריקאי בעד הדולר הקנדי שלו ושוב קיבל 10 סנט עודף. הוא חזר על התרגיל פעם, פעמיים, עד שהתעשר ממש. השאלה: על חשבון מי התעשר?

$(x)_7$	$m_0=1$	$m_1=5$	$m_2=4$	$m_3=6$	$m_4=2$	$m_5=3$
$m_0=1$	m_0 1	m_1 5	m_2 4	m_3 6	m_4 2	m_5 3
$m_1=5$	m_1 5	m_2 4	m_3 6	m_4 2	m_5 3	m_0 1
$m_2=4$	m_2 4	m_3 6	m_4 2	m_5 3	m_0 1	m_1 5
$m_3=6$	m_3 6	m_4 2	m_5 3	m_0 1	m_1 5	m_2 4
$m_4=2$	m_4 2	m_5 3	m_0 1	m_1 5	m_2 4	m_3 6
$m_5=3$	m_5 3	m_0 1	m_1 5	m_2 4	m_3 6	m_4 2

היות שהתכונות (א)-(ד) מתקיימות, גם הקבוצה הזאת מהווה חבורה חילופית אך מסדר 6.

בין החבורות
$P=\{P_0(A),P_1(A),\dots P_{r-1}(A)\}$, $M=\{m_0, m_1,\dots,m_{r-1}\}$, (או
$P=\{P_{1,0},\dots P_{nr-1}(A)\}$, $M_1=\{m_{1,0}, m_{1,1},\dots,m_{1r-1}\}$-ו אם
A(p) מספר ציקלי או כמעט ציקלי מסדר גדול מ-1), קיימת התאמה חד-חד
ערכית טבעית $M \longleftrightarrow P$ (או $M_1 \longleftrightarrow P_1$) נתונה ע"י $l,k_M \longleftrightarrow l,k_P$)
$m_k \cdot A \longleftrightarrow (P_k(A)$ התאמה ששומרת <u>גם</u> על תוצאות פעולת ההרכבה:
$m_k(x)m_i \longleftrightarrow P_k o P_i$, כלומר, למורכב של שני איברי החבורה P מתאים
בדיוק המורכב של שני האיברים המתאימים להם ב-M. שתי חבורות כאלה נקראות
איזומורפיות.

- כדי לעזור לקורא להעמיק בנושא, להלן כמה תרגילים:

(תשובות בע' 45)

1) נתון $A=A(79)=(10^{13}-1):79=0,126,582,278,481$

א) יש להראות כי $A(79)$ מספר ציקלי מסדר 6.

ב) יש לחשב $m_1,\dots,m_7$ ולהראות כי- $m_k \equiv c_k \pmod{10}$

ג) להראות כי $P_k(A)\equiv 8P_{k-1}(A) \bmod 79$ וגם $m_k \equiv 8m_{k-1} \bmod 79$.

הדרכה. $79=8\cdot 10-1$. יש להשתמש בשיטת הוכחת נוסחה (1).

2) נתון $A(21)=(10^6-1)/21=047,619$. הראה כי $A(21)$ מספר כמעט ציקלי מסדר 3. מהם החריגים? הסבר מדוע הם חריגים.

3) יהא $A(p)$ מספר ציקלי מסדר n ו- $A_{i,0}(p)=\alpha A(p)$, $(i=1,2,\dots,n)$. הראה, עבור $p=13$ ו- $p=37$ כי $P_k(\alpha A)\equiv \alpha P_k(A) \pmod p$.

4) עבור $p=37$, חשב את $M_2=\{m_{2,k}\}$ ו- $M_3=\{m_{3,k}\}$, $(k=0,1,2)$ איפה סומן כרגיל $m_{i,k}\cdot A=P_{i,k}(A)$ $(i=2,3)$. הראה כי

$$m_{2,i}(X)_{37}m_{2,j}=m_{3,(i+j\times i)_{37}}$$

ביבליוגרפיה

1) דוד רימר: על אודות בעיה מפתיעה, אתגר, גליונות מתמטיקה, מכון ויצמן והטכניון, (1986) גליון מס' 4, ע"מ 11-15.

2) Solomon Guttman: On cyclic numbers, Amer, Math, Month 41(1934), pp 159-166.

3) Martin Gardner: Cyclic Numbers in Mathematical Circus, A. Knopf, New-York (1979), pp. 111-112.

4) David Rimer: On a problem from the International Mathematics Olympiad, Journ of Recr, Math, 18(4), 1985-86, pp 269-274.

פתרון בעיות מגליון מס' 10

60. תהיה $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ קבוצה של n מספרים ממשיים שונים.

נסמן $a_{ij} = a_i+a_j$. נסמן ב$N(F)$ את עצמת הקבוצה

$\{a_{ij} ; i=1,\ldots,n ; j=1,\ldots,n\}$

מהו הערך המינימלי של $N(F)$? עבור אלו קבוצות F הוא מתקבל?

<u>פתרון</u>:

נסדר את אברי F כך ש-

$$a_1<a_2<\ldots<a_n$$

אזי ברור כי $a_{11}<a_{12}<\ldots<a_{1n}<a_{2n}<a_{3n}\ldots<a_{nn}$ ואלו $(2n-1)$ במספר, יוצא כי עבור כל קבוצה F יהיה $N(F)\geq 2n-1$ מאידך, אם F הוא הקבוצה $\{1,2,\ldots,n\}$ ברור כי המספרים a_{ij} הם כל המספרים הטבעיים מ-2 עד 2n, ואלה $(2n-1)$ במספר. מכאן שהערך המינימלי האפשרי עבור $N(F)$ הוא $(2n-1)$ והוא מתקבל כאשר F מורכב מאיברים עוקבים של סדרה חשבונית.

61. תהיה $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ F קבוצה של n מספרים שונים, שונים מ-0.

נסמן $b_{ij} = a_i\cdot a_j$

נסמן ב-$M(F)$ את עצמת הקבוצה $\{b_{ij} ; i=1,\ldots,n ; j=1,\ldots,n\}$ מהו הערך המינימלי של $M(F)$? עבור אלו קבוצות F הוא מתקבל?

<u>פתרון</u>:

עבור n זוגי $(n=2k)$ יתקבל הערך המינימלי של $m(F)$ כאשר F מורכב מ-k המספרים $\{\pm 1,\pm C,\pm C^n,\ldots,\pm C^{k-1}\}$ כאשר C הוא מספר כלשהו שונה מ-0 ו-1. במקרה זה יהיה $m(F)=4k-4=2n-4$. נשאיר לקורא להשלים את ההוכחה ולחשוב על מה שיש לעשות במקרה של n אי-זוגי.

62. המיתרים BE,FC,AD
נפגשים בנקודה M
במעגל.
<u>הוכח:</u>

$$AB \cdot CD \cdot EF = AF \cdot BC \cdot ED$$

<u>פתרון:</u>

יהיה O נקודת המפגש של שלושת המיתרים CF,BE,AD. מאחר ש-

$ABO = EDO$ (למה?)

$BDA = EOD$

יוצא שהמשולשים AOB,EOD דומים, ולכן

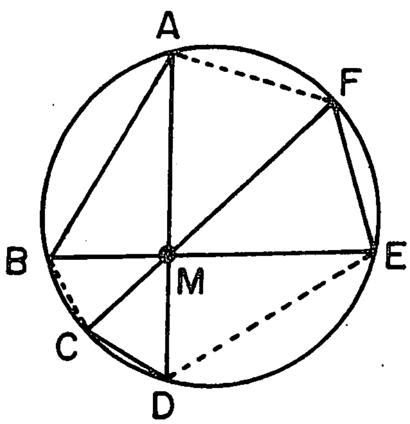
$$\frac{AB}{ED} = \frac{OA}{OE}$$

כמו כן

$$\frac{CD}{AF} = \frac{OC}{OA}$$

וגם

$$\frac{EF}{BC} = \frac{DE}{OC}$$



איור 8

הכפלת שלוש המשוואות האלה מובילה ל-

$$\frac{AB \cdot CD \cdot EF}{AF \cdot BC \cdot ED} = 1$$

63. במשולש נתון ABC,

הנקודה D נמצאת על הצלע AC

והנקודה E על הצלע AB

ו-CE ו-BD נפגשים ב-F.

נסמן את שטחי המשולשים AED ,AOF,

BFC , EFB , CFD ב- S_5,S_4,S_3,S_2,S_1 בהתאמה.

<u>הוכח:</u>

א. $S_2<S_1$

$S_2<S_3$

$S_4 \cdot S_5<S_3^2$

<u>פתרון:</u>

מאחר שהטלה אופינית ממישור אחד לשני אינה משנה יחסים בין שטחים, ננסה לפשט את הבעיה על-ידי הטלות כאלה. קל לראות, שבעזרת שתי הטלות אופיניות אפשר לקבל מצב שבו- AC = AB וגם $CAB = 90^o$.

נניח אפוא שקיבלנו מצב כזה, וניקח צירים AB,AC כאשר שיעורי הנקודות הם:

$$A(0,0)$$
$$B(a_0,0)$$
$$C(,a)$$

F נמצא בפנים המשולש ונגדיר את שיעוריו $F(h,k)$.

מאחר שמשוואת הישר BC היא $x+y=a$, אנו רואים כי $h+k<a$.

בעזרת הנדסה אנליטית אלמנטרית אנו יכולים לחשב את השיעורים של D,E ויוצא כי

$$D = \left[0,\ \frac{ak}{a-h}\right]$$

$$E = \left[\frac{ah}{a-k}\ ,0\right]$$

קל עכשיו לחשב את שטחי המשולשים ואנחנו מקבלים:

$$S_1 = \frac{a^2hk}{2(a-h)(a-k)}$$

$$S_2 = \frac{ahk(a-h-k)}{2(a-h)(a-k)}$$

$$S_3 = a(A-h-k)/2$$

$$S_4 = \frac{ak(h-a-k)}{2(a-k)}$$

$$S_5 = \frac{ah(a-h-k)}{2(a-h)}$$

רואים כי

$$S_2/S_1 = \frac{a-h-k}{a} < 1$$

ולכן $S_2 < S_1$.

כמו כן

$$S_2/S_3 = \frac{hk}{(a-h)(a-k)}$$

אבל

$$(a-h)(a-k)-hk=a(a-h-k)>0$$

ולכן $(a-h)(A-k)>hk$

ומכאן $S_2 < S_3$

לבסוף

$$\frac{S_4 \cdot S_5}{S_3^2} = \frac{a^2hk(a-h-k)^2}{4(a-h)(a-k)} \div \frac{a^2(a-h-k)^2}{4}$$

$$= \frac{hk}{(a-h)(a-k)}$$

$$= \frac{S_2}{S_3} < 1$$

ז.א

$$S_4 \cdot S_5 < S_3^2$$

64. יהיו $a_1,\dots,a_n$ מספרים חיוביים שמכפלתם שווה ל-1.
הוכח כי:

$$(1+a_1)(1+a_2)\ \dots\ (1+a_n) \ge 2^n.$$

מתי מתקיים שויון?

<u>פתרון:</u>

עבור כל r קיים, ולפי משפט הממוצעים,

$$\frac{1+a_r}{2} \ge a_r^{1/2}$$

ולכן

$$\prod_{r=1}^{n}(1+a_r) \ge 2^n \left[\prod_{r=1}^{n} a_r\right]^{2/1}$$

$$=2n$$

שויון יתקיים אם ורק אם, עבור כל r,

$$\frac{1+a_r}{2} \ge \sqrt{a_r}$$

דהיינו כאשר $a_1 = a_2 = a \dots a_n = 1$

בעיות חדשות

66. I הוא מרכז המעגל החסום במשולש ABC, ואילו A',B',C' הם מרכזי המעגלים החסומים במשולשים IBC, ICA, IAB בהתאמה. הוכח כי למעגלים החוסמים את המשולשים ABC, $A'B'C'$ יש מרכז משותף.

67. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ הם שתי סדרות של מספרים טבעיים המוגדרות כדלקמן:

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 1 \\ \text{עבור כל } n>0 \\ X_{n+1}=4X_n-X_{n-1}-1 \end{cases}$$

$$y_0 = 1$$
$$y_1 = 2$$
עבור כל $n>0$
$$y_{n+1} = 4y_n-y_{n-1}.$$

הוכח כי עבור כל $n\geq 0$, $y_n^2-3x_n^2=1$.

68. S היא קבוצה סופית של נקודות במישור, והן צבועות, כל אחת, כחול או לבן. בין הנקודות אין אף תת-קבוצה אחת של שלוש נקודות על ישר אחד, שהן כולן בעלות אותו הצבע. הוכח כי ניתן למצוא שלוש נקודות A,B,C על S, כולן צבועות באותו הצבע, כך שבמשולש ABC יש לפחות צלע אחת אשר אין עליה נקודה בעלת הצבע השני.

מספרים ציקליים (פתרונות)

1) $(79-1):13=6$

$m_1=(1+pc_0)/10=8;\ m_2=(m_1+pc_1)/10=64;\ m_3=38$

$m_4=67;\ m_5=62;\ m_6=22;\ m_7=18$

$m_1-c_1=0\ \ m_2-c_2=64-4=60\ \ldots,\ m_7-c_7=18-8=10$

$P_k(A)-8P_{k-1}(A)=(c_{k-1}\cdot 10^{12}+\ldots+$

$+c_0\cdot 10^{k-1}+c_{12}\cdot 10^{k-2}+\ldots+c_k)-8(c_{k-2}\cdot 10^{12}+\ldots+$

$+c_0\cdot 10^{k}+c_{12}\cdot 10^{k-1}+\ldots+c_{k-1})=c_{k-1}(10^{12}-8)+$

$+c_{k-2}\cdot 10^{11}(1-80)+\ldots+c_k(1-80)=c_{k-1}(10^{12}-8)-79\ U,\ (u\varepsilon Z)$

$10^{12}-8=(10^{13}-80)/10=(10^{13}-1)/10-(79/10)=79\cdot A/10-(79/10=$

$=(1/10)79(A-1)=79v\ (v\varepsilon Z)$

$P_k(A)-8P_{k-1}(A)=79v-79u=79t\ (t\varepsilon Z)$

הערה. תרגיל זה מראה את יעילות הנוסחה (1), בלעדיה, חישובו של m_k מוביל לפעולות ארוכות.

2) $r=6$; $[(21-1):6]=3$, (הסימון [ ] מסמן את הערך השלם). החריגים הם $7A=333,333$ ו-$14A=666,666$ (ל-21 ול-7 יש גורם משותף) שמצטמצם, ומכנה השבר הוא למעשה 3 (או 6).

3)

$A(13)=076,923;\ P_1(A)=307,692=4A$

$A_{2,0}=2A(13)=153,846\quad P_1(A_{2,0})=P_1(2A)=615,384=8A=2\cdot P_1(A)$ וכו'

4) $\{m_{2,k}\}=\{2,15,20\}$. $\{m_{3,k}\}=\{3,4,30\}$. נבנה את לוח הכפל

$(X)_{37}$	$m_{2,0}$ 2	$m_{2,1}$ 15	$m_{2,2}$ 20
$m_{2,0}$ 2	$m_{3,1}$ 4	$m_{3,2}$ 30	$m_{3,0}$ 3
$m_{2,1}$ 15	$m_{3,2}$ 30	$m_{3,0}$ 3	$m_{3,1}$ 4
$m_{2,2}$ 20	$m_{3,0}$ 3	$m_{3,1}$ 4	$m_{3,2}$ 30

אלה חלק מעבודותי הקודמות.

מתוך American Scientist