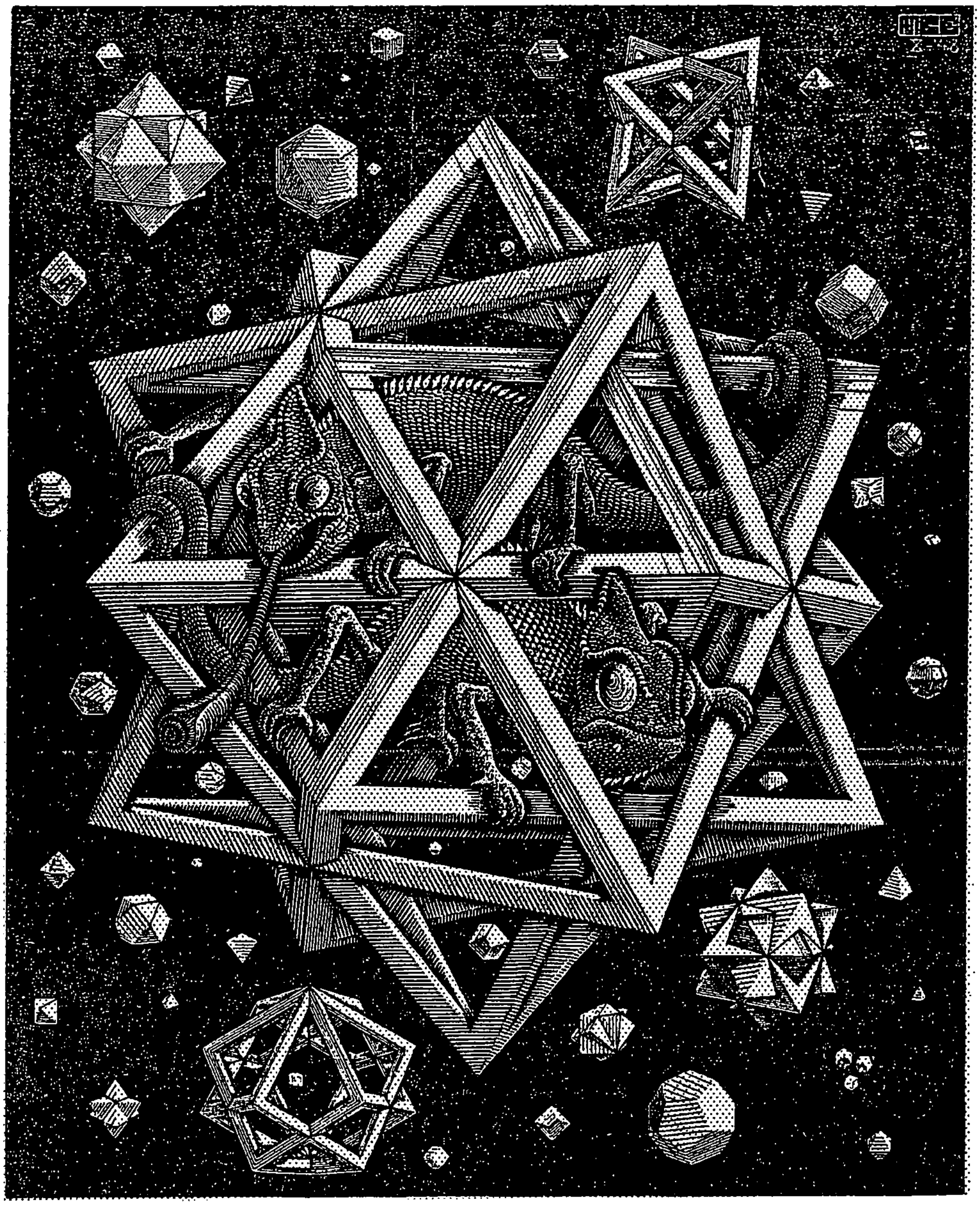
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס. 6 אלול תשמ"ו ספטמבר 1986



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון וייצמן למדע
רחובות

בחסות המרכז המדעי י.ב.מ. ישראל

תוכן העניינים עמוד

יוצא לאור על ידי הפקולטות למתמטיקה במכון וייצמן למדע ובטכניון.

המערכת: פרופ. י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שימושית, מכון וייצמן למדע
פרופ. א. ברמן, המחלקה למתמטיקה, הטכניון.

מען המערכת: הפקולטה למתמטיקה שימושית, מכון וייצמן למדע, ת.ד. 26,
רחובות 76100, טלפון 08-483544.

ד ב ר   ה מ ע ר כ ת

גליון זה פותח את שנת הלימודים תשמ"ז ואנו מאחלים לכל קוראינו שנה טובה ומוצלחת.
כזכור לא יכלנו לכלול בגליון הקודם את פתרונות הבעיות מהאולימפיאדה הישראלית במתמטיקה וזה מפאת חוסר מקום. התחייבנו לכלול אותם בחוברת זו ותוכלו לשים לב כי אמנם עמדנו בהתחיבות, אשר כתוצאה ממנה הגליון הפעם ארוך מהרגיל.

אנו גם מפנים את תשומת לב הקוראים לטופס ההרשמה לחידוש מנויים או לפתיחת מנוי חדש (ראה ע' 33). המעוניינים מתבקשים למלא את הטופס ולהחזירו בצירוף התשלום, בהקדם האפשרי.

בעיית זוגות הכדורים

מ. שמשוני (רחובות)

בגליון מס' 5 נתבקשו הקוראים לפתור בעייה שניסוחה היה:

"ברשותנו שלושה זוגות כדורים בצבעים אדום, ירוק וכחול. כל ששת הכדורים צורתם זהה אך בכל זוג אחד הכדורים כבד מחברו. כל הכדורים הכבדים משקלם שווה זה לזה, וכיוצא בזה הכדורים הקלים. הנך נדרש לזהות עבור ששת הכדורים את כל הכבדים ואת כל הקלים, וזאת באמצעות שתי שקילות בלבד על מאזני אסל (כפות)".

ניתוח הבעייה המובא כאן יעזור אולי גם בהבנתן של בעיות אחרות:

אם נסדר את שלושת זוגות הכדורים, יתכנו לכל זוג אחת משתי אפשרויות - הכדור הראשון קל או כבד. לפיכך על השקילות לאפשר לנו להבדיל בין 2x2x2 = 8 אפשרויות שונות. תוצאת שקילה יכולה להיות אחת משלוש: הכף הימנית כבדה, קלה או שוות משקל לכף השמאלית. במידה ומבצעים שתי שקילות נוכל לקבל לכל היותר 3x3 = 9 תוצאות שונות. מאחר ומספר התוצאות עולה על מספר האפשרויות ביניהן יש להכריע, יתכן שהבעייה פתירה. אילו היה מספר התוצאות קטן ממספר האפשרויות, היה הדבר מוכיח בעליל שאין כל דרך למצוא את הפתרון במספר השקילות הנתון. למשל, על ידי שתי שקילות (9 תוצאות) לא ניתן לזהות ארבעה זוגות כדורים (16 אפשרויות). להלן שני תנאים מגבילים על השקילות.

1. כל שקילה צריכה לאפשר קבלת כל אחת משלוש התוצאות האפשריות. לו היתה שקילה המאפשרת למשל, רק שתי תוצאות, הרי סך כל התוצאות היה לכל היותר 3x2 = 6, כלומר קטן ממספר האפשרויות השונות.
2. אסור שתוצאת השקילה הראשונה תוכל להתאים ליותר משלוש אפשרויות שונות, כי אז שלוש התוצאות של השקילה השניה לא תוכלנה להפריד ביניהן.

מה נובע משני תנאים אלה?

א. אין לשקול כדור אחד כנגד אחד. אם נשווה שני כדורים שווי צבע, לא יתכן שוויון - בניגוד לתנאי 1. אם נשווה שני כדורים שוני צבע ונקבל שוויון, אז לגבי שני הצבעים אשר השתתפו בשקילה יש שתי אפשרויות (או ששני הכדורים המשתתפים קלים או ששניהם כבדים), ונוסף לכך יש שתי אפשרויות לגבי הצבע השלישי - סך הכל 2x2 = 4 אפשרויות - בניגוד לתנאי 2.

ב. אין לשקול שלושה כדורים כנגד שלושה כי במקרה זה לא תתכן תוצאת שוויון - בניגוד לתנאי 1.

ג. אין, כמובן, לשים בשתי הכפות מספר שונה של כדורים, בגלל תנאי 1, מכאן שבשקילה הראשונה יש לשקול שני כדורים כנגד שניים. שקילה כזאת אפשרית בארבע דרכים:

1. בב-אא, כלומר שני כדורים בני אותו צבע כנגד שניים אחרים שהם שווי צבע. ברור שהתוצאה תהיה שוויון, ואנו פוסלים הצעה זו בגלל תנאי 1.

2. בג-אא. אם יהיה שוויון רק נדע שאחד משני הכדורים בכף הימנית כבד מבלי לדעת מיהו, וכמו כן אין לנו כל מידע לגבי שני הכדורים א - 4 תוצאות אפשריות בניגוד לתנאי 2.

3. אב-אב, גם כאן אם יהיה שוויון נותרנו עם שתי אפשרויות לגבי הצבעים א, ב ועוד שתיים לגבי הצבע ג, שוב בניגוד לתנאי 2.

4. נותרה רק האפשרות אג-אב שאינה מפרה אף אחד מן התנאים.

כעת שארית הדרך קלה. יש לבדוק כל אחת משלוש התוצאות האפשריות של השקילה הראשונה ולהיווכח שניתן על ידי שקילה נוספת להגיע לפתרון חד משמעי. הרהור נוסף מראה כי ניתן להחליט על השקילה השניה עוד לפני התקבל תוצאות השקילה הראשונה. מאחר שבמקרה זה השקילה השניה בלתי תלויה בשקילה הראשונה, אין עוד טעם לקרוא לאחת "ראשונה" ולאחרת "שניה", ומכאן ששתי השקילות חייבות להיות כנדרש מן הניתוח דלעיל עבור השקילה הראשונה.

והנה פתרון עבור שתי השקילות

$$א_2ג_1-א_1ב_1$$

$$ב_1ג_2-א_1ג_1$$

והקורא נקרא לוודא שאכן ניתן להבדיל בין כל שמונה האפשרויות.

וכעת תרגיל נוסף הקשור לבעייה זו. כמה שקילות נחוצות במקרים בהם יש 4,5,6,7,8,9, או 10 זוגות כדורים? ולהציע <u>בקצרה</u> עבור כל מקרה איך לבצע את השקילות.

היוכלו הקוראים לנחש למה אינני שואל על המקרה של 11 זוגות כדורים?

<u>הערת העורך</u>:
במערכת העתון התקבל פתרון דומה מאחד הקוראים, צחי אשכנזי, המשרת בצה"ל, ובדעתנו לפרסמו בעוד מועד. בינתיים החלטנו להביא את הפתרון של ד"ר שמשוני, בעיקר מפני שהוא מבהיר את השיקולים היסודיים שהובילו לפתרון זה, דבר הפותח דרך להכללת הבעיה.

אי - שויון קושי - שוארץ (Cauchy - Schwartz)

ו. גרשוביץ, ירושלים

I. אי-שוויון זה קובע כי עבור מספרים ממשיים כלשהם $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ ו- $\{b_1 b_2,\dots,b_n\}$ מתקיים

$$(a_1b_1+a_2b_2\dots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2\dots+b_n^2)$$

השוויון "=" מתקבל אך ורק כאשר שני המערכים $(a_1,a_2,\dots,a_n)$, $(b_1,b_2,\dots\dots,b_n)$ פרופורציונליים זה לזה, דהיינו כאשר קיים מספר x כך ש-

$$a_ix + b_i = 0$$

עבור $1 \leqslant i \leqslant n$.

לאי-שוויון חשוב זה יש שמושים רבים בתחומים שונים של המתמטיקה.

<u>הוכחה</u>: נגדיר את הפונקציה $f(x)$, עבור כל x ממשי:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_ix+b)^2$$

ברור כי $f(x) \geqslant 0$ וגם ש- $f(x) = 0$ אך ורק אם x הוא כזה ש- $a_ix+b_i = 0$ עבור $i = 1,2,\dots,n$. מאידך

$$f(x) = x^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2x \sum_{i=1}^{n} a_ib_i + \sum_{i=1}^{n} b_1^2$$

אם אין המערכים $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ פרופורציונלים אזי $f(x) > 0$ עבור כל x ממשי; ומכאן שלמשואה הרבועית $f(x) = 0$ אין שורש ממשי. זה גורר כי

$$4(\Sigma a_ib_i)^2 < 4\,\Sigma a_i^2\,\Sigma b_1^2$$

אי - השוויון הנדרש. גם רואים מיד את התנאי לשוויון.

II. במקרים $n=2$ (ו- $n=3$) יש לאי-שוויון זה האינטרפרטציה הגאומטרית הבאה: במשולש $\Delta\ OAB$

לפי משפט קוסינוס: $\cos\varphi = \dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2\cdot OA\cdot OB}$

הביטוי באגף ימין לא גדול בערכו המוחלט מ-1.

$$|OA^2+OB^2-AB^2| \le 2OA\cdot OB \quad (OA > 0 \quad OB > 0)$$

אם נבטא את אורכי צלעות המשולש בעזרת שיעורי הנקודות O,B,A

נקבל: $|(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-[(a_1-b_1)^2+(a_1-b_2)^2]| \le 2\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}$

או $|a_1b_1+a_2b_2| \le \sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}$

ובכך במקרה $n=2$ אי-שוויון קושי-שוורץ נובע ממשפט הקוסינוסים ומהעובדה ש: $|\cos\varphi| \le 1$. (במקרה כללי האינטרפרטציה אומרת כי מכפלה סקלרית של שני וקטורים גדולה ממכפלתם של ערכיהם.

נביא דוגמא לשימוש באי-שוויון הנפלא הזה:

מה הוא הערך המקסימלי של הביטוי: $(a\sin\varphi+b\cos\varphi)$?

<u>פתרון</u>: $a\sin\varphi+b\cos\varphi \le |a\sin\varphi+b\cos\varphi| \le \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=\sqrt{a^2+b^2}$

אז $\max(a\sin\varphi+b\cos\varphi) = \sqrt{a^2+b^2}$

והמקסימום מתקבל אם: $\dfrac{\sin\varphi}{a} = \dfrac{\cos\varphi}{b}$

אז $\mathrm{taun} = \dfrac{a}{b}$

הוכחה נוספת של אי-שוויון קושי-שוורץ

III. נסמן:

$$A = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_1^2} \Rightarrow A^2 = \Sigma a_i^2$$

$$B = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_1^2} \Rightarrow B^2 = \Sigma b_i^2$$

אזי

$$\frac{\Sigma a_i b_i}{A\cdot B} = \Sigma \frac{a_i}{A} \cdot \frac{b_i}{B} \leqslant \Sigma \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a_i}{A}\right)^2 + \left(\frac{b_i}{B}\right)^2 \right]$$

[אנו מסתמכים פה על $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$]

אבל:

$$\Sigma \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{b_i}{A}\right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\Sigma a_1^2}{A^2} + \frac{\Sigma b_1^2}{B^2} \right] = 1$$

לכן:

$$\Sigma a_i b_i \leqslant A\cdot B = \sqrt{\Sigma a_1^2}\cdot\sqrt{\Sigma b_1^2}$$

הוכחה נוספת מתקבלת מיד מהזהות של Lagrange (לגרנג')

IV.

$$\Sigma a_k^2 \cdot \Sigma b_k^2 - (\Sigma a_k b_k)^2 = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (a_k b_l - a_l b_k)^2$$

נשאיר לקורא להוכיח נוסחה זו. ישנן כמה הוכחות, למשל בדרך האינדוקציה.

האגף הימני של הנוסחה אי שלילי, לכן:

$$\sum a_k^2 \cdot \sum b_k^2 \geq (\sum a_k b_k)^2$$

V. <u>תרגיל 1</u> להוכיח אי-שוויון קושי שוורץ ישירות בעזרת אינדוקציה מתמטית

<u>תרגיל 2</u> הוכח כי

$$\frac{|a_1+a_2+\ldots+a_n|}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$

<u>תרגיל 3</u> הוכח כי

$$(a_i > 0) \quad (a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

<u>תרגיל 4 (בעית מחקר) הערכה של אי-שוויון קושי-שוורץ</u>

משפט:

$$1 \leq \frac{\sum a_i^2 \cdot \sum b_i^2}{(\sum a_i b_i)^2} \leq 1+\varepsilon$$

כאשר

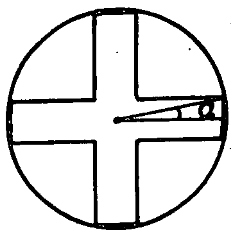
$$\varepsilon = \left(\sqrt{\frac{M_1 \cdot M_2}{m_1 \cdot m_2}} - \sqrt{\frac{m_1 \cdot m_2}{M_1 \cdot M_2}}\right)^2$$

$$M_2 = \text{Max}\{b_i\}, \quad M_1 = \text{Max}\{a_i\}, m_2 = \text{Min}\{b_i\}, m_1 = \text{Min}\{a_i\}$$

ברור כי $\varepsilon \geq 0$. מעניין לתאר גם כל המקרים אשר $\varepsilon = 0$

<u>עתה נעבור לפתרון בעיות בעזרת אי-שוויון קושי שוורץ</u>

<u>בעיה 1</u> צלב חסום באופן סימטרי במעגל הנתון. מה צריכה להיות הזוית α כדי ששטח הצלב יהיה מירבי?



<u>פתרון:</u>

$$S(\alpha) = (2R\sin\alpha)^2+4(R\cos\alpha-R\sin\alpha)2R\sin\alpha$$

$$= 4R^2(\sin2\alpha-\sin^2\alpha) = 4R^2[\sin2\alpha - \frac{1-\cos2\alpha}{2}] \;;$$

או
$$S(\alpha) = 2R^2[(2\sin2\alpha+\cos2\alpha)-1]$$

ולכן מספיק לחקור את הביטוי: $\underline{y = 2\sin2\alpha + \cos2\alpha}$

אבל לפי הדגמה בסעיף III קיים:

$$2\sin2\alpha+1\cdot\cos2\alpha < \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

מכאן נובע כי: $S_{max} = 2R^2\sqrt{5}-1$ והוא מתקבל במקרה:

$$\frac{\sin2\alpha}{2} = \frac{\cos2\alpha}{1} \quad \text{או} \quad tg2\alpha = 2$$

או
$$\alpha = \frac{1}{2}\,arctg2$$

(נציין שאם קוטר המעגל $2R = 1$ אז $S_{max} = \frac{\sqrt{5-1}}{2}$ וקשור עם "החתך הזהב")

<u>בעיה 2</u> <u>משיק לאליפסה</u>

נתון ישר $mx+ny=K$ (<u>משוואה בצורה כללית!</u>)

ואליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

שנפגשים בנקודות Q ו- P.

אם נזיז ישר במקביל אז n ו- m לא ישתנו, ישתנה רק K.
ישר שנוגע באליפסה בנקודה אחת בלבד נקרא משיק לאליפסה.
(<u>משיק אינטואיטיבי</u>)

<u>מציאת משואת המשיק</u>

יהיו נתונים m ו- n $(m^2+n^2\neq 0)$ ותהיה (x_1,y_1) אחת מנקודות השקה ו- K יכול לקבל ערך כלשהו. לנקודה השקה יש התכונות הבאות:

$$(1)\quad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

$$(2)\quad mx_1+ny_1=K$$

(3) המרחק d מנקודת (0,0) עד הישר כאשר K משתנה הוא מירבי בהשואה לישרים אחרים שעבורם קיימת נקודה (x_1y_1) המקיימת את התנאים (1) ו- (2)

$$d=\frac{|K|}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{|mx_1+ny_1|}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{\left|ma\cdot\frac{x_1}{a}+nb\cdot\frac{y_1}{b}\right|}{\sqrt{m^2+n^2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{(ma)^2+(nb)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b}\right)^2}}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{\sqrt{(ma)^2+(nb)^2}}{\sqrt{m^2+n^2}}=\text{Const}$$

אבל זה יתקבל אך ורק כאשר

$$\frac{\frac{x_1}{a}}{ma}=\frac{\frac{y_1}{b}}{nb}$$

או

$$\frac{m}{n}=\frac{\frac{x_1}{a^2}}{\frac{y_1}{b^2}}$$

או

$$m=\frac{x_1}{a_2}\cdot t\qquad\qquad n=\frac{y_1}{b^2}\cdot t$$

אם נציב את m ו- n במשואה , נקבל

$$\frac{x\,x_1}{a^2}t+\frac{y\,y_1}{b^2}t=k$$

או
$$\frac{x\,x_1}{a^2}+\frac{y\,y_1}{b^2}=\frac{k}{t}$$

נציב כאן את (x_1,y_1) ונקבל כי

$$\frac{k}{t}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,$$

ולכן משואת המשיק היא :
$$\frac{x\,x_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$$

<u>תרגיל</u> הוכח : תנאי שישר $mx+ny=k$ הוא משיק של האליפסה היא

$$k^2=a^2m^2+b^2n^2 \;:$$

VI. <u>אי-שיויון של קרלסון (Carlson)</u>

<u>משפט</u>
$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^4<\Pi^2\sum_{k=1}^{n}(a_k^2)\sum_{k=1}^{n}(k^2a_k^2).$$

למעשה משפט זה הוא מקרה פרטי של אי-שיויון יותר כללי כפי שנראה מיד.
ובכן נניח שיש לנו שתי סדרות $\{a_i\}$ ו- $\{c_i\}$ $(i=1,2,\ldots,n)$,
כאשר $c_i\neq 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$. מאי-שיויון קושי-שוורץ נובע כי

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}a_kc_k\cdot\frac{1}{c_k}\right)^2$$

$$<\sum_{k=1}^{n}(a_kc_k)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k^2}$$

אם נגביל את הדיון למקרה ש- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c_k^2}$ מתכנס, נגדיר $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c_k^2} = C$,

אזי נקבל

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leq C \sum_{k=1}^{n} a_k^2 c_k^2$$

1) ניקח למשל $c_k = k$ $(k = 1,2,\ldots)$

ידוע כי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \pi^2/6$ ומכאן יוצא שעבור כל $\{a_k\}$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leq \pi^2/6 \sum_{k=1}^{n} k^2 a_k^2 .$$

2) ניקח עכשיו $t > 0$ כלשהו ונגדיר

$$c_k = (t + k^2/t)^{\frac{1}{2}}$$

במקרה זה יהיה

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 c_k^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 (t + k^2/t)$$

$$= Pt + \frac{Q}{t}$$

כאשר $P = \sum_{k=1}^{n} (a_k^2)$, $Q = \sum_{k=1}^{n} (k^2 a_k^2)$ ולכן

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leq \left(Pt + \frac{Q}{t}\right) \cdot M_n(t)$$

כאשר הגדרנו

$$M_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{t}{t^2+k^2}$$

נוכיח למטה כי

$$(*) \quad 0 < M_n(t) < \pi/2$$

ולכן, עבור כל $t > 0$, קיים

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 < \frac{\pi}{2}\,(Pt + Q/t)$$

נציב $t = \sqrt{\frac{Q}{P}}$ ונקבל

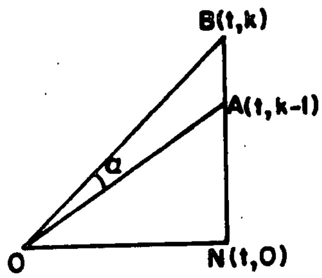
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 < \pi\sqrt{PQ}$$

$$= \pi\,\left(\Sigma\, a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\Sigma\, k^2 a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ומזה נובע מיד כי

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^4 < \pi^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} k^2 a_k^2$$

דהיינו אי-שיוויון של קרלסון.



נשאר איפוא להוכיח את אי-שיוויון (*).

דרך אחת פשוטה היא בעזרת שיקול טריגונומטרי.
בציור מופיעות

B, A, N, O אשר שיעוריהן הן בהתאמה:

(t,k) $(t,k-1)$, $(t,0)$, $(0,0)$

ואילו $\sphericalangle BOA = \alpha$, נוכל לחשב את שטח המשולש

OAB בשתי דרכים ומקבלים כי

$$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot t = \frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot \sin\alpha$$

(סוף המאמר בע' 27)

פתרון הבעיות מהאולימפיאדה לנוער במתמטיקה (תשמ"ו)

אנו מגישים כאן פתרונות מקוצרים ומשאירים לקוראינו שישלימו את החסר.

1. הוכח כי עבור כל m שלם וחיובי וכל α ממשי, הפולינום

$$x^{m+1}\cos(m-1)\alpha - x^m\cos m\alpha - x\cos\alpha + 1$$

מתחלק ב- $x^2-2x\cos\alpha+1$.

<u>פתרון</u>: באינדוקציה; אחרת נוכל להעיר כי

$$x^2-2x\cos\alpha+1 = (x-e^{i\alpha})(x-e^{-i\alpha})$$

ולהציב $x=e^{\pm i\alpha}$ בפולינום.

2. מצא את כל הזוגות של מספרים שלמים (x,y) המקיימים

$$(x-1)\cdot x\cdot(x+1) = y^5$$

<u>פתרון</u>

$$y^5 = x(x^2-1)$$

אבל ל- x ו- (x^2-1) אין גורם משותף ולכן נוכל לכתוב $y=pq$ כאשר $p^5=x$, $q^5=x^2-1$. אבל אז יהיה $p^{10}-q^5=1$ וזה לא יתכן.

3. הוכח כי אין למצוא מספרים שלמים x,y המקיימים

$$x^3-y^3 = 5746$$

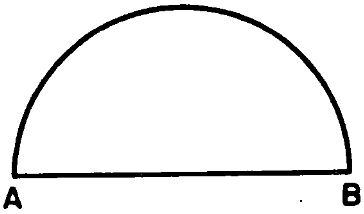
<u>פתרון</u>

$$x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

בעוד

$$5746 = 2\cdot 13^2\cdot 17$$

ולכן $(x-y)$ היה צריך לחלק את $2\cdot 13^2\cdot 17$. ניתן לבדוק את האפשרויות השונות.



4. נתון חצי מעגל (ראה ציור). מבין כל המצולעים הקמורים בעלי n צלעות אשר כל קדקודיהם נמצאים בחצי העיגול, מהו המצולע בעל השטח המירבי? נמק.

__פתרון.__ אם P,Q,R הם שלושה קדקודים סמוכים של המצולע בעל השטח המירבי אזי ברור כי $PQ=QR$, כי אחרת אם ניקח Q' כך ש- $PQ'=Q'R$ נראה מיד כי שטח המשולש $PQ'R$ יהיה גדול מזה של המשולש PQR. יוצא כי לבנות את המצולע האופטימלי יש לחסום במעגל השלם מצולע משוכלל בעל $(2n-2)$ צלעות אשר A ו- B הם בין קדקודיו.

5. $\{a_1,a_2,\ldots\ldots\ldots\}$ מהווים סדרה אינסופית של מספרים ממשיים, כולם שונים זה מזה. הוכח כי ניתן לבחור מסדרה זו סדרה חלקית שהיא אינסופית ומונוטונית.

__פתרון.__ אם איזה איבר a_i הוא כזה שהוא גדול מכל האיברים a_j אשר $j>i$, נקרא ל- a_i __איבר ענקי__. אם יש אינסוף של איברים ענקיים אזי אלה מהווים בהכרח סדרה __יורדת__. אם אין יהיה a_{n_0} האיבר הענקי האחרון, אם יש בכלל כאלה, ואחרת ניקח $n_0=0$. יוצא כי a_{n_0+1} הוא בכל מקרה לא ענקי ולכן קיים $n_1>n_0+1$ כך ש- $a_{n_1}>a_{n_0+1}$. אבל גם a_{n_1} איננו ענקי ולכן קיים $n_2>n_1$ כך ש- $a_{n_2}>a_{n_1}$, וכו'.

6. נתונים מספרים ממשיים a,b,c,p,q,r המקיימים

(i) $a<b<c$

(ii) $p>0,\quad q>0,\quad r>0$.

הוכח כי למשואה

$$\frac{p}{x-a}+\frac{q}{x-b}+\frac{r}{x-c}=1$$

יש שלושה פתרונות ממשיים, אשר בדיוק אחד מהם גדול מ- c.

__פתרון.__ נכתוב את המשואה בצורה הבאה:-

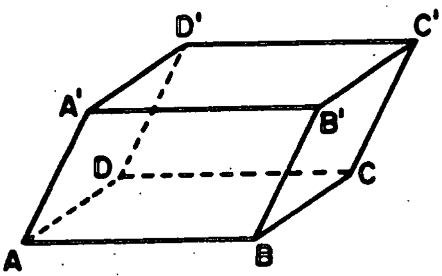
$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)-p(x-b)(x-c)-q(x-c)(x-a)-r(x-a)(x-b)=0$$

ברור כי

$$f(a)=-p(a-b((a-c) < 0$$
$$f(b)=-q(b-c)(b-a) > 0$$
$$f(c)=-r(c-a)(c-b) < 0$$
$$f(+\infty) \sim x^3 > 0$$

ולכן יש שורש אחד בכל אחד מהקטעים (a,b), (b,c), ו- (c,∞).

7. $ABCD\ A'B'C'D'$ הוא מקבילון תלת-מימדי (ראה ציור). דרך C' מעבירים מישור מחוץ למקבילון החותך את הישרים AA', AD, AB בנקודות R,Q,P בהתאמה.



עליך לקבוע את R,Q,P על הישרים האלה כך שנפח הפירמידה $APQR$ יהיה קטן בכל אפשר.

פתרון. נקבע את האפס ב-A ונקח צירים AA', AD, AB. נגדיר $AA'=C, AD=b, AB=a$ ואז C' תהיה הנקודה (a,b,c). אם משואת המישור המבוקש היא

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$$

אזי יתקיים

$$(1) \quad \ldots \quad \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} = 1$$

מאידך שיעורי P יהיו $(\alpha,0,0)$, של Q $(0,\beta,0)$ ושל R $(0,0,\gamma)$. יוצא כי נפח הפירמידה APQR יהיה פרופורציונלי ל- $\alpha\beta\gamma$. הבעיה איפוא היא למצוא בין כל המערכות (α,β,γ) המקיימות (1), את זו אשר עבורה α,β,γ הוא מזערי . הפתרון הוא כאשר

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} = 3 .$$

8. המערכת a_{ij} מוגדרת עבור $0\le i$ וכל j שלם $(-\infty<j<\infty)$ כדלקמן:

(I) $a_{0,0} = 1$

(II) $a_{0,j} = 0$ עבור $j \neq 0$

(III) עבור כל $i>0$

$$a_{i,j} = 2(a_{i-1,j-1} + a_{i-1,j+1}) - a_{i-1,j}$$

הוכח כי:

$$a_{n,0} = (-1)^n \sum_{r=0}^{[n/2]} 2^{2r} \frac{n!}{(n-2r)!(r!)^2}$$

<u>פתרון</u>. עבור משתנה x איזשהו נגדיר

$$f_i(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{ij}x^j \quad (i=0,1,2,\ldots)$$

מ- (I) ו- (II) נובע כי

$$f_0(x) = 1$$

ומ- (III) נובע כי

$$\left(\frac{2}{x} - 1 + 2x\right) f_{i-1}(x) = f_i(x)$$

משני אלה מסיקים כי

$$f_n(x) = \left(\frac{2}{x} - 1 + 2x\right)^n$$

ולכן

$a_{n,0}$ הוא האיבר החופשי בפונקציה זו.

אבל

$$\left(\frac{2}{x}-1+2x\right)^n = \Sigma\binom{n}{s}\left(\frac{2}{x}+2x\right)^s(-1)^{n-s}$$

מאידך בפונקציה $\left(\frac{2}{x}+2x\right)^s$ אין איבר חופשי אלא אם כן s זוגי, נגיד $s=2r$ ואז הוא $2^{2r}\binom{2r}{r}$.

9. ידוע כי מספר הפרמוטציות של הקבוצה $\{1,2,...,n\}$ היא $n!$ ונסמן את הפרמוטציות האלה $\pi_1,\pi_2 \ldots \pi_{n!}$. אם π_k היא הסדרה $(a_1,a_2,...,a_n)$ מגדירים

$$S_k = (a_1-a_2)^2 + (a_2-a_3)^2 + \ldots + (a_{n-1}-a_n)^2$$

חשב את הממוצע החשבוני של המספרים S_k, דהיינו

$$\frac{1}{n!}\Sigma_{k=1}^{n!} S_k$$

__פתרון__. ניקח i,j כלשהם ונספור כמה פעמים מופיע האיבר $(i-j)^2$ באחוד של כל הסכומים S_k. הוא יופיע ב- S_k אך ורק אם בפרמוטציה π_k האיבר j בא מיד אחרי i ומספר הפרמוטציות האלה הוא $(n-1)!$ *(למה?)*. מכאן ש-

$$\sum_{k=1}^{n!} S_k = (n-1)!\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i-j)^2$$

$$= (n-1)!\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^2-2ij+j^2)\right\}$$

$$= 2\cdot(n-1)!\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij\right\}$$

$$= 2\cdot(n-1)!\left\{n \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right\}$$

ולכן הממוצע החשבוני יהיה

$$\frac{2\cdot(n-1)!}{n!}\cdot n^2(n+1)\left\{\frac{2n+1}{6}-\frac{n+1}{4}\right\}$$

$$=\frac{n(n+1)(n-1)}{6}=\binom{n+1}{3}\ .$$

* * * *

האולימפיאדה הבינלאומית למתמטיקה

האולימפיאדה הנ"ל מתקיימת כמעט מדי שנה, כל פעם במקום אחר. ראשיתה היתה לפני כ- 30 שנה, כאשר המדינות המשתתפות היו בעיקר ממזרח אירופה. מאז התרחבו מימדי התחרות והשנה כאשר היא התקיימה בפולין, השתתפו בה נבחרות מ- 37 מדינות מכל רחבי העולם.

מעניין כי אין שום גוף בינלאומי המסדיר ומפקח על התחרות. התקנון נקבע מדי שנה על ידי המדינה המארחת שהיא אחראית גם לאכסן ולארח (על חשבונה) את כל באי האולימפיאדה. בין השאר היא קובעת את מספר המירבי של משתתפים שיכולה כל מדינה לשלוח.

השנה (1986) נקבעה גודל הנבחרת ב- 6, כאשר לכל נבחרת היה גם ראש הקבוצה וסגנו. ראשי הקבוצות הגיעו לפולין כמה ימים מראש, בעיקר כדי להכין את השאלונים שיוצגו בפני המשתתפים. שאלות הוצעו ע"י כמה מהמדינות המשתתפות ומכלל השאלות האלו נבחרו 6. הבחינה נמשכה יומיים כאשר בכל יום נתבקשו המתחרים להשיב על 3 שאלות.

משום מה התפתחה מסורת שלפיה תשובה מלאה ונכונה על שאלה מזכה את הנבחן ב- 7 נקודות, כך שהציון המירבי הוא 42 נקודות. השנה היו רק שלושה מבין המתחרים שהגיעו לציון מלא זה, שנים מברית המועצות ואחד מהונגריה. מקובל להעניק פרס ראשון בערך ל- 8% מהמשתתפים, פרס שני ל- 18% הבאים אחריהם ופרס שלישי ל- 25% הבאים, כך שכמחצית המשתתפים מקבלים פרס אישהו. לא תמיד מקפידים על האחוזים האלה והשנה, מתוך 207 מתחרים, קבלו 18 פרס ראשון, 40 פרס

שני ו- 48 פרס שלישי. נבחרת ישראל הורכבה מ-

- יואב יפה	הריאלי, חיפה
- שוני דר	עירוני ד', תל-אביב
- איתן סיג	להנדסאים ליד האוניברסיטה, ת"א
- רז נאות	אורט, קרית ביאליק
- פאול בירן	הריאלי, חיפה
- גד קוזמה	תיכון עירוני ד', ת"א

מבין אלה, שני הראשונים קבלו פרס שני, והשנים שלאחריהם פרס שלישי.

בנוסף על הציון האישי של כל מתחרה, מתחשבים גם בציון הכולל של המדינה, דהינו בסכום הציונים של נציגיה. לפי מדד זה הגיעו ברית המועצות וארצות הברית שווים למקום הראשון ומיד אחריהם סין העממית. עובדה זו מבליטה את היתרון של המדינות הגדולות. בסופו של דבר יותר קל למצוא ששה מתמטיקאים צעירים מצטיינים מתוך אוכלוסיה של מאות מליונים מאשר מתוך אוכלוסיה קטנה. ישראל הגיעה למקום ה- 14, אבל מבין המדינות הקטנות יחסית, דהינו בעלות אוכלוסיות של פחות מ- 15 מליון, היתה ישראל במקום חשני אחרי הונגריה.

ראש המשלחת היה פרופ. י. גיליס ממכון וייצמן למדע וסגנו ד"ר ר. אהרוני מהטכניון.

יש איפוא לראות את התוצאה כהישג מכובד למדי. אנו מציגים למטה את 6 השאלות שהוצגו הפעם בפני המתחרים.

1. יהא d מספר שלם חיובי שונה מ- 2, 5, 13. הוכח כי בקבוצה $\{2,5,13,d\}$ קיים זוג a,b $(a\neq b)$ כך ש: $ab-1$ אינו רבוע שלם.

2. יהא $A_1A_2A_3$ משולש ו- P_o נקודה כלשהי באותו מישור. לכל $s \geq 4$ נגדיר $A_s = A_{s-3}$. יוצרים סדרת נקודות $P_o, P_1, P_2 \ldots$ כך ש- P_{k+1} מתקבל מ- P_k ע"י סיבוב סביב A_{k+1} בזוית של 120^o עם כיוון השעון $(k = 0,1,2 \ldots)$. נתון כי $P_{1986}=P_o$. הוכח כי המשולש $A_1A_2A_3$ הוא שווה צלעות.

3. בכל קדקד של מחומש משוכלל מציבים מספר שלם כך שסכום כל חמשת המספרים חיובי. אם בשלושה קדקדים עוקבים מוצבים המספרים x,y,z בהתאמה ואם $y < 0$ אזי מותרת הפעולה הבאה:

במקום x,y,z מציבים בהתאמה את המספרים

$$x+y,-y,z+y$$

חוזרים על פעולה כזו כל עוד לפחות אחד המספרים שלילי. קבע האם תהליך זה מסתיים בהכרח אחרי מספר סופי של פעולות.

4. יהיו A,B קדקדים סמוכים של מצולע משוכלל בעל n צלעות $(n \geq 5)$ במישור ויהא O מרכז המצולע. משולש XYZ חופף למשולש OAB ובתחילה מתלכד עמו. מזיזים את המשולש XYZ במישור כך ש- Y ו- Z שניהם עוברים על כל היקף המצולע ו- X נשאר בפנים המצולע. קבע את המקום ההנדסי של X.

5. מצא את כל הפונקציות f המוגדרות על המספרים הממשיים האי-שליליים והמקבלות ערכים ממשיים אי-שליליים ומקיימות:

(i) $f(xf(y))f(y) = f(x+y)$ לכל $x,y \geq 0$

(ii) $f(2) = 0$

(iii) $f(x) \neq 0$ עבור $0 \leq x < 2$

6. נתונה קבוצה סופית של נקודות במישור בעלות קואורדינטות שלמות. האם תמיד אפשר לצבע את הנקודות חלקן באדום והשאר בלבן כך שעל כל ישר L המקביל לציר x או לציר y ההפרש בין מספר הנקודות הלבנות והאדומות קטן או שווה (בערכו המוחלט) מ- 1? נמק את תשובתך.

<u>תחרות במתמטיקה ע"ש י. גרוסמן ז"ל - תשמ"ו</u>

התחרות התקיימה בטכניון, חיפה, ביום ל"ג בעומר תשמ"ו, 27.5.86. התוצאות היו כדלקמן:

פרס ראשון

יואב יפה	הריאלי, חיפה	כיתה י'

פרס שני

אורי בלאס	גמנסיה הרצליה, ת"א	כיתה יב'

פרס שלישי

יהודה שלום	תיכון ליד האוניברסיטה, י-ם	כיתה יב'

ציונים לשבח:

פאול בירן	הריאלי, חיפה	כיתה יא'
איל זקס	" "	כיתה יב'
ארז לפיד	עירוני ד', ת"א	כיתה ט'
רז נאות	אורט, קרית ביאליק	כיתה יב'

להלן השאלון שהוצג בפני המשתתפים.(עבור פתרונות על השאלות ראה עמוד 24).

1) במשולש חד זווית מורידים אנכים מאמצע כל צלע לשתי הצלעות האחרות של המשולש. אנכים אלו יוצרים משושה. הוכח כי שטח המשושה שווה לחצי משטח המשולש.

2) יהיו c ו- d מספרים שלמים, $c \neq 0$ ו- $d > 0$. הוכח שלפולינום $x^3 + 3cx^2 - dx + c$ יש לכל היותר שורש רציונלי אחד.

3) תהיינה $f(x) = x+1$ ו- $g(x) = x/(x+1)$. הוכח שכל מספר רציונלי חיובי שונה מ- 1 ניתן לקבל בצורה אחת ויחידה על ידי סדרת הפעולות של שתי הפונקציות הללו על המספר 1. (למשל, המספר 5/3 מתקבל בצורה הבאה: $f(1) = 2$, $g(2) = 2/3$, $f(2/3) = 5/3$).

4) על מעגל מסודרות n נקודות שונות. באחת מהן מציבים את המספר 1, ובשאר את המספר 0. פעולה מותרת היא החלפת המספרים בשלוש נקודות סמוכות על המעגל (0 מוחלף ב - 1 ולהיפך. כלומר, בשלושה מקומות סמוכים מוחלף כל מספר x ב- 1-x). לאלו ערכי n ניתן להגיע על ידי **סדרת** פעולות מותרות מן המצב ההתחלי למצב שבו יש 0 בכל נקודה על המעגל? הוכח!

5) מנקודה P על כדור יוצאים שלושה קטעים ניצבים זה לזה לנקודות A, B, C הנמצאות אף הן על פני הכדור. הוכח שהקטע המחבר את P עם מרכז הכדור עובר דרך נקודת פגישת התיכונים של המשולש ABC.

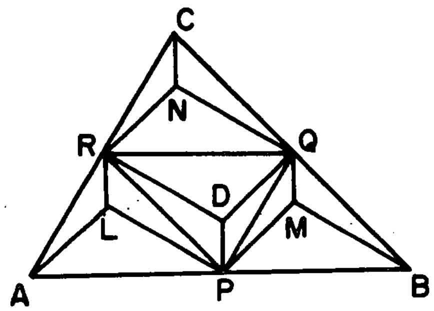
6) הסדרה a_n מוגדרת על ידי נוסחת הנסיגה הבאה:

$$\begin{cases} a_{2n} = a_n \\ a_{4n+3} = 0 \\ a_{4n+1} = 1 \end{cases} \quad \text{לכל } n \geq 0$$

הוכח כי הסדרה אינה מחזורית.

__פתרונות לתחרות גרוסמן, תשמ"ו__

1) יהא ABC המשולש המקורי ו-P, Q, R מרכזי הצלעות AB, BC ו- AC בהתאמה.



מתקבלים ארבעה משולשים חופפים QRP, RQC, PBQ,APR דומים ל- ABC.
מכיון ש- ABC הוא משולש חד זוית, נקודת מפגש הגבהים שלו נמצאת בתוך המשולש, ודבר דומה נכון עבור נקודות המפגש D, N, M, L של המשולשים הקטנים המתאימים (ראה ציור). האנך מ-Q ל-AB הוא גובה במשולש PBQ ולכן עובר דרך M, ודבר דומה נכון עבור האנכים האחרים. המשולש PMQ חופף ל-QDP, המשולש QNR חופף ל-RDQ והמשולש RLP חופף ל-PDR. לכן שטח המשושה PMQNRL (שהוא המשושה הנדון בשאלה), שווה לפעמיים שטח המשולש PQR, בעוד שטח המשולש PQR שווה לרבע משטח המשולש ABC. מ.ש.ל.

2) מכיון שמקדמי הפולינום $f(x) = x^3 + 3cx^2 - dx + c$ הם מספרים שלמים והמקדם של x^3 הוא 1, כל שורש רציונלי של הפולינום הוא שלם. נניח שלפולינום יש שני שורשים שלמים a_1, a_2. אזי קיים גם שורש שלישי a_3. כידוע מתקיימות אז נוסחאות וייטה:

$$a_1 + a_2 + a_3 = -3c$$

$$a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = -d$$

$$a_1a_2a_3 = -c$$

מן המשוואה הראשונה נובע שגם a_3 שלם. מכך ומן המשוואה השלישית נובע שכל אחד מן השורשים קטן או שווה בערכו המוחלט לערכו המוחלט של c.
מכך ומן המשוואה השלישית נובע כי כל שורש שווה ל- c-. מכך שכל השורשים שווים נובע שצד שמאל של המשוואה השנייה הוא חיובי, בסתירה לנתון על d.

3) לכל מספר רציונלי חיובי x מתקיים $f(x) > 1,\ 0 < g(x) < 1$. לכן, אם מספר y כלשהו מתקבל על ידי סדרת הפעלות של הפונקציות f ו- g מן המספר a הרי הפעולה האחרונה נקבעת בצורה חד ערכית (הפעלת f אם $y > 1$ והפעלת g אם $y < 1$). מכך ברור שסדרת ההפעלות של הפונקציות נקבעת בצורה חד ערכית. נותר להראות כי כל מספר y מתקבל בדרך זו. נכתוב $y = p/q$. אם $y > 1$ נסמן $x = (p-q)/q$ ואז $f(x) = y$. אם $y < 1$ נסמן $x = p/(q-p)$ ואז $g(x) = y$. בשני המקרים $x > 0$ וסכום המונה והמכנה של x קטן מסכום המונה והמכנה של y. לכן במספר סופי של צעדים לאחור נגיע למספר 1. בהליכה בכיוון הפוך בשרשרת הפעולות נקבל את y מ- 1.

4) בבדיקה פשוטה של מספר מקרים תגלה שהדבר אפשרי ל- n שאינו מתחלק ב-3, ואינו אפשרי ל- n המתחלק ב-3. נוכיח תחילה את העובדה השניה. יהא $n = 3k$ נסמן את הנקודות על המעגל מ-1 עד n; ונסמן ב- A_i את קבוצת הנקודות j כך ש- j משאיר שארית i מ-3. בכל פעולה מותרת מוחלף ערכו של מספר אחד בדיוק מכל קבוצה A_i מ-0 ל-1 או מ-1 ל-0. לכן משתנה בכל פעולה הזוגיות של סכום המספרים ב- A_i לכל $i = 1, 2, 3$. מכיון שבמצב ההתחלי היו הזוגיות של הסכומים שונות (סכום A_1 אי־זוגי, בעוד שסכום A_2 זוגי), הן תשארנה שונות בכל שלב. לכן אי אפשר להגיע למצב של אפסים בכל הנקודות (שבו כל הסכומים זוגיים).

להוכחת האפשרות לערכי n שאינם מתחלקים ב-3 נניח תחילה ש- $n = 3k+2$. נחליף שלשות עוקבות של אפסים ליחידות. ישאר לנו 0 יחיד. נשנה אותו ל-1, ואת שתי היחידות שמצד אחד שלו לאפסים. עתה יש שני אפסים עוקבים $3k - 1$ יחידות עוקבות. ב- k צעדים של החלפות שלישיות עוקבות של 1 - ים באפסים נגיע למצב של אפס בכל נקודה.

ל - $n = 3k + 1$ ההוכחה דומה.

5) נסמן ב- Q, R, S את אמצעי הצלעות AB, BC, AC של המשולש ABC וב- O את מרכז הכדור. הנקודה Q נמצאת במרכז המעגל החוסם את המשולש PBA ולכן הקטע OQ ניצב למשולש PBA. מכיון שגם PC ניצב לאותו משולש הקטעים OQ ו- PC מקבילים ולכן נמצאים באותו מישור. מישור זה מכיל את הקטעים OP ו- QC, ולכן גם שני קטעים אלו נחתכים. מכיון שהקטע QC נמצא במישור המשולש ABC יוצא ש-PO חותך את מישור ABC בנקודה הנמצאת על התיכון QC. בדומה מוכיחים ש- PO חותך גם את שני התיכונים האחרים של ABC, ולכן עובר דרך נקודת הפגישה של התיכונים.

<u>הוכחה שניה</u> (בדרך אנליטית)

ניקח מערכת צירים תלת-מימדית עם ראשיתה ב- P; יהיה O מרכז הכדור ו- (a,b,c) השיעורים שלו. משואת הכדור היא

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz = 0$$

ושיעורי A יתקבלו אם נציב $y = z = 0$. רואים מיד כי A היא הנקודה $(2a,0,0)$ וכמו כן B היא $(0,2b,0)$ ו- C היא $(0,0,2c)$.
אם G היא מפגש התיכונים של המשולש ABC ידוע כי שיעוריו הם

$$\frac{1}{3}(2a,0,0) + \frac{1}{3}(0,2b,0) + \frac{1}{3}(0,0,2c)$$

דהינו $\frac{1}{3}(a,b,c)$ ולכן ברור כי G נמצא על הישר PO.

6) נניח שהסדרה מחזורית ונסמן את מחזורה ב- k. אזי $a_{n+k} = a_n$ לכל n.
נכתוב את k כ- $2^s m$ כאשר m הוא מספר איזוגי. נתבונן בשני מקרים:

א. $m = 4b + 1$. אזי $a_m = 1$ $a_{3m} = 0 - 1$. מן התנאים על הסדרה נובע אז כי $a_k = 1$ $a_{3k} = 0 - 1$. אבל זוהי סתירה לכך שלסדרה יש מחזור k.

ב. $m = 4b + 1$. אזי $a_m = 0$ $a_{3m} = 1 - 1$. אזי $a_k = 0$ $a_{3k} = 1 - 1$, ושוב מתקבלת סתירה.

(סוף מע' 14)

ומכאן ש-

$$t = \sqrt{t^2+(k-1)^2} \cdot \sqrt{t^2+k^2} \cdot \sin\alpha$$

$$< (t^2+k^2)\sin\alpha$$

יוצא כי

$$\frac{t}{t^2+k^2} < \sin\alpha < \alpha = \arctan\frac{k}{t} - \arc\tan\frac{k-1}{t} .$$

ומכאן ש-

$$M_n(t) < \arctan\frac{1}{t} + \left(\arctan\frac{2}{t} - \arctan\frac{1}{t}\right) + \ldots$$

$$+ \left(\arctan\frac{n}{t} - \arctan\frac{n-1}{t}\right)$$

$$= \arctan\frac{n}{t}$$

$$< \pi/2 .$$

<u>פתרונות לבעיות מ"אתגר - גלימנות מתמטיקה", גליון מס' 4</u>

.19 מצא את כל המערכות (x,y,z) של מספרים טבעיים המקיימים

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}$$

<u>פתרון</u>: נניח כי $x \leqslant y \leqslant z$ ואז

$$\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{4}{15} > \frac{1}{4}$$

ומכאן $x \leqslant 3$. מאידך ברור כי $x > 1$ ולכן האפשרויות הן $x = 2,3$.

נבדוק עכשיו את האפשרויות השונות:

א) $x = 3$. במקרה זה יהיה

$$\frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{30} > \frac{1}{5}$$

ולכן $y \leqslant 4$, זה מגביל את האפשריות למקרים

$$x = 3, \quad y = 3$$
$$x = 3, \quad y = 4$$ ו-

בשני המקרים רואים כי z לא יוכל להיות מספר טבעי ולכן $x \neq 3$.

ב) $x = 2$. עכשיו יהיה

$$\frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{20} > \frac{1}{7}$$

ולכן $y \leqslant 6$. מאידך

$$\frac{1}{y} < \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10} < \frac{1}{3}$$

ולכן $y \geqslant 4$. נשאר איפוא לבדוק את המקרים $x = 2$, $y = 4,5,6$
ורואים כי הפתרונות היחידים הם

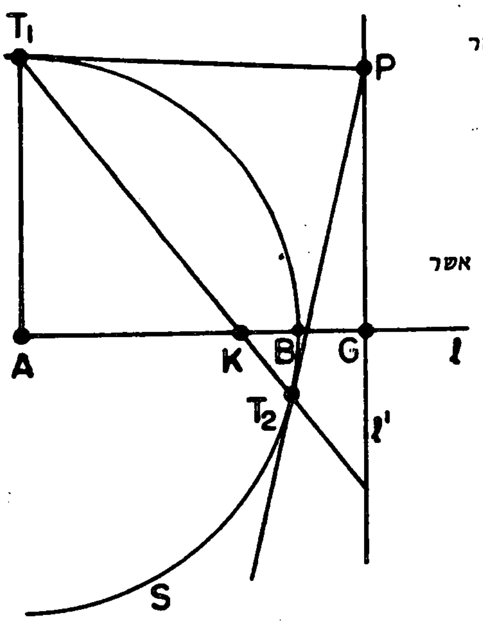
$(2,4,20)$ ו- $(2,5,10)$

20. הנקודות A,B,C (בסדר זה) נמצאות בקו ישר l ונתון כי

$$|AB| = 4\ |BC|$$

S הוא המעגל עם מרכז A ורדיוס AB ; l' הוא ישר מאונך ל l העובר דרך C: P היא נקודה כלשהי על l'. המשיקים מ-P למעגל S משיקים לו ב T_1,T_2 ו-H הוא מפגש הגבהים של המשולש PT_1T_2. מצא את המקום ההנדסי של H כאשר P נע לאורך l'.

<u>פתרון:</u>



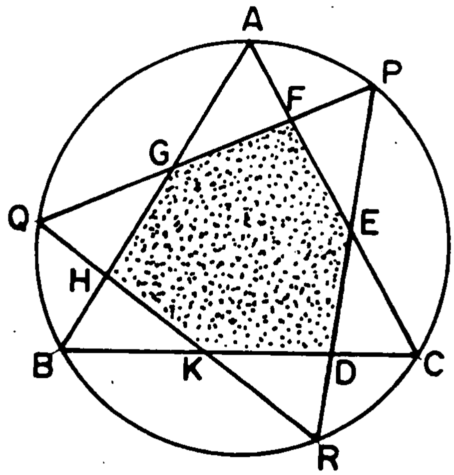
הנקודות T_1,T_2,C נמצאות על מעגל אשר קוטרו AP. תהיה K נקודת המפגש של הישר T_1T_2 עם l. מדמיון המשולשים AT_1K, ACT_1 יוצא כי $AK = \frac{AT_1^2}{AC} = \frac{4}{5}AC$, ולכן K הוא קבוע.

אם H הוא מפגש הגבהים של המשולש PT_1T_2 אזי המרובע AT_1HT_2 הוא מעויין אשר מרכזו, L, הוא המפגש של T_1T_2 ו- AP. כאשר P נע על l' , L נע על מעגל אשר קוטרו AK ולכן H נע על מעגל הומוטטי לו ביחס 2:1 דהיינו על מעגל אשר מרכזו K ורדיוס AK.

21. ABC, PQR הם משולשים שווי צלעות חסומים במעגל בעל רדיוס R; S הוא התחום המשותף לשני המשולשים; $|S|$ הוא השטח של S . הוכח כי

$$|S| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} R^2$$

באיזה תנאים יתכן שוויון?



<u>פתרון</u>:

נסתכל בציור. מאחר ש- $CP = AQ = BR$

בגוד המיתרים AB,BC,CA שווים והזוויות $\sphericalangle P = \sphericalangle Q = \sphericalangle R = 60°$,
יוצא כי המשולשים PEF, QGH, RKD חופפים. אבל גם

$$RB = QA = PC$$

ולכן גם המשולשים AFG, BKH, CDE חופפים גם הם לשלושת המשולשים
הקודמים. אם S הוא פנים המשושה $FGHKDE$ יוצא כי שטחו של S
הוא

$$\frac{1}{2}\{S_{ABC} + S_{PQR} - 6\ S_{AFG}\}$$

ולכן זה יהיה מינימום כאשר S_{AFG} הוא מכסימום. קל לאשר כי זה
יקרה כאשר A הוא האמצע של הקשת PAQ והמסקנה נובעת.

22. נתון מספר טבעי n ופולינום $P(x,y,z)$ המקיים
1) $P(1,0,0) = P(0,1/2,1) = 1$.
2) עבור כל x,y,z,w ממשיים

$$P(wx,wy,wz)=w^nP(x,y,z)$$

וגם $2P(x,y,z)=P(x,y,w)+P(x,w,z)+P(w,y,z)$

מצא את הפולינום $P(x,y,z)$.

<u>פתרון</u>: מהצבת $x = 1$, $y = z = 0$ מקבלים

$$P(w,0,0) = w^n P(1,0,0) = w^n \quad (1)$$

מאידך

$$2P(x,y,z) = P(x,y,0)+P(x,0,z)+P(0,y,z) \quad (2)$$

אם נציב ב- (2) $z = 0$ נקבל

$$P(x,y,0)+P(x,0,0)+P(0,y,0) = 2P(x,y,0)$$

דהיינו

בדרך דומה

$$(3) \quad \begin{cases} P(x,y,0) = P(x,0,0)+P(0,y,0) \\ P(x,0,z) = P(x,0,0)+P(0,0,z) \\ P(0,y,z) = P(0,y,0)+P(0,0,z) \end{cases}$$

מ-(2) ו-(3) יוצא כי

$$P(x,y,z) = P(x,0,0)+P(0,y,0)+P(0,0,z)$$

אבל

$$P(0,y,0) = (2y)^n P(0,\tfrac{1}{2},0)$$

בעוד

$$P(0,0,z) = z^n P(0,0,1)$$

מאידך

$$1 = P(0,\tfrac{1}{2},1) = P(0,\tfrac{1}{2},0) + P(0,0,1)$$

ולכן

$$P(x,y,z) = x^n+(2y)^n P(0,\tfrac{1}{2},0)+z^n\{1-P(0,\tfrac{1}{2},0)\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\{P(x,y,w)+P(x,w,y)+P(w,x,y)\}$$

יוצא כי <u>עבור כל w</u>

$$0 = w^n + 2^n w^n P(0,\tfrac{1}{2},0)+w^n\{1-P(0,\tfrac{1}{2},0)\}$$

וזה מחייב

$$P(0,\tfrac{1}{2},0) = -\frac{2}{2^n-1}$$

קבלנו איפוא כי הפתרון היחיד הוא

$$P(x,y,z) = x^n - \frac{2^{n+1}}{2^n-1}y^n + \frac{2^n+1}{2^n-1}z^n$$

23. הוכח כי עבור כל $x,y,z > 0$

$$8(x^3+y^3+z^3)^2 \geqslant 9(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy)$$

<u>פתרון</u>: נכתוב

$$F = 8(x^3+y^3+z^3)^2 - 9(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy)$$

$$= 8(x^6+y^6+z^6)+7(y^3z^3+z^3x^3+x^3y^3)-18x^2y^2z^2-9xyz(x^3+y^3+z^3)$$

לפי משפט הממוצעים קיים

$$x^6 + \frac{y^3z^3+z^3x^3+x^3y^3}{3} \geqslant x^6+x^2y^2z^2$$

$$\geqslant 2x^4yz$$

ולכן

$$x^6+y^6+z^6 + (y^3z^3+z^3x^3+x^3y^3) \geqslant 2xyz(x^3+y^3+z^3)$$

יוצא כי

$$F \geqslant x^6+y^6+z^6 + 5xyz(x^3+y^3+z^3) - 18x^2y^2z^2$$

אבל, שוב לפי משפט הממוצעים,

$$x^6+y^6+z^6 \geqslant 3x^2y^2z^2$$

$$x^3+y^3+z^3 \geqslant 3xyz$$

ומכאן $F \geqslant 0$.

24. הוכח כי עבור כל n טבעי

$$(n!)! \geq n!\{(n-1)!\}^{n!}$$

<u>פתרון</u>:

$$(n!)! = n! \prod_{\beta=0}^{n-2} \{ \prod_{\alpha=1}^{(n-1)!} [n!-\beta(n-1)!-\alpha]\} \cdot [(n-1)!-1] \tag{1}$$

אבל

$$\prod_{\alpha=1}^{(n-1)!} [n!-\beta\cdot(n-1)!-\alpha] > \prod_{\alpha=1}^{(n-1)!} [n!-\beta\cdot(n-1)!-(n-1)!]$$

$$= \prod_{\alpha=1}^{(n-1)!} \{(n-1)![n-\beta-1]\}$$

(המשך בעמ' 34)

(ג ז ו ר כ א ן)

לכבוד
מערכת "אתגר-גליונות מתמטיקה"
לידי מר אפרים בנהר
היחידה לפעולות נוער
מכון וייצמן למדע
<u>רחובות 76100</u>

....
(תאריך)

א.נ.,
מצורפת בזה המחאה מספר .... משוכה על בנק ....
סניף ...., על סך -.6 ש"ח, בעבור חידוש המנוי על "אתגר-גליונות מתמטיקה לשנת תשמ"ז.

השם: .... הכתובת: ....
מיקוד: ...., טלפון: ....
ביה"ס: ....(או צה"ל) .....
כתה: .... ד.צ.: ....

....
(חתימה)

$$= [(n-1)!]^{(n-1)!}(n-\beta-1)^{(n-1)!}$$

אם נציב את זה ב-(1) נקבל

$$(n!)! > n! \prod_{\beta=0}^{n-2} \{(n-\beta-1)^{(n-1)!}[(n-1)!]^{(n-1)!}\} \cdot [(n-1)!-1]$$

$$> n![(n-1)!-1]\{(n-1)!\}^{(n-1)\cdot(n-1)!} \times \prod_{\beta=0}^{n-1}(n-\beta-1)^{(n-1)!}$$

$$= n![(n-1)!-1][(n-1)!]^{(n-1)\cdot(n-1)!}[(n-1)!]^{(n-1)!}$$

$$= n!\{(n-1)!-1\}[(n-1)!]^{n!}$$

$$> n![(n-1)!]^{n!}$$

בעיות חדשות

35. עבור כל מספר טבעי n מגדירים

$$f(n) = 1^n + 2^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + (2-n)^3 + (n-1)^2 + n$$

מהו הערך המינימלי של $f(n+1)/f(n)$?

36. עבור כל קבוצה S של מספרים טבעיים, נסמן ב- $m(S)$ המכפלה המשותפת הקטנה ביותר של האיברים של S. אם X היא קבוצה כלשהי של 6 מספרים טבעיים עוקבים, הוכח כי אי אפשר לחלק את X לשתי קבוצות זרות U,V (דהיינו ללא איבר משותף) כך ש- $m(U) = m(V)$.

37. אם x,y,z הם מספרים ממשיים המקיימים

$$x + y + z = 0$$
$$x^2+y^2+z^2 = 6$$

מהו הערך המירבי של $x^2y+y^2z+z^2x$?

38. על הצלעות AB,AC של משולש ABC כלשהו בונים רבועים. אם P,Q הם מרכזי הרבועים האלה ו- M הוא האמצע של BC, הוכח כי $MP = MQ$ והזוית $\angle PMQ$ היא 90°.

39. AB,BC הם שני מיתרים שווים של מעגל בעל רדיוס r. D היא נקודה בפנים המעגל כך שהמשולש DBC הוא שווה צלעות והישר AD חותך את המעגל ב- E. הוכח כי $DE = r$.