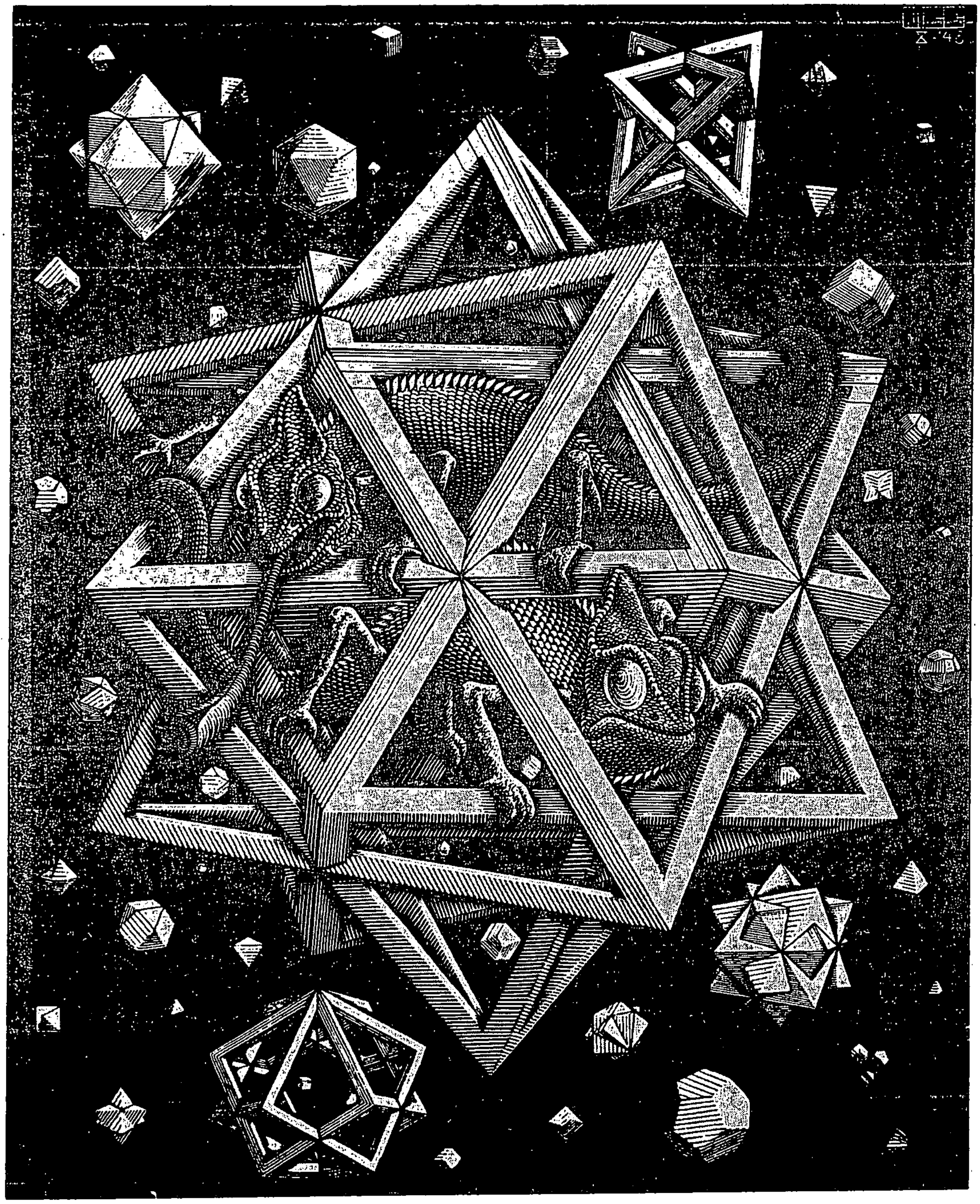
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס' 16

ניסן תש"ן - אפריל 1990



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון ויצמן
רחובות

10084269

תוכן העניינים

עמוד

* * * *

אתגר - גליונות מתמטיקה

מוצא לאור ע"י הפקולטה למתמטיקה בטכניון ומכון ויצמן.

מען המערכת: הפקולטה למתמטיקה, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל,
חיפה 32000, טל' 294272 (04)

דבר המערכת

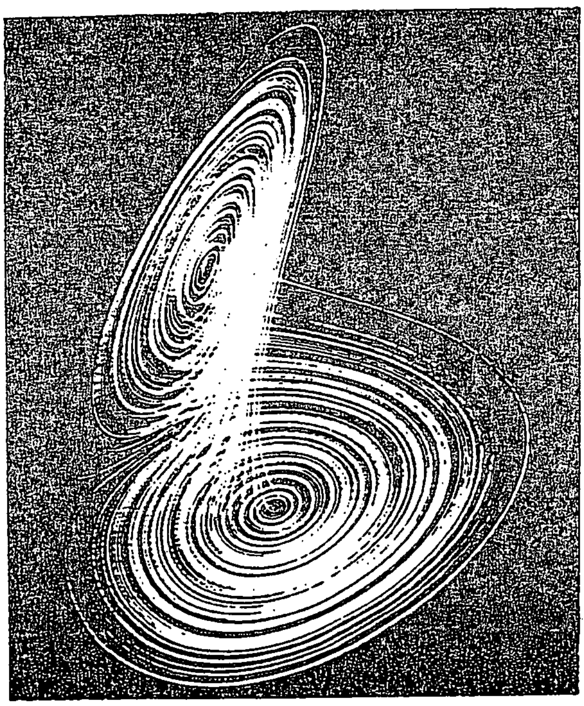
במרכז הגליון מופיעות שאלות מחזור האביב של תחרות הערים ה- 11. הקוראים מוזמנים לנסות כוחם בפתרון השאלות ב"תנאי תחרות" , כלומר, להקדיש לכל שאלון 5 שעות, ללא התיעצות ושימוש בחומר עזר, ולשלוח את פתרונותיהם למערכת עד ל"ג בעומר, ה- 13 במאי 1990.

פתרונות מעניינים במיוחד יישלחו למארגני התחרות בברית המועצות ולפותרים מצטיינים יוענקו פרסים.

ברצוננו להודות לבוריס ביגון מהטכניון על עזרתו הרבה בתרגום ובעריכת שאלות התחרות.

אנו מקווים שהקוראים יהנו וישכילו מההשתתפות בתחרות וגם מקריאת שני המאמרים המופיעים בראשית הגליון.

נזכיר לסיום שבל"ג בעומר תתקיים בטכניון האולימפיאדה ה- 31 ע"ש פרופ' גרוסמן ובאחל לקוראי "אתגר" הצלחה בתחרות זו.



איך לנחש נכונה שתי אותיות

בעיה קומבינטורית בצפנים

רון אהרוני - הטכניון

רון הולצמן - מכון ויצמן למדע

נניח שמצאת כרטיס בנקומט של מישהו. נניח (רק נניח!) שאתה רוצה להשתמש בכרטיס כדי להוציא כסף בבנקומט שבשכונתך. אינך יודע את המספר הסודי, אך אתה יודע שהבנקומט מקולקל, והוא מקבל גם בקשות של מספר צופן הנכונות בשני מקומות (או יותר). כך, למשל, אם המספר האמיתי הוא 8315 ואתה בקשת 0305, המכונה תקבל זאת כנכון (צדקת במקום ה-2 וה- 4 . כביכול היו לך שני "בולים" במשחק "בול פגיעה"). הקלקול בבנקומט מתבטא גם בכך שהוא מרשה מספר נסיונות גדול כרצונך. השאלה היא מהו המספר המינימלי של נסיונות שיבטיח לך הצלחה?

אם תחשוב לרגע תראה ש- 100 נסיונות בודאי יספיקו. כל שעליך לעשות הוא לנסות את כל הצרופים מהצורה $xy00$, ל- $0\le x\le 9$, $0\le y\le 9$. מספרם הוא 100 (10 אפשרויות ל x, ובכל אחת מהן 10 אפשרויות ל y) ואחד מהם יקלע למספר הנכון בספרות הראשונה והשניה. אבל ברור שזוהי שיטה "בזבזנית": מדוע לא ננסה באותה עת לשנות, למשל, גם את הספרות השלישית והרביעית, ולנסות לקלוע "בול" גם במקומות אלו? ואכן, כפי שנראה מיד, אפשר להסתפק בערך ב- $1/3$ ממספר צרופים זה, כלומר ב $[100/3]=34$ ($[x]$ מסמן את המספר השלם הקטן ביותר הגדול מ- x או שווה לו למשל: $[2.7]=3$, $[-10.1]=-10$). אך לפני שנראה זאת, הבה נכליל את הבעיה. יהיו k ו- n מספרים טבעיים נתונים. נסמן ב- $W(n,k)$ את אוסף המלים באורך k שהאותיות בהן לקוחות מאלף-בית בגודל n. כך, למשל, את אוסף מספרי הקוד לבנקומט אפשר לראות כ- $W(10,4)$: כל צרוף הוא מאורך 4, והאותיות המותרות הן $0,\dots,9$, כלומר מספרן 10. נסמן ב: $h(n,k)$ את הגודל המינימלי של אוסף מלים U שיש לו התכונה הבאה: כל מלה ב $W(n,k)$ זהה

למלה כלשהי ב- U בשני מקומות לפחות. כך במנוח זה המספר שעליו שאלנו בפתח המאמר הוא $h(10,4)$. טענתנו היא ש $h(10,4)=34$.

שאלת אימון להכרת הפונקציה h: מהם $h(1,4)$?, $h(2,4)$?, $h(3,4)$?

נגדיר עתה עוד פונקציה. נסמן ב- $f(n,k)$ את הגודל המינימלי של אוסף מלים U ב- $W(n,k)$ כך שלכל זוג מקומות וזוג אותיות קיימת מילה ב- U שבמקומות הנתונים יש בה זוג האותיות הנתון. שימו לב שהדרישה כאן חזקה יותר מאשר בהגדרת $h(n,k)$. עתה אנו דורשים לא רק שבכל מילה יהיה **קיים** זוג מקומות שבו המלה ב- U תקלע נכונה, אלא **שלכל** זוג מקומות תקלע מלה ב- U לאותיות כלשהן שנציב שם. לכן ברור ש $f(n,k)\geq h(n,k)$. למעשה, אפשר לשים לב שיותר מכך נכון: הראינו לעיל ש $h(10,4)\leq 100$. אותו נמוק (בדוק!) נותן $h(n,k)\leq n^2$. ברור, לעומת זאת כי $f(n,k)\geq n^2$. התבונן בשני המקומות הראשונים. יש n^2 אפשרויות להצבת זוג אותיות במקומות אלו, והאוסף U בהגדרת $f(n,k)$ חייב להכיל, לכל אחת מן האפשרויות האלה מלה שתקלע בה בשני המקומות. לכן: $f(n,k)\geq n^2\geq h(n,k)$.
לאמיתו של דבר, $f(n,k)=n^2$ לערכים רבים של n,k. הבה נראה ש $f(3,4)=9$. תהא U קבוצת המילים הבאה (האלף בית הוא 1,2,3)

1 1 1 1	1 2 2 2	1 3 3 3
2 1 3 2	2 2 1 3	2 3 2 1
3 1 2 3	3 2 3 1	3 3 1 2

אזי U "מנחשת" כל זוג ספרות בכל זוג מקומות. למשל, 3 • 2 • "מנוחש" במלה החמישית.

הפונקציה $f(n,k)$ מתקשרת למושג ידוע מאד בקומבינטוריקה, **"רבועים לטיניים נצבים"**. רבוע לטיני (השם בא קרוב לודאי מכך שבעבר השתמשו באותיות לטיניות למלויו) הוא רבוע nxn שבו ממולאות במשבצות המספרים 1,..,n, כך שכל מספר בין 1 ו- n מופיע פעם אחת בכל שורה ובכל עמודה. קל לבנות רבוע לטיני מכל סדר:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & . & n \\ n & 1 & 2 & . & . & . & n-1 \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ 2 & 3 & & . & . & . \; n & 1 \end{bmatrix}$$

שני רבועים לטיניים נקראים **נצבים** אם לכל $1\le i,j\le n$ קיים מקום אחד בדיוק שבו ברבוע הראשון מופיע i וברבוע השני מופיע j.

הנה זוג רבועים לטיניים נצבים מסדר 3:

$$L^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad L^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

שני המשפטים הבאים ידועים מאד, אך לא נוכיחם כאן.

משפט 1. לכל n פרט ל- $n=2,6$ קיים זוג רבועים לטיניים נצבים.

משפט 2. אם n הוא חזקה של מספר ראשוני אז קיימים $n-1$ רבועים לטיניים מסדר n שכל אחד מהם נצב לכל אחד אחר.

(לא קשה לראות ש $n-1$ הוא המספר המקסימלי האפשרי של רבועים נצבים מסדר n. ישנה השערה שקימים $n-1$ רבועים נצבים מסדר n אם ורק אם n הוא חזקה של מספר ראשוני). הקשר בין רבועים לטיניים נצבים לבין נושא מאמרנו נתון במשפט הבא:

משפט 3. $f(n,m)=n^2$ אם ורק אם קימים $m-2$ רבועים נצבים מסדר n.

נוכיח כיוון אחד של המשפט. נניח שקימים $m-2$ רבועים לטיניים נצבים מסדר n, נקרא להם $L^1, L^2,...L^{m-2}$. לכל $1\le r\le m-2$ ולכל $1\le i,j\le n$ נסמן ב- $L^r(i,j)$ את האיבר במקום ה- (i,j) (בשורה ה i-ית ובעמודה ה-j-ית) ברבוע L^r. תהא U קבוצת הצרופים

$$U=\{ijL^1(i,j)L^2(i,j)...L^{m-2}(i,j):\ 1\le i,\ j\le n\}$$

(קח למשל את הרבועים מסדר 3, L^1 ו- L^2 שנתנו לעיל. הצרוף הראשון הוא:

$$\{11L^1(1,1)L^2(1,1)\}=\{1111\}$$

זהו הצרוף הראשון בקבוצה U שהבאנו כהוכחה לכך ש $f(3,4)=9$. בדוק ש U מתקבלת מ- L^2,L^1 בדיוק בדרך שתוארה לעיל!)

טענה. U מנחשת נכונה כל שתי ספרות x,y בכל שני מקומות.

הוכחה. אם המקומות הם הראשון והשני הדבר ברור: לפי בנית U כל זוג x,y מופיע במקומות אלו. אם המקומות הם k,l ל: $2<k,l$ הטענה נובעת מהנצבות של L^k ו- L^l. כל זוג (x,y) מופיע כזוג $(L^k(i,j),L^l(i,j))$ ל i,j מסוימים (זוהי הגדרת הניצבות!) אם המקומות הם k,l כאשר $k=1$ ו- $l>2$ הטענה נובעת מכך ש L^l רבוע לטיני, ולכן בשורה ה- x שלו מופיע, בין השאר, המספר y; לכן קיים j כך ש $L^l(x,j)=y$ ולכן הזוג x,y מופיע במקומות ה $1,l$. אם $k=2$, $l>2$, הטענה נובעת בצורה דומה מכך ש L^l רבוע לטיני, ולכן בעמודה ה -x מופיע במקום כלשהו המספר y.

מצאנו אם כן קבוצה "מנחשת" U שגודלה n^2, ולכן $f(n,m)\le n^2$. כאמור תמיד $f(n,m)\ge n^2$ ולכן $f(n,m)=n^2$.

ממשפטים 2 ו- 3 נובעת

מסקנה 4. $f(n,n+1)=n^2$, אם n הוא חזקה של מספר ראשוני.

הטענה הבאה ברורה:

טענה 5. אם $k\le m$ אז $f(n,k)\le f(n,m)$.

הוכחה. אם U קבוצה מנחשת של צרופים באורך m, אפשר לקבל ממנה קבוצה מנחשת של צרופים מאורך k ע"י "קצוץ" $m-k$ הספרות האחרונות מכל מלה ב- U.

ממסקנה 4 ומטענה 5 מתקבלת

טענה 6. אם n חזקה של מספר ראשוני אז $f(n,k)=n^2$ לכל $2\le k\le n+1$.

נוכל עתה להראות כי $h(10,4)\le 34$.

נחלק את הספרות $0,1,\ldots,9$ ל- 3 קבוצות שוות ככל האפשר: שתיים בגודל 3, ואחת בגודל 4. למשל: $S_1=\{1,2,3\}$, $S_2=\{4,5,6\}$, $S_3=\{7,8,9,0\}$

לפי טענה 6, $f(3,4)=9$ ו- $f(4,4)=16$.

לכן קיימת קבוצה U_1 של 9 צרופים מאורך 4 המנחשת כל זוג ספרות בכל שני מקומות באלף-בית S_1; קיימת U_2 מגודל 9 המנחשת כל זוג ספרות בכל שני מקומות באלף-בית S_2; וקיימת קבוצת צרופים U_3 בת 16 אברים המנחשת כל זוג ספרות בכל זוג מקומות באלף-בית S_3. תהא U הקבוצה המורכבת מ- U_1, U_2 ו- U_3. אזי ב- U יש $9+9+16=34$ צרופים. נראה ש U מנחשת כל מלה באורך 4 באלף בית $0,1,\ldots 9$. תהא w מלה בת 4 אותיות באלף בית $0,1\ldots,9$. לפי עקרון שובך היונים שתים מאותיות w נמצאות באותה קבוצה S_i, $1\le i\le 3$. שתי אותיות אלו מנוחשות על ידי מלה ב- U_i.

הבה נכליל זאת. נניח ש- $(k-1)|n$ וכן $m=n/(k-1)$ הוא חזקה של מספר ראשוני, ו- $m\ge k-1$. נחלק את האלף-בית $1,\ldots,n$ ל $(k-1)$ חלקים שווים $S_1,\ldots,S_{k-1}$. לכל $1\le i\le k-1$ נבחר קבוצה U_i בת $f(m,k)=m^2$ צרופים באורך k (ראה טענה 6). המנחשים כל שתי ספרות בכל שני מקומות באלף בית S_i. אחוד כל הקבוצות האלה, U, מנחש כל מלה w מאורך k בשני מקומות, משום ששתי אותיות ב- w נמצאות באותה קבוצה S_i, והן מנוחשות על ידי מלה ב- U_i. מכיון ש:

$$|U|=(k-1)\frac{n^2}{(k-1)^2}=\frac{n^2}{k-1}$$ הוכחנו בכך:

משפט 7. אם $(k-1)|n$, $n/(k-1)$ הוא חזקה של מספר ראשוני ו: $n\ge(k-1)^2$ אזי $h(n,k)\le n^2/(k-1)$.

משפט שלא נוכיח כאן (נאמר רק שההוכחה היא באינדוקציה על k) הוא:

משפט 8. לכל n,k מתקיים $h(n,k)\ge n^2/(k-1)$.

מכאן שבמשפט 7 קיים למעשה שויון! עבור $h(10,4)$ מקבלים ממשפט 8 ש $h(10,4)\ge 100/3$ ומכיון ש $h(10,4)$ הוא מספר שלם נובע: $h(10,4)\ge 34$ מה שמוכיח את שטענו בתחילת המאמר, ש $h(10,4)=34$.

משפט נקודת-השבת של ברואר במישור

פרופ' יוסף זקס, אוניברסיטת חיפה

משפט נקודת-השבת של ברואר (Brouwer, 1912) הוא אחד המשפטים החשובים והיפים בטופולוגיה. למשפט זה יש כמה הוכחות, ואחת הפשוטות בהן משתמשת בלמה המפורסמת של שפרנר (Sperner, 1921).

ברצוני להביא בפניכם הוכחה פשוטה של משפט ברואר במישור, המבוססת על טענת עזר שנוכיח כאן ואשר לצערי עדיין אין יודעים האם היא ניתנת להכללה למימדים גבוהים יותר.

משפט נקודת-השבת של ברואר טוען את הטענה הבאה:

יהא A ריבוע היחידה, דהיינו: $A=\{(x,y)\mid 0\le x,y\le 1\}$. לכל פונקציה רציפה $f: A\to A$, קיימת נקודה השווה לתמונת f- שלה, דהיינו: קיימת (x,y) ב- A כך שמתקיים: $f(x,y)=(x,y)$.

את $f(x,y)$ הנ"ל אפשר לתאר באמצעות שתי פונקציות שמקבלות ערכים ממשיים r ו- s, שכל אחת מתארת קואורדינטה אחרת, בצורה הבאה: $f(x,y) = (r(x,y),\ s(x,y))$.

f נקראת **רציפה** אם הפונקציות הממשיות r ו- s הן רציפות.

לצורך ניסוח והוכחת הלמה הדרושה, נביא מספר הגדרות.

נקודת (x,y) במישור תקרא **נקודה שלמה** (או **נקודת-שריג**) אם x ו- y הם מספרים שלמים.

שתי נקודות שלמות שונות תקראנה **שכנות** אם הן נבדלות בכל קואורדינטה בלכל היותר אחד, לדוגמא $(7,4)$ ו- $(8,3)$, או $(7,4)$ ו-$(7,5)$.

קטע מכוון מ-(x,y) אל $(x+1,y)$ יקרא בשם **צעד ימינה**. הנקודה $(x+1,y)$ היא **קצה** הקטע. היפוכו, מ (x,y) אל $(x-1,y)$ יכונה בשם **צעד שמאלה**. כאן הנקודה $(x-1,y)$ היא קצה הקטע. באופן דומה נגדיר צעדים **למעלה ולמטה**. נקרא לכולם בשם הכולל - **צעדים**, כאשר לכל צעד יש קצה. שני צעדים נקראים **מנוגדים** אם הם צעד ימינה וצעד שמאלה, או שהם צעד למעלה וצעד למטה.

הנה משפט העזר שלנו:

למה 1. יהי A מלבן במישור, שקדקודיו נקודות שלמות, וצלעותיו מקבילות לצירים, ותהא A^* קבוצת כל נקודות השריג של A. לכל פונקציה המתאימה לכל נקודה P ב- A^* צעד מ- P אשר קצהו נמצא ב- A^*, קיימות זוג נקודות **שכנות** אשר להן הפונקציה מתאימה צעדים **מנוגדים**.

על מנת להבין את הלמה, הקורא מוזמן לנסות את כוחו בהוכחת הלמה עבור ריבוע שמידותיו הן, למשל, 6x8 במקרה זה הלמה עוסקת, בערך, ב-10^7~ פונקציות, או ליתר דיוק, $2^4 \cdot 3^{20} \cdot 4^{24}$.

ברור שכבר ברבוע קטן-יחסית זה אי אפשר להציג את כל הפונקציות, ולהראות צמד נקודות שכנות, בכל אחת מהן, אשר להן מותאמים צעדים מנוגדים.

כפי שקורה לעתים במתימטיקה, נוכיח את למה 1 על ידי הוכחת למה חזקה יותר ממנה, שנקרא לה למה 2.

לצורך ניסוח למה 2, נביא הגדרה נוספת, כלהלן.

תחום במישור יקרא **אורתוגונלי** אם שפתו היא **מסילה פוליגונלית** (דהיינו: אוסף סופי של קטעים עוקבים) **פשוטה** (דהיינו: שאיננו חותך את עצמו) **וסגורה** (דהיינו: שסופה בתחילתה), אשר קדקדיה הן נקודות שלמות וצלעותיו מקבילות לצירים.

למה 2. יהי A תחום אורתוגונלי במישור, ותהא A^* קבוצת כל נקודות השריג של A. לכל פונקציה המתאימה לכל נקודה P ב- A^* צעד מ- P אשר קצהו נמצא ב- A^*, קיימות זוג נקודות שכנות אשר להן הפונקציה מתאימה צעדים מנוגדים.

הוכחת למה 2. ההוכחה היא באנדוקציה על שטח התחום A, שהוא כמובן מספר טבעי n.

אם $n=1$, A הוא רבוע 1x1, ולגביו קל לבדוק שאמנם לכל פונקציה, המתאימה צעדים מהפינות (זוהי A^* במקרה זה) לפינות, קיימות שתי פינות אשר להן מותאמים צעדים נגדיים.

נניח, אינדוקטיבית, שהטענה נכונה לכל תחום אורתוגונלי במישור A ששטחו קטן מ- n ולכל פונקציה המתאימה לכל נקודה של A^* צעד שקצהו ב-A^*. (הקורא מתבקש לשים לב שמדובר באינדוקציה מהסוג השני, בו מוכיחים את המקרה $n=1$ ומכל המקרים הקטנים מ- n מסיקים לגבי n).

יהי A תחום אורתוגונלי במישור ששטחו שווה ל n ותהא נתונה פונקציה F אשר מתאימה לכל נקודת שריג P של *A צעד מ- P אל נקודת שריג אחרת של *A.

נעיין באוסף כל הנקודות *A ובאוסף כל הקשתות המכוונות מ- P אל F(P)), עבור כל הנקודות P ב- *A.

מתקבל מה שקרוי בעגה המקצועית - גרף מכוון, בו כל הדרגות היוצאות הן 1.

קל להראות שבאוסף זה יש מסילות סגורות מכוונות, דהיינו: אוסף חלקי מתוך הקשתות המכוונות אשר מהווה מסילה סגורה, כך שההולך לאורכה, הולך על כל קשת בכיוון הנתון עליה (על ידי F). די לצאת מנקודה כלשהי P של *A וללכת אל F(P), שהיא נקודה של *A, וממנה ללכת אל F(F(P)) , וממנה אל F(F(F(P)))‏, וכו'. היות ו- *A היא קבוצה סופית, מתקבלת מסילה מכוונת שאחרי כמה צעדים חוזרת אל נקודה שבה היינו כבר - והרי המסילה המכוונת הסגורה.

תהא C מסילה מכוונת כנ"ל ב- *A.

אם C היא מהצורה: P אל F(P) ומשם אל F(F(P))‏, אשר שווה ל- P, אז P ו- F(P) הן נקודות שכנות, להן F מתאימה צעדים מנוגדים, כטענת הלמה.

אחרת, C היא השפה של תחום במישור, על פי משפט ג'ורדן המפורסם. נקרא לתחום זה B. B הוא, כמובן תחום אורתוגונלי.

נעיין בתחום B, באוסף כל הנקודות השלמות *B של B, ובאוסף הצעדים מהצורה מ- P אל F(P), עבור כל P ב-*B (אשר מוגדרים על ידי אותה פונקציה-צעדים F). F היא גם פונקצית-צעדים מ- *B לתוך *B, היות ולכל נקודת שריג P ב- *B, הקצה F(P) נמצא אף הוא ב- *B.

בפרט, אם P נמצאת על שפת B, אז גם F(P) נמצאת על שפת B (הרי כך קבלנו את C, שפת B).

אם B שונה מ- A, אז השטח של B קטן מהשטח של A, ולכן הסיום נובע מתוך הנחת האינדוקציה. (שים לב ששטח B איננו חייב להיות בהכרח n-1).

אם B שווה ל- A, אז נפעל כלהלן. נניח שהכיון של הצעדים הנתונים על שפת התחום B=A הוא בכיוון השעון (הכוונה לשעונים מהדגמים הישנים, בעלי מחוגים של שעות, דקות ושניות...). **נשנה** את פונקצית הצעדים המגדרת על *A מהפונקציה הנתונה, **על ידי סיבוב כל הצעדים ב- 90 מעלות**

עם כיוון השעון. דהיינו צעד ימינה הופך להיות צעד למטה, צעד למטה הופך להיות צעד שמאלה, וכו'.

כל הצעדים הישנים מנקודות השריג על השפה C של התחום A (אל שפת התחום) הופכים לצעדים חדשים משפת התחום אל A^*. היות ו- n הוא לפחות 2, נובע שאוסף הצעדים מנקודות השריג על שפת התחום C **איננו** מהווה מסילה מכוונת סגורה, לכן אנו במקרה הקודם של ההוכחה.

לפיכך, קיים זוג של נקודות שריג שכנות ב- A^* אשר עליהם **הצעדים החדשים** הם צעדים מנוגדים.

היות וסיבוב צעדים ב- 90 מעלות שומר על הניגודיות שלהם, נובע מכך שגם הצעדים **הישנים** בשתי נקודות שכנות אלה היו בהכרח צעדים מנוגדים. זה מסיים את הוכחת למה 2.

נסיים את מאמרנו בהוכחה ש-למה 2 גוררת את משפט נקודת השבת של ברואר:

תהא f פונקציה רציפה מהרבוע A לתוך עצמו. הבה נניח, בשלילה, שאין ל- f נקודת שבת.

נעיין בפונקציה $g(P)$ אשר מתאימה לנקודה P את כיוון הקטע מהנקודה P אל הנקודה $f(P)$ (אשר כאמור שונה מ- P, ולכן הכיוון מוגדר כהלכה).

היות ו A הינו תחום חסום וסגור (קומפקטי, למכירי מושג זה), נובע ש- g רציפה במידה שווה, (זה משפט ידוע, שלא נוכיחו כאן) דהיינו: לכל $\alpha>0$ קיים $b>0$, כך שעבור כל שתי נקודות P ו- Q של A, שהמרחק ביניהם קטן מ b הזוית בין הכיוון של $g(P)$ וזה של $g(Q)$ קטנה מ- α.

נבחר כ α זוית כלשהי הקטנה מ- $90°$ ויהיה N מספר שלם הגדול מ $1/b$.

נתאים לנקודות של A מהצורה $(i/N,J/N)$, $0 =\leq i,j =< N$, נקודות שריג T מהצורה (i,j), $0 =\leq i,j =< N$.

יוצא, שעבור כל שתי נקודות שכנות P ו- Q של השריג T, הכיוון של $g(P)$ שונה מהכיוון של $g(Q)$ בלכל היותר α.

תהא h פונקצית הצעדים הבאה, המגדרת על נקודותיה של T:

$h(P)$ היא צעד ימינה [למעלה, שמאלה, למטה] אם הזוית בין הכיוון של צעד ימינה [למעלה, שמאלה, למטה, בהתאמה] והכיוון של $g(P)$, קטנה מ $45°$.

אם הכיוון של $g(P)$ יוצר זוית של $45°$ עם שניים מכווני הצעדים, נבחר את $h(P)$ כאחד מהשניים באופן שרירותי.

היות ו-f היא פונקציה של A לתוך A, יוצא ש- h היא פונקצית צעדים ב- T כך שקצות כל צעד הם בתוך T.

נפעיל את למה 1 על נקודות השריג T ועל פונקצית הצעדים h, ונקבל שקיימות שתי נקודות שכנות ב- T עליהן h מגדירה צעדים מנוגדים. זוהי סתירה, שהרי ראינו קודם שכווני g בנקודות שכנות של T שונים לכל היותר ב α הקטנה מ $90°$.

האולימפיאדה המתמטית על שם ירמיהו גרוסמן

האולימפיאדה המתמטית ה- 31 על שם פרופ' ירמיהו גרוסמן תיערך ביום א', ל"ג בעומר, י"ח באייר תש"ן, 13.5.90.

האולימפיאדה מיועדת לשתי הקבוצות הבאות:

א. טובי התלמידים במתמטיקה בכיתות י"א - י"ב.

ב. בוגרי י"ב המשרתים בשרות חובה בצה"ל.

לזוכים באולימפיאדה יוענקו מלגות לימוד בפקולטה למתמטיקה בטכניון.

התחרות תתקיים בבנין אולמן בקרית הטכניון, בין השעות 11.00-14.00. נפגשים בכניסה לבנין ב- 10.45.

הרשמה : בכתב - מזכירות הפקולטה למתמטיקה בטכניון , חיפה 32000 או טלפונית - 04-294281.

שאלות האולימפיאדה הקודמת והפתרונות להם פורסמו בגליון מס' 15 של "אתגר - גליונות מתמטיקה" עמודים 26-30 .

תחרות הערים ה- 11

מחזור האביב 1990

בברית המועצות מתקיימת כבר מספר שנים תחרות מתמטית בין-עירונית בין תלמידי בתי הספר.

מארגני התחרות פנו למערכת אתגר והזמינו ערים מישראל להצטרף לתחרות.

בשלב זה החלטנו להזמין את קוראי אתגר לפתר את השאלות בביתם ולשלח את הפתרונות למערכת.

בתחרות 4 שאלונים. שאלון רגיל ושאלון מתקדם לחטיבת הביניים ושאלון רגיל ושאלון מתקדם לחטיבה העליונה.

הציון בכל שאלון הוא סכום הציונים בשלש השאלות בהן ההישגים טובים ביותר.

לכל שאלון ניתן להקדיש 5 שעות. כל משתתף יכול לבחור באחד השאלונים או בשני השאלונים המתאימים לחטיבה בה הוא לומד. הציון שיקבל מי שיפתר שני שאלונים יהיה הטוב בין שני הציונים.

את הפתרונות יש לשלוח למערכת "אתגר - גליונות מתמטיקה" בעברית או ברוסית, עד 13.5.90.

נשמח לקבל גם פתרונות לחלק מהשאלות (אפילו לשאלה בודדת). לפותרים מצטיינים יוענקו פרסים.

שאלון רגיל, חטיבת הביניים

(1) להוכיח שעבור כל n טבעי

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+1\right)^2=2n-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$$

(4 נקודות)

(2) נתונים שני מעגלים הנמצאים אחד מחוץ לשני. תהיינה A_1 ו- A_2 שתי נקודות החיתוך הרחוקות ביותר של המעגלים עם קו מרכזיהם, כך ש- A_1 נמצאת על המעגל הראשון ו- A_2 על השני. מנקודה A_1 נעביר שתי קרניים המשיקות למעגל השני. נבנה מעגל K_2 המשיק לקרניים אלה ולמעגל הראשון מבפנים. מנקודה A_2 נעביר שתי קרניים המשיקות למעגל הראשון. נבנה מעגל K_2 המשיק לקרניים אלו ולמעגל השני מבפנים. להוכיח שהמעגלים K_1 ו- K_2 שווים.

(4 נקודות)

(3) נתונות 27 קוביות בגודל 1x1x1. 9 אדומות, 9 כחולות ו- 9 לבנות. האם ניתן לבנות מהן קוביה בגודל 3x3x3, כך שכל אחת מ- 27 העמודות המקבילות למקצועות הקוביה (כל עמודה מכילה 3 קוביות) תכיל קוביות משני צבעים בדיוק?

(5 נקודות)

(4) נתונים 61 מטבעות שנראים זהים. ידוע ששנים מהם מזויפים; שכל המטבעות האמיתיים הם שווי משקל וגם שני המטבעות המזויפים שווי משקל. משקל מטבע מזויף שונה ממשקל מטבע אמיתי אך לא ידוע אם הוא גדול או קטן ממנו. איך ניתן לקבוע האם מטבע מזויף כבד יותר או קל יותר ממטבע אמיתי ע"י שלוש שקילות במאזניים של שתי כפות ללא משקולות? אין צורך למצא את המטבעות המזוייפים.

(8 נקודות)

שאלון מתקדם, חטיבת הביניים

(1) מהו המספר המכסימלי של תחומים להם נתן לחלק את מישור xy ע"י 100 גרפים של פונקציות מהצורה

$$? \quad y = a_n x^2 + b_n x + c_n \quad (n=1,2,\ldots,100)$$

(6 נקודות)

(2) אם נסובב ריבוע בזווית 45° ביחס למרכזו אזי צלעות הריבוע המסובב יחלקו כל צלע של הריבוע המקורי ביחס a:b:a (היחסים האלה קלים לחישוב). עבור מרובע קמור כלשהו נעשה בניה דומה: נחלק את כל הצלעות באותו יחס a:b:a ונעביר ישר דרך כל זוג נקודות חלוקה הסמוכות לאותו קדקוד. להוכיח ששטח המרובע החסום ע"י ארבעה ישרים אלה שווה לשטח המרובע המקורי.

(6 נקודות)

(3) בשורה עומדים 15 פילים, משקלו של כל אחד מהם (בקילוגרמים) הוא מספר שלם אם נחבר את המשקל של כל פיל (פרט לימני ביותר) עם פעמיים משקל שכנו מימין, נקבל 15 טון (בכל אחד מ- 14 המקרים) למצא את משקליהם של כל 15 הפילים.

(8 נקודות)

(4) נתון מעוין ABCD. בוחרים נקודה P על הצלע BC ומעבירים מעגל דרך B,A ו- P. הוא חותך שוב את הישר BD בנקודה Q. מעבירים מעגל דרך P,C ו- Q. הוא חותך שוב את BD בנקודה R. להוכיח שהנקודות R,A ו- P נמצאות על ישר אחד.

(8 נקודות)

(5) מה מספר זוגות המספרים הטבעיים (m,n) כך ש- m,n אינם גדולים מ- 1000 וכך ש:

$$? \qquad \frac{m}{n+1} < \sqrt{2} < \frac{m+1}{n}$$

(10 נקודות)

(6) נתבונן באוסף משקולות בעלות משקל שלם בגרמים כך שהמשקל הכולל של כל המשקולות שווה ל- 200 גרם. אוסף כזה ייקרא **תקין** אם כל גוף שמשקלו בגרמים הוא מספר שלם בין 1 לבין 200, ניתן לשקילה באופן יחיד(לא מבדילים בין משקולות שמשקלן שווה) ע"י השוואה עם מספר מסוים של משקולות מהאוסף, (הגוף מונח על כף אחת והמשקולות על הכף השניה).

א) תנו דוגמא של אוסף תקין בו לא כל המשקולות שוקלות 1 גרם.

(4 נקודות)

ב) מה מספר האוספים התקינים (שני אוספים הם שונים אם משקל מסויים נמצא בהם מספר שונה של פעמים).

(8 נקודות)

שאלון רגיל, חטיבה עליונה

(1) בנה משולש בו נתונות שתי צלעות וכמו כן ידוע שהתיכון לצלע השלישית מחלק את זווית המשולש ביחס 1:2.

(6 נקודות)

(2) הוכח ש:

(א) אם מספר טבעי n ניתן להצגה בצורה: $n=4k+1$ אזי קיימים n מספרים טבעיים אי-זוגיים שסכומם שווה למכפלתם.

(3 נקודות)

(ב) אם n לא ניתן להצגה כזאת, אזי לא קיימים n מספרים טבעיים אי-זוגיים כאלה.

(4 נקודות)

(3) מהו המספר המינימלי של הנקודות שצריך לסמן אותן על שפת :

א) תריסרון,

(2 נקודות)

ב) עשרימון

(5 נקודות)

כך שעל כל פאה תמצא לפחות נקודה מסומנת אחת?
(תריסרון הוא פאון המורכב מ- 12 מחומשים ששלושה מהם נפגשים בכל קדקוד; עשרימון הוא פאון המורכב מ- 20 משולשים שחמישה מהם נפגשים בכל קדקוד.

(4) נתונים 103 מטבעות שנראים זהים. ידוע ששנים מהם מזויפים, שכל המטבעות האמיתיים הם שווי משקל וגם שני המטבעות המזויפים שווי משקל. משקל מטבע מזויף שונה ממשקל מטבע אמיתי אך לא ידוע אם הוא גדול או קטן ממנו. איך ניתן לקבוע האם מטבע מזויף כבד יותר או קל יותר ממטבע אמיתי ע"י שלוש שקילות במאזניים של שתי כפות ללא משקולות? אין צורך למצא את המטבעות המזוייפים.

(7 נקודות)

שאלון מתקדם, חטיבה עליונה

(1) הוכח שעבור כל n טבעי קיים פולינום P(x) ממעלה שאינה גדולה מ- 2^n שמקדמיו הם 0,-1,1 בלבד המתחלק ב $(x-1)^n$ ללא שארית.

(6 נקודות)

(2) נתבונן באוסף משקולות בעלות משקל שלם בגרמים כך שהמשקל הכולל של כל המשקולות שווה ל- 500 גרם. אוסף כזה ייקרא **תקין** אם כל גוף שמשקלו בגרמים הוא מספר שלם בין 1 לבין 500, ניתן לשקילה באופן יחיד (לא מבדילים בין משקולות שמשקלן שווה) ע"י השוואה עם מספר מסוים של משקולות מהאוסף, (הגוף מונח על כף אחת והמשקולות על הכף השניה).

א) תנו דוגמא של אוסף תקין בו לא כל המשקולות שוקלות 1 גרם.

(4 נקודות)

ב) מה מספר האוספים התקינים (שני אוספים הם שונים אם משקל מסויים נמצא בהם מספר שונה של פעמים).

(6 נקודות)

(3) בעלת הבית אפתה עוגה לאורחים. תתכנה שתי אפשרויות : סביב השולחן ישבו p אנשים או q אנשים (p ו- q זרים). מהו המספר המינימלי של פרוסות (לא בהכרח שוות) להן יש לפרוס את העוגה כך שבכל מקרה ניתן יהיה לחלק אותה במנות שוות?

(10 נקודות)

(4) בטרפז ABCD (AB‖CD) AC=BC, H-נקודת האמצע של הבסיס AB. יהיה l ישר שעובר דרך H. תהיינה P ו- Q נקודות החיתוך של הישר l עם הישרים AD ו- BD בהתאמה. להוכיח שהזוויות ACP ו- QCB שוות.

(10 נקודות)

(5) האם קיים פאון קמור שבו אחד החתכים הוא משולש (החתך איננו עובר דרך הקדקודים) ובכל קדקוד נפגשים:

א) לפחות 5 מקצועות,

(4 נקודות)

ב) בדיוק 5 מקצועות?

(6 נקודות)

(6) דף נייר ריבועי בעל צלע a התלכלך במספר כתמי דיו ששטחו של כל אחד מהם איננו גדול מ- 1. כל ישר המקביל לאחת מהצלעות הדף, איננו חותך יותר מכתם דיו אחד. להוכיח שהשטח הכולל של כל כיתמי דיו איננו גדול מ- a.

(12 נקודות)