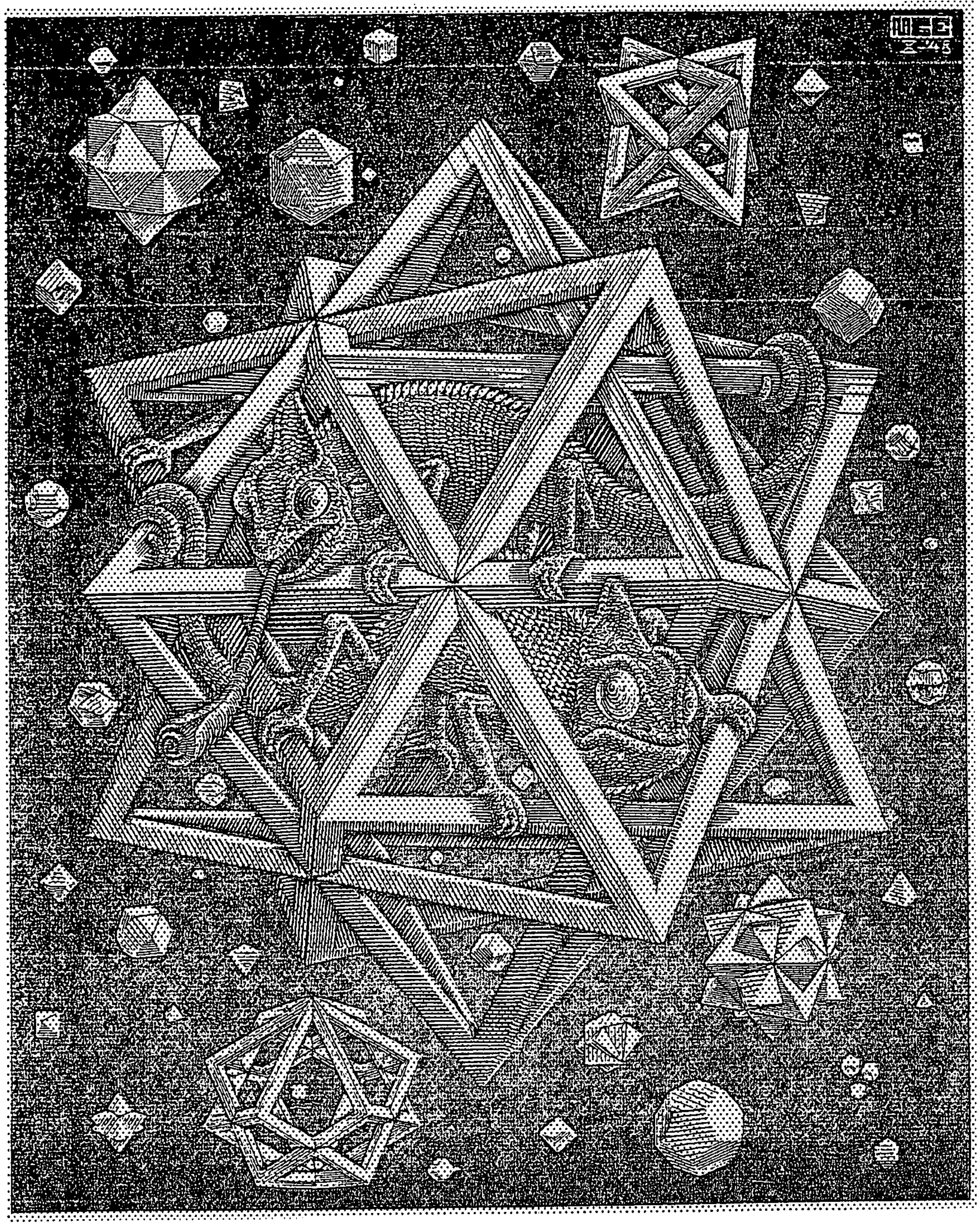
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס' 26

סיון תשנ"ג - יוני 1993



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון ויצמן למדע
רחובות

תוכן העניינים

אתגר - גליונות מתמטיקה ISBN = 0334-201

מוצא לאור ע"י הפקולטות למתמטיקה במכון ויצמן ובטכניון.

המערכת:

פרופ' א. ברמן, ד"ר צ. הראל, א. לוי, הפקולטה למתמטיקה בטכניון.

פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שימושית, מכון ויצמן.

הדפסה: חיה איציקוביץ, היחידה לפעולות נוער, מכון ויצמן.

מען המערכת: היחידה לפעולות נוער, מכון ויצמן למדע רחובות 76100 טל-08-342970.

דבר המערכת

בחודש אפריל 1993 התקיימה התחרות השנתית במתמטיקה בין ישראל והונגריה, הפעם בבודפשט, כאשר דן רז, מהמחלקה למתמטיקה שימושית במכון ויצמן ליווה את הקבוצה הישראלית.

לאור מעמדה המכובד מאוד של הונגריה בשדה המתמטיקה, יש ליחס חשיבות דווקא לתחרות זו.

הסיבוב הבא יתקיים בישראל בשנת 1994. בינתיים תוכלו למצוא בעמוד 20 מגליון זה, דו״ח על התחרות של השנה.

עקומות מוגדרות ע"י קואורדינטות דו-זויתיות

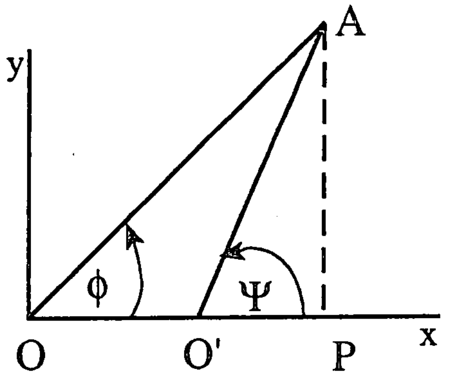
מכשיר מכני-אופטי לשרטוט עקומות אלה

אברהם יעקובוביץ[1]

א. 1. קואורדינטות דו-זויתיות

נתונות הנקודות הקבועות O,O', נקודה כלשהי A, והזויות $\varphi = \angle AOP$ ו-$\psi = \angle AO'P$, כאשר P מהווה היטל הנקודה A על הישר OO' (איור 1).

עבור כל $\phi,\psi \in (0,2\pi)$, כאשר $\phi \neq \psi + \pi$, מתקבלת נקודה A אחידה ולהיפך. לכן הזויות ϕ,ψ מהוות **קואורדינטות דו-זויתיות** לכל נקודה במישור שלא נמצאת על הישר OO'.



איור 1

2. הקשרים בין הקואורדינטות הדו-זויתיות והקואורדינטות הקרטזיות

תהיה גם מערכת קואורדינטות קרטזיות Oxy, כאשר $Ox \equiv OO'$ והכיוון החיובי הוא מ-O ל-O'. נסמן ב-P היטל הנקודה A על Ox. אז קיימים הקשרים

$$PA = OP tg\phi = O'P\, tg\psi = (OP - OO')tg\psi$$

כאשר $\phi,\psi \neq \frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$,

---

[1] עיבוד: דוד רימר, רחובות.

אם $OO' = p$, $OP = x, PA = y$ (איור 2), אז מכאן נובע

$$. y = x \operatorname{tg} \phi = (x-p) tg \psi \quad (*)$$

מכאן הנוסחאות

$$(1) \qquad x = \frac{p tg \psi}{tg \psi - tg \phi}, \qquad y = \frac{p tg \psi tg \phi}{tg \psi - tg \phi}, \left(\phi, \psi \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

בזה קבלנו ערכי x, y כפונקציות של $tg \phi, tg \psi$.

מ-(*) מקבלים את $tg \phi, tg \psi$ כפונקציות של x, y, דהיינו

$$(2) \qquad tg \phi = \frac{y}{x}, tg \psi = \frac{y}{x-p}, (x \neq 0, p)$$

ניתן לחשב גם את הרדיוס-וקטורים ρ_1, ρ_2 (איור 2):

במשולש $OO'A$ נפעיל את משפט הסינוסים

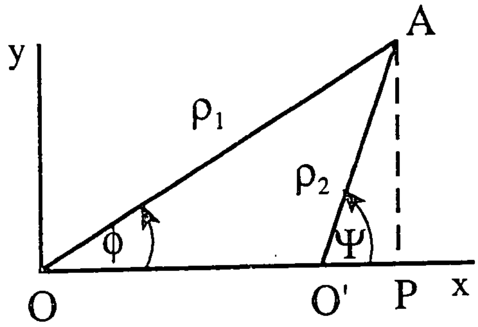
$$\frac{\rho_1}{\sin \angle AO'O} = \frac{\rho_2}{\sin \angle AOO'} = \frac{OO'}{\sin A}$$

ז.א.

$$\frac{\rho_1}{\sin(\pi - \psi)} = \frac{\rho_2}{\sin \phi} = \frac{p}{\sin(\psi - \phi)}$$

ומכאן מתקבלות הנוסחאות עבור ρ_1, ρ_2

$$(3) \qquad \rho_1 = \frac{p \sin \psi}{\sin(\psi - \phi)}, \quad \rho_2 = \frac{p \sin \phi}{\sin(\psi - \phi)}$$



איור 2

ב. עקומות המוגדרות ע"י קשר ליניארי $\psi = k\phi + \alpha$

1. קל להראות כי הנוסחה

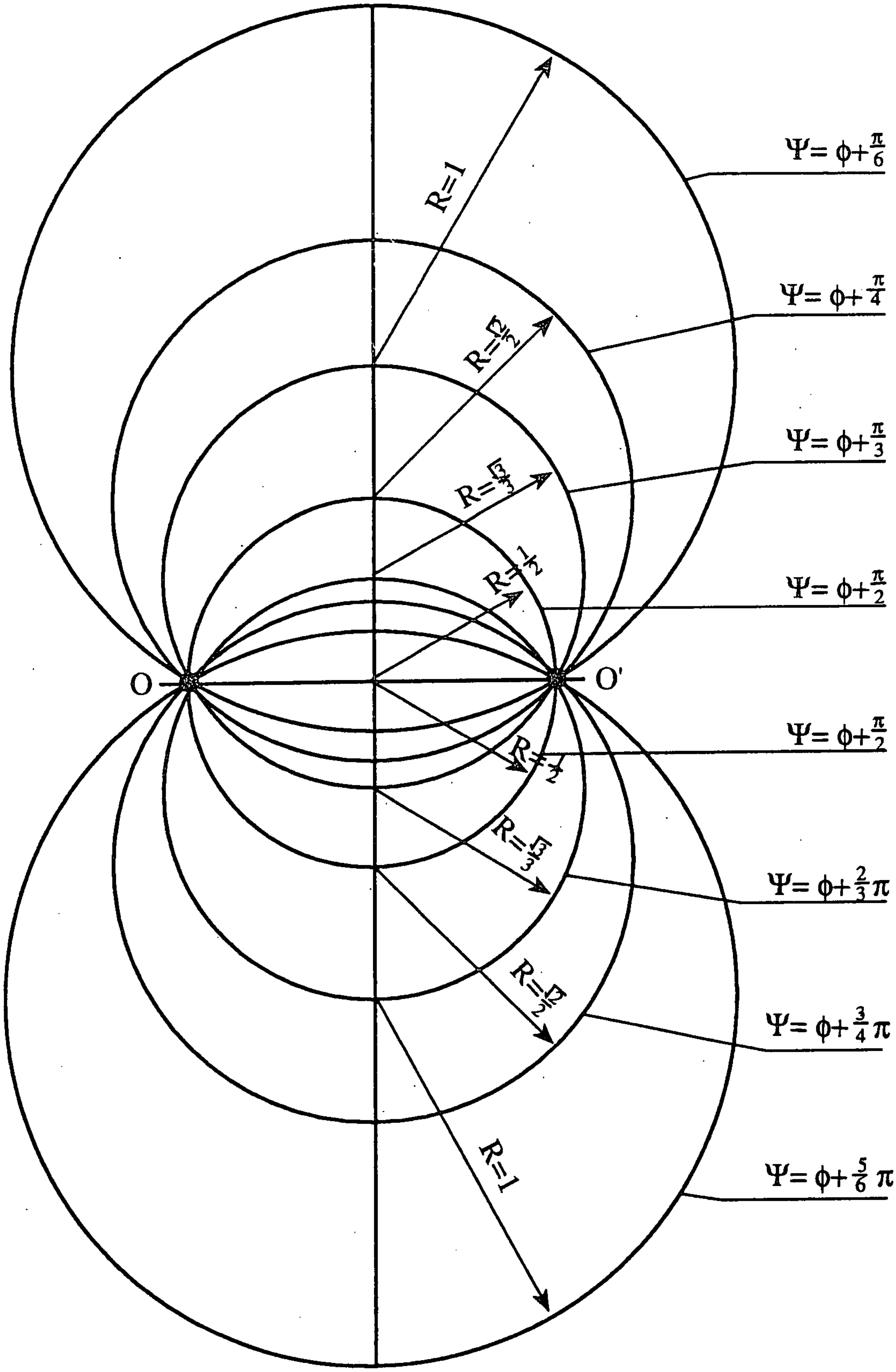
$$\psi = k\phi + \alpha$$

מגדירה **מעגל** עבור כל ערך של α. והנה ההוכחה

$$tg\psi = tg(\phi + \alpha) = \frac{tg\phi + tg\alpha}{1 - tg\phi tg\alpha}.$$

נציב כאן את הנוסחות (3) ואחרי כל החישובים הנחוצים מתקבלת המשוואה

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\cot\alpha\right)^2 = \left(\frac{1}{2\sin\alpha}\right)^2$$



R=1
$R=\frac{\sqrt{2}}{2}$
$R=\frac{\sqrt{3}}{3}$
$R=\frac{1}{2}$
O
O'
$R=\frac{1}{2}$
$R=\frac{\sqrt{3}}{3}$
$R=\frac{\sqrt{2}}{2}$
R=1
$\Psi=\phi+\frac{\pi}{6}$
$\Psi=\phi+\frac{\pi}{4}$
$\Psi=\phi+\frac{\pi}{3}$
$\Psi=\phi+\frac{\pi}{2}$
$\Psi=\phi+\frac{\pi}{2}$
$\Psi=\phi+\frac{2}{3}\pi$
$\Psi=\phi+\frac{3}{4}\pi$
$\Psi=\phi+\frac{5}{6}\pi$

איור 3

באיור 3 משורטטים המעגלים המתאימים לערכים

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}.$$

2. הנוסחה $\psi = 2\varphi$.

נוסחה זו מגדירה **מעגל** שמרכזו ב- O' ורדיוסו OO'. להלן ההוכחה:

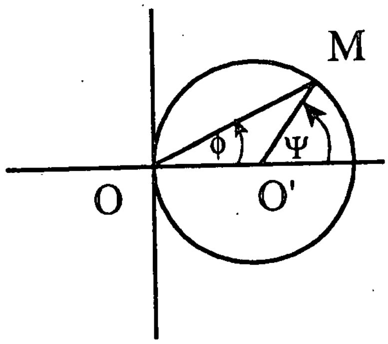
המשולש $OO'M$ שווה-שוקיים $(OO' = OM)$ ולכן $\angle O'OM = \angle O'MO = \phi$

נובע מכאן $\psi = 2\phi$ ועם נוסחה (2) מקבלים

$$\frac{y}{x-p} = \frac{(2y)/x}{1-\left(\frac{y^2}{x^2}\right)}$$

לאחר הפישוט, מתקבלת המשוואה

$$(x-p)^2 + y^2 = p^2$$

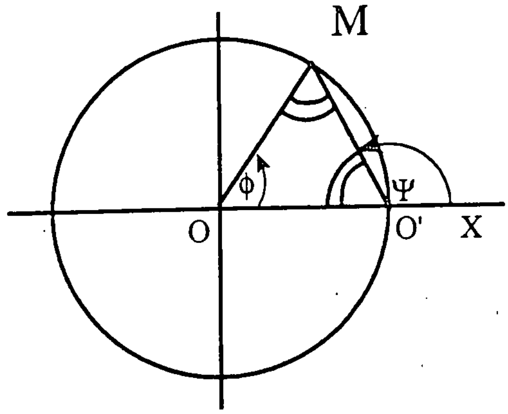


איור 4

3. נמצא את המשוואה בקואורדינטות ϕ, ψ של **מעגל** שמרכזו ב-O העובר ב-O'.

מ-$OM = OO'$ נובע $\angle OO'M = \angle M$ לכן $\angle OO'M = \frac{\pi - \phi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2}$ ואז

$\psi = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2}\right)$, ז.א. $\psi = \frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{2}$ זו היא משוואת המעגל



איור 5

4. נמצא את המשוואה ב- φ,ψ של **הסטרופואיד** (Strophoid) **הישר**.

על ישר CD העובר דרך הנקודה O' במאונך ל-Ox, בוחרים נקודה שרירותית P ומקצים על OP את הקטעים PM_1, PM_2 השווים באורכם ל-$O'P$. המקום הגאומטרי של הנקודות M_1, M_2 מהווה סטרופואיד ישר. נוכיח כי משוואתו היא $\psi = \frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4}$.

באיור 6, ψ_1 מהווה זוית חיצונית למשולש $OO'M_1$ ולכן $\psi_1 = \phi + \angle PM_1O'$.
מהתנאי $PM_1 = PM_2 = PO'$ נובע כי $\angle PM_1O' = \angle PO'M_1$.
אבל $\angle PO'M_1 = \frac{\pi}{2} - \psi_1$ וכך מתקבל השיוויון $\psi_1 = \phi + \frac{\pi}{2} - \psi_1$,
ז.א. $2\psi_1 = \phi + \frac{\pi}{2}$ ולכן

$$\psi_1 = \frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4} \qquad \text{(a)}$$

רואים גם כי ψ_2 זוית חיצונית למשולש $OO'M_2$ ולכן $\psi_2 = \angle O + \angle OM_2O'$, ז.א.
$\psi_2 = \phi + (\pi - \angle PM_2O')$. היות ו- $\angle PM_2O' = \angle PO'M_2$
ו- $\angle PO'M_2 = \psi_2 - \frac{\pi}{2}$,

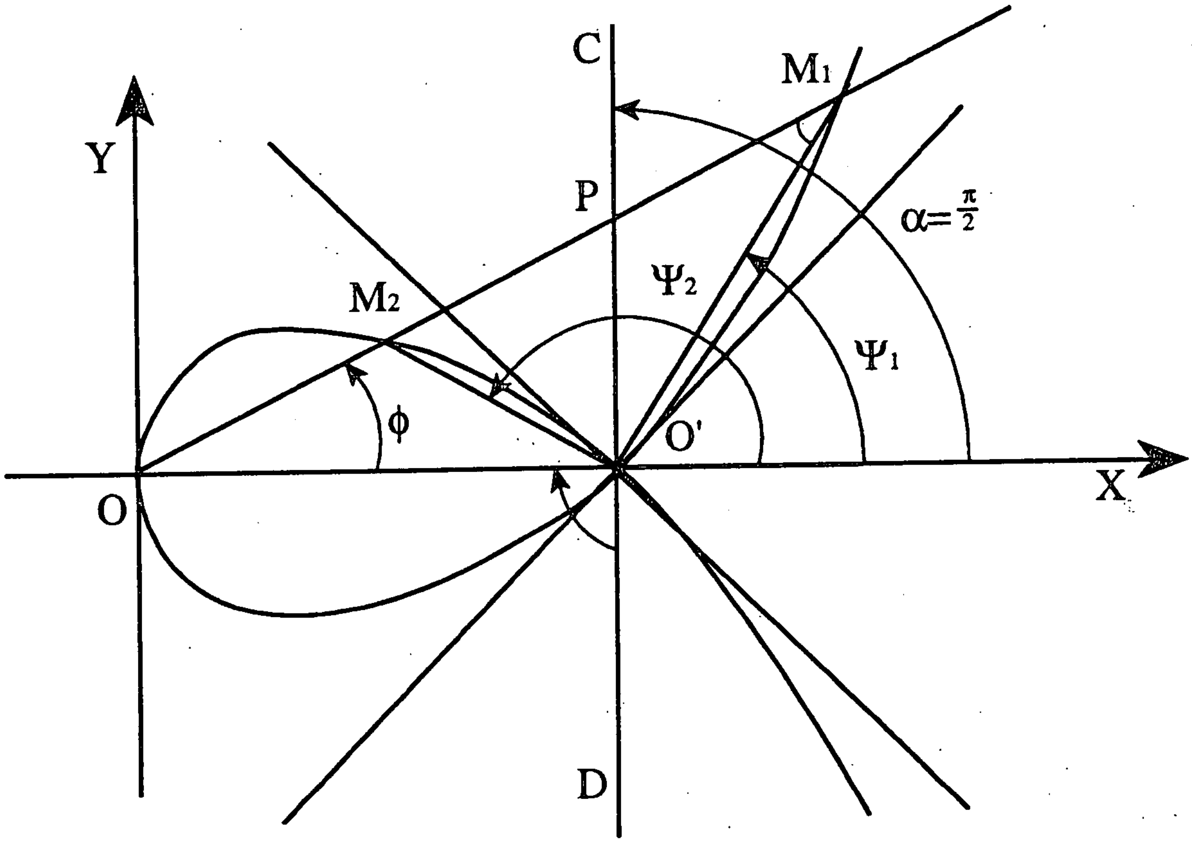
מתקבל $\psi_2 = \phi + \pi - \left(\psi_2 - \frac{\pi}{2}\right)$ ולכן $2\psi_2 = \phi + \frac{3\pi}{2}$ ומכאן

$$.\psi_2 = \frac{\phi}{2} + \frac{3\pi}{4} \qquad \text{(b)}$$

כאשר ϕ נע בין 0 ל- 2π, הנוסחות (a) ו-(b) נותנות אותה קבוצה של נקודות, לכן המשוואה היא

$$\psi = \frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

מ.ש.ל.

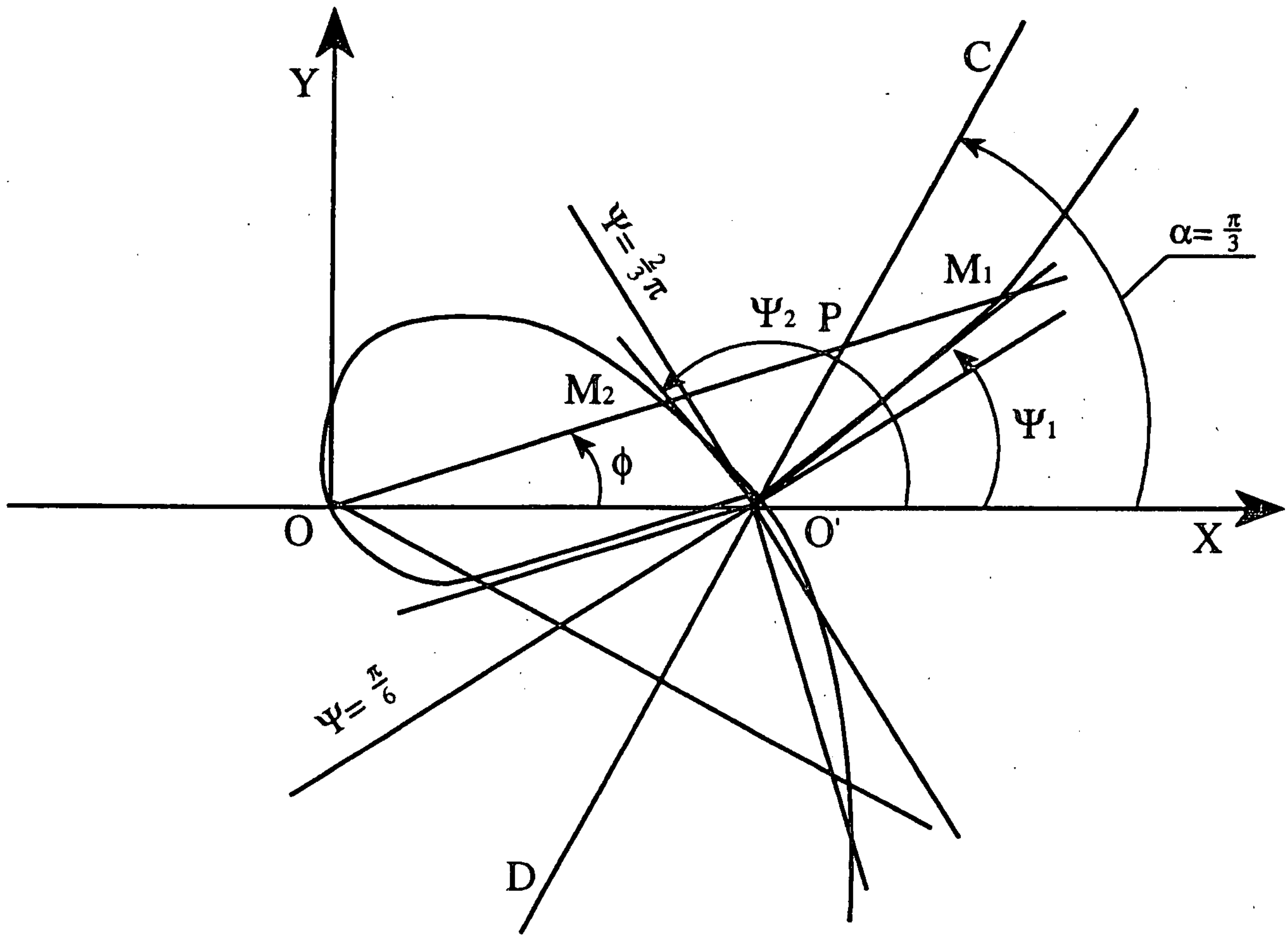


איור 6

נוסחה זו מהווה מקרה פרטי של הנוסחה הכללית

עבור $$\psi = k\phi + \alpha$$

5. עבור $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, הנוסחה האחרונה מגדירה **סטרופואיד משופע. באיור 7** רואים סטרופואיד משופע המוגדר ע"י $\psi = \frac{\phi}{2} + \frac{\alpha}{2}$, כאשר $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ז.א. כי הישר CD יוצר זוית של $\frac{\pi}{3}$ עם ציר ה- x.



איור 7

6. נמצא עכשיו את המשוואה של השבלולית של פסקל.

על המעגל K שמרכזו ב-O' העובר ב-O , בוחרים נקודה שרירותית P ומקצים על OP את הקטעים $PM_1 = PM_2 = p$ (ז.א. הם שווים לרדיוס OO'). ψ_1 זוית חיצונית למשולש $OO'M_1$ ולכן $\psi_1 = \phi + \angle PM_1O'$. מהמשולש שווה שוקיים $OO'P$ מתקבל:

$\phi = \angle OPO'$ ומהמשולש שווה שוקיים $PO'M_1$ מקבלים $\angle PO'M_1 = \angle M_1$, היות ו- $\angle OPO'$ זוית חיצונית למשולש $PO'M_1$, נובע $\angle OPO' = \angle PO'M_1 + \angle PM_1O'$

ולכן $\angle PM_1O' = \dfrac{\phi}{2}$ ובזה התקבל סופית

$$\psi_1 = \phi + \frac{\phi}{2} = \frac{3\phi}{2} \qquad (a)$$

באופן דומה, נמצא

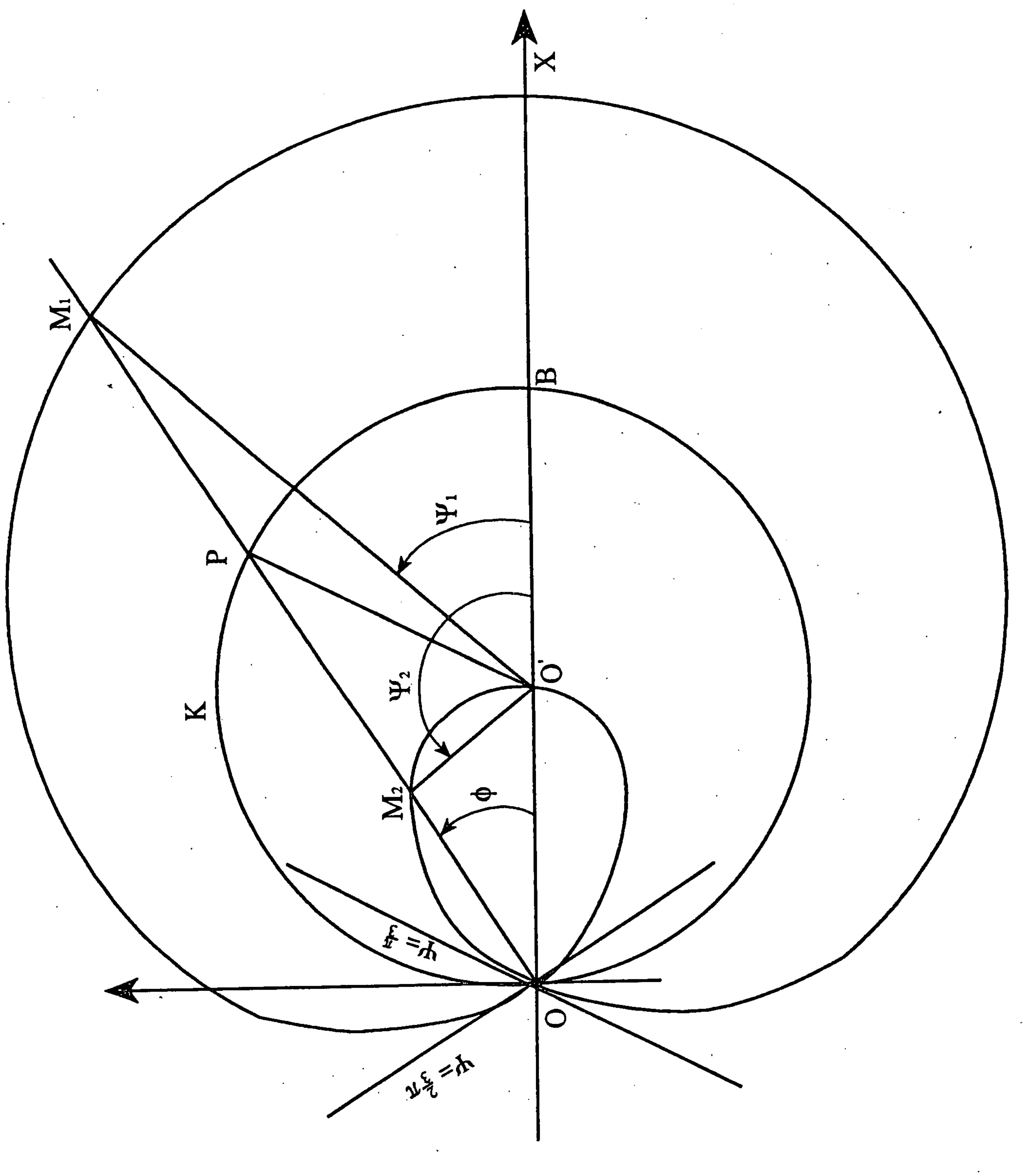
$$\psi_2 = \frac{3\phi}{2} + \frac{\pi}{2}. \qquad (b)$$

הנוסחות (a) ו- (b) מייצגות ביחד אותה קבוצת נקודות, לכן

$$\psi = \frac{3}{2}\phi$$

היא משוואת השבלולית שחפשנו.

המשך בחוברת הבאה.



איור 8

שני משפטים גאומטריים מפורסמים שקולים

א. ב. סיגלר (נהריה)

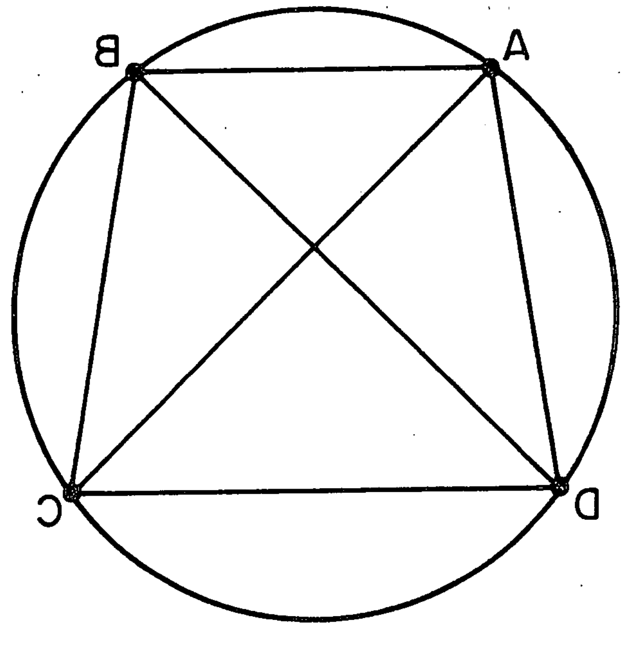
מבוא

משפטים **שקולים**, אם נכונותו של כל אחד מהם גוררת נכונותו של השני.
אציג שני משפטים מפורסמים, משפט טלמי ומשפט סימסון שנתגלו בפער של כ-1500 שנה ונראים מאוד שונים, אך הם למעשה שקולים.

א. משפט טלמי

אם $ABCD$ מרובע החסום במעגל אז קיים:

$$\boxed{AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BD} \quad (1)$$



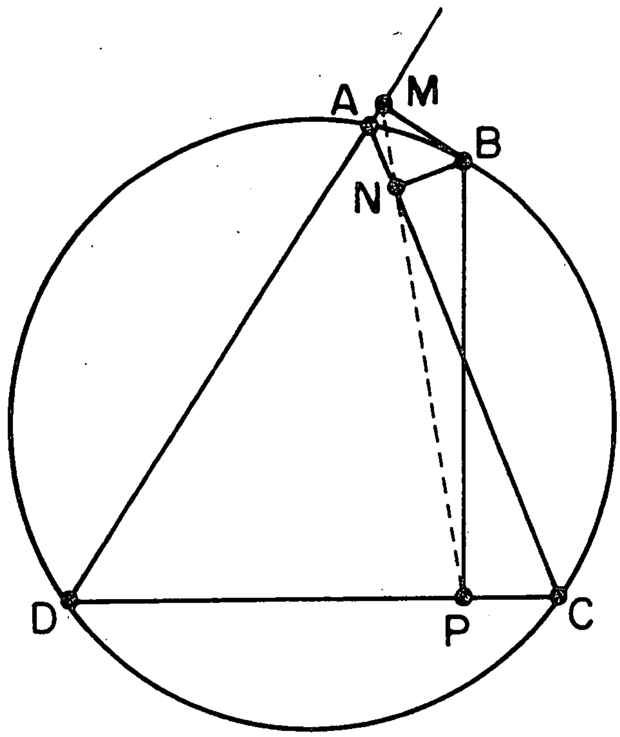
איור 1

משפט סימסון

אם ACD משולש החסום במעגל ו- B נקודה על היקף המעגל ו- P,N,M הם היטלי B על צלעות המשולש (איור 2), אזי:

(2)

M,N,P
מונחות על קו ישר



איור 2

1. אוכיח כי: **משפט סימסון** $\Leftarrow$ **משפט טלמי.**

נניח ש - M, N, P על קו ישר אחד.
לכן:

(3) $$\boxed{MN + NP = MP}$$

המרובע $AMBN$ בר חסימה במעגל שקוטרו AB

לכן לפי משפט הסינוסים קיים: $MN = AB \cdot \sin \hat{A}$

לכן: $MN = \frac{AB \cdot DC}{2R}$ (R רדיוס המעגל החוסם את ADC)

באותה דרך: $NP = \frac{BC \cdot AD}{2R}$ (במרובע $NPCB$)

$MP = \frac{AC \cdot BD}{2R}$ (במרובע $MBPD$)

לכן: $AB \cdot DC + BC \cdot AD = AC \cdot BD \Leftarrow MN + NP = MP$

2. נוכיח שמשפט טלמי $\Leftarrow$ משפט סימסון

ההוכחה מידית כי:

$$\frac{AB \cdot DC}{2R} + \frac{BC \cdot AD}{2R} = \frac{AC \cdot BD}{2R} \Leftarrow AB \cdot DC + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

$$\| \qquad \| \qquad \|$$

$$MN \quad + \quad NP \quad = \quad MP$$

לכן: M , N , P קוליניאריות.

לכן: $\boxed{\text{משפט טלמי} \Leftrightarrow \text{משפט סימסון}}$

הקוראים מתבקשים להוכיח את משפט סימסון ואז אין צורך להוכיח את משפט טלמי כי הוא שקול.

האולימפיאדה לנוער במתמטיקה תשנ"ג

התחרות הנ"ל התקיימה השנה, זו הפעם ה-26, במכון ויצמן למדע ברחובות, תוך שיתוף פעולה עם תוכניות החסכון לנוער של בנק הפועלים בע"מ.

הזוכים הם:

פרס ראשון - עומר אנגיל כתה י"ב תיכון ליאו-באק, חיפה
פרס שני - יורי בורדה כתה י"ב תיכון משגב, מצפה רמון

ציונים לשבח

מקסים איורש - כתה י, תיכון ליאו-באק, חיפה
דוד ביילים - כתה י"א בי"ס להנדסאים, רמת-אביב
אדוארד גלדשטיין - כתה י"ב תיכון מקיף ג', באר שבע
אורן נחושתן - כתה י"ב גמנסיה ריאלית, ראשון-לציון

הנה השאלון שהוצג בפני המתחרים (רמזים לפתרונות בעמ' 19).

1. (10 נק').
המספר הממשי a מקיים

$$a > 0 \quad , \quad a \neq 1.$$

m הוא מספר ממשי כלשהו. פתור את המשוואה

$$\log_{\sqrt{a}} \sqrt{x} = \log_a\left(\frac{m}{x}+1\right)$$

האם קיים תמיד פתרון ? נמק.

2. (10 נק'). הוכח כי עבור a, b, c חיוביים כלשהם, קיים

$$\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

3. (10 נק'). הוכח כי אין מספרים טבעיים x , y המקיימים

$$x^3 + y^3 = 5753^2$$

4. (15 נק'). חלץ את x , y מהמערכת

$$\left.\begin{array}{l} \sin x + \sin y = 2a \\ \cos x + \cos y = 2b \\ \tan x + \tan y = 2c \\ a \;\; b \;\; c \qquad\quad \neq 0 \end{array}\right\}$$

5. (15 נק'). מצא את המספרים הטבעיים $n, a_1 , a_2 ,......, a_n$

כך ש- $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1993$

ואילו $\prod_{i=1}^{n} a_i$ יהיה מירבי.

6. (25 נק'). נתונה תיבה ריבועית ישרה עם צלע הבסיס שווה $2a$ והגובה שלה $a(1+\sqrt{3})$.

בסיס אחד של התיבה חסום בכדור והבסיס השני משיק לאותו כדור.

מצא את רדיוס הכדור וגם את השטח של אותו חלק מהתיבה הנמצא בפנים הכדור.

בעיות חדשות

1. הוכח כי מבין כל המרובעים בעלי שטח נתון, הרבוע הוא בעל היקף הקטן ביותר.

2. אם α,β,γ הם זויות של משולש ונתון כי :

$$\tan\frac{\beta+\gamma-\alpha}{4}\tan\frac{\gamma+\alpha-\beta}{4}\tan\frac{\alpha+\beta-\gamma}{4}=1$$

הוכח כי

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=-1$$

3. הסדרות הממשיות $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$, $\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$, $\{c_1,c_2,\dots,c_n\}$

מקיימות

$$a_r>0,\qquad a_rc_r>b_r^2\qquad (r=1,2,\dots,n)$$

הוכח כי

$$\sum_{r=1}^{n}a_r\sum_{r=1}^{n}c_r>\left(\sum_{r=1}^{n}b_r\right)^2$$

4. אם השורשים $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ של המשוואה

$$x^4-7x^3+px^2+q=0$$

מקיימים $\alpha\beta=\gamma\delta$,

הוכח כי $q=1/49$

האולימפיאדה לנוער במתמטיקה תשנ"ג
רמזים לפתרונות

1. $\log_{\sqrt{a}}\sqrt{x} = \log_a x$.

2. אפשר להשתמש באי-שוויון הממוצעים עבור קבוצות כמו: $a^8, a^8, a^8, b^8, b^8, b^8, c^8, c^8$.

3. אפשר להשתמש בקונגרואנדים מודולו 9.

4. משני השוויונים הראשונים מקבלים את הערך של $\cos(x-y)$.

5. אם המערכת $n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ גוררת ערך מירבי עבור $\sum_{r=1}^{n} a_r$, אזי ניתן להוכיח שאין אף אחד מה-a_r גדול מ-4, ואילו יתכן רק מספר מוגבל של 2 או 3.

6. מהחתך המישורי העובר בשני קודקודים נגדיים של בסיס אחד של התיבה, ומשיק לבסיס השני, מתקבל רדיוס הכדור: $R = a\sqrt{3}$.

התחרות

התחרות התקיימה בבודפשט בין התאריכים 19-25.4.93.
התחרות כללה תחרות אישית שבמסגרתה היה על המתמודדים לענות על 4 שאלות במתכונת האולימפיאדה הבינלאומית ותחרות נוספת קבוצתית, שבמהלכה היה על הקבוצות (ישראל והונגריה) לענות במשותף על 7 שאלות בנושא חבורות סופיות.

הישגי המתמודדים בתחרות האישית היו:
עומר אנגיל 28, אבישי ונונו 23, אורן נחושתן 14, ויורי בורדה 10.
מקסימום הנקודות האפשרי 28.

מתוך ארבעת המתמודדים ההונגרים 2 השיגו ציון מלא (28 נקודות). אחד ציון של 25 נק' ואחד ציון של 14 נק'.

בשאלון הקבוצתי ענתה הקבוצה הישראלית באופן מלא רק על 4 מתוך 7 השאלות, אולם הפגינה רמה יותר טובה מזו של הקבוצה ההונגרית.

השאלונים

שאלון אישי

1. נתונים a ו- b שני מספרים זרים זה לזה שלמים וחיוביים.

נניח שמתקיים: $\frac{a}{b} = b.a$

כאשר בחלק הימני של המשוואה b הוא החלק השלם ו-a הוא החלק אחרי הנקודה העשרונית.
קבע את כל הפתרונות האפשריים למשוואה.

2. מצא את כל הפולינומים $f(x)$ בעלי מקדמים ממשיים, שעבורם הזהות הבאה מתקיימת (לכל x):

$$f(x^2-2x) = \left(f(x-2)\right)^2$$

3. יהיה H חצי מעגל בעל רדיוס 1. ויהיו A,B,C,D,E נקודות על ההיקף של חצי המעגל בסדר הנתון. צריך להוכיח:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + AB \cdot BC \cdot CD + BC \cdot CD \cdot DE < 4$$

4. נתון לוח שחמט בגודל 3nx3n.
מצא מהו המספר הגדול ביותר של צריחים שניתן להציב על הלוח כך שכל צריח יהיה מאוים ע"י לכל היותר צריח **אחד**.

זמן עבודה: 4 שעות.
הניקוד לכל שאלה: 7 נקודות.

שאלון קבוצתי

1. נניח שקיים k, $(k \geq 2)$ שעבורו מתקיים שלכל $x,y \in G$ ולכל $i \in \{k-1,k,k+1\}$

$$(xy)^i = x^i y^i$$

הוכיחו ש-G הינה חבורה אבלית.

2. נניח שעבור $n \geq 1$ כלשהוא מתקיים שהמיפוי $x \to x^n$ הינו איזומורפיזם של החבורה G על עצמה. יש להוכיח שלכל $a \in G$ מתקיים $a^{n-1} \in Z(G)$.

3. הוכיחו שכל איבר של S_n ניתן לכתיבה כמכפלה של שני "ציקלים".

4. תהי $H \subseteq G$ ו- $a,b \in G$. הוכיחו ש - $|aH \cap Hb|$ הינו 0 או מחלק של $|H|$.

5. תהי $H \subseteq G$, $|H| = 3$. מה תוכלו לאמר על

$$|N_G(H) : C_G(H)| \text{ ?}$$

6. יהיו $a,b \in G$. נניח ש - $ab^2 = b^3a$

$$ba^2 = a^3b$$

הוכיחו ש- $a = b = 1$.

7. נתון ש- $Z = |G'|$. יש להוכיח ש- $|G : G'|$ הינו זוגי.

רשימת סימונים

G	-	חבורה סופית.
$H \subseteq G$	-	H היא תת חבורה של G.
$\|G : H\|$	-	האינדקס של תת החבורה H ב- G.
$\|X\|$	-	הגודל של תת הקבוצה $X \subseteq G$.
$Z(G)$	-	המרכז (center) של G.
G'	-	חבורת הקומוטטורים של G (commutator subgroup).
$N_G(H)$	-	המנרמל (normalizer) של H ב- G.
$C_G(H)$	-	הממרכז (centralizer) של H ב- G.
S_n	-	החבורה הסימטרית בדרגה n.

זמן עבודה: 4 שעות