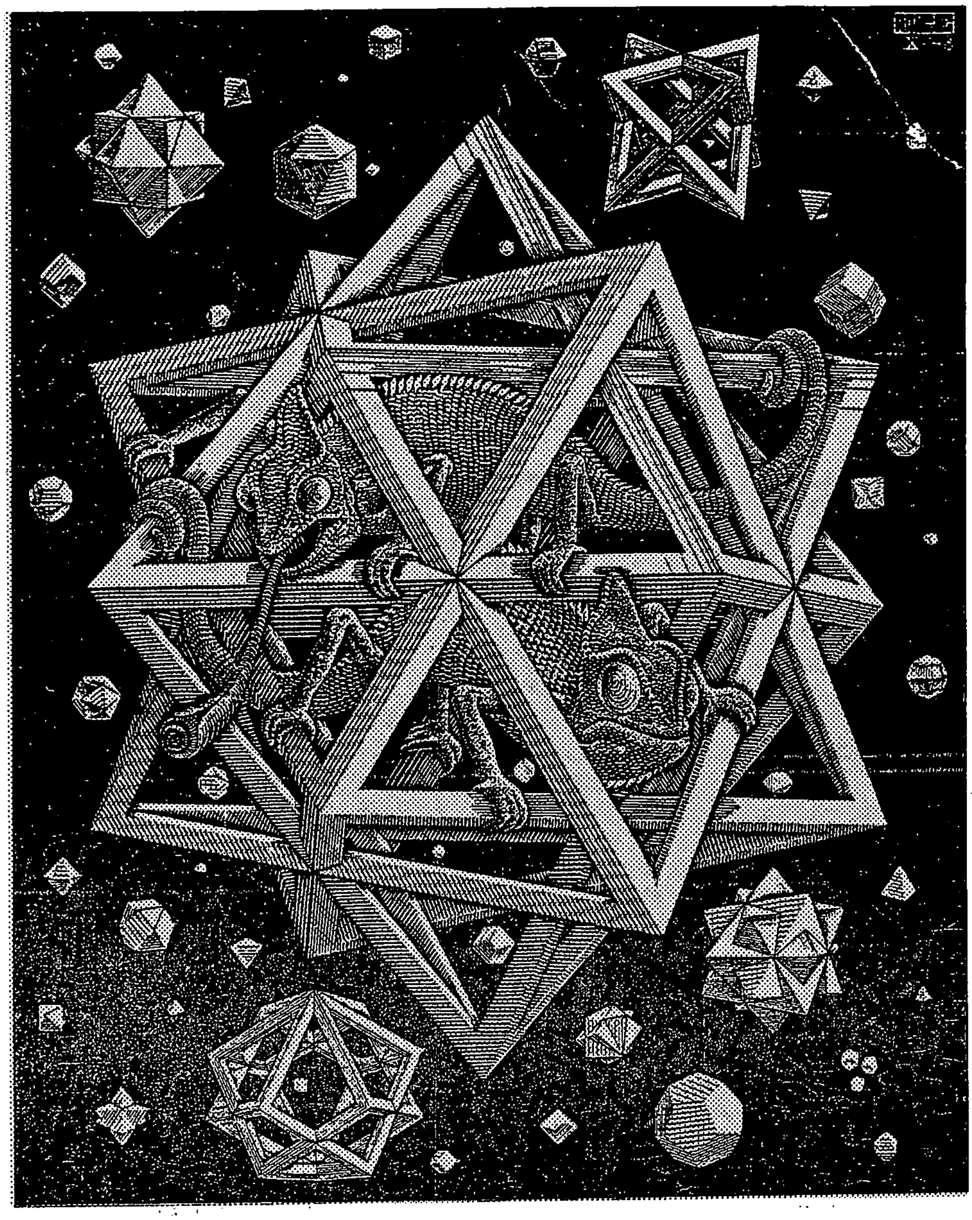
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס. 7 ספריית הוראת המדעים טבת תשמ"ז, ינואר 1987



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון וייצמן למדע
רחובות

בחסות המרכז המדעי י.ב.מ. ישראל

אתגר - גליונות מתמטיקה גליון מס. 7

תוכן העניינים

עמוד

יוצא לאור על ידי הפקולטות למתמטיקה במכון ויצמן למדע ובטכניון.

המערכת: פרופ. י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שימושית, מכון ויצמן למדע
פרופ. א. ברמן, המחלקה למתמטיקה, הטכניון.

מען המערכת: הפקולטה למתמטיקה שימושית, מכון ויצמן למדע. ת.ד. 26,
רחובות 76100, טלפון 08-483544.

דבר המערכת

הקוראים שמו לב בודאי לכך כי גליון זה גדול באופן ניכר מהרגיל. דבר זה בא כפיצוי חלקי על העיכוב המצער שחל בהוצאתו. עם הקוראים הסליחה ואנו מקוים כי תיהנו מפרי מאמצינו.

בהזדמנות זו אנו מאחלים לכל קוראינו חג פסח שמח.

חידה

א', ב' ו-ג' הוכנסו לחדר והוצגו בפניהם חמישה כובעים, שלושה שחורים ושניים אדומים. אחרי שחבשו לכולם את העינים הלבישו על כל אחד כובע. התחבושות הוסרו ואיפשרו לכל אחד לראות את הכובעים שעל ראשי שני האחרים. ביקשו מ-א' לנחש את צבע הכובע שעל ראשו והוא הודיע כי אינו יכול. אחריו הודיע גם ב' על אי-יכולתו. בסוף פנו אל ג' והוא נחש על נכון את צבע כובעו. איזה צבע חבש ג' ואיך ידע לנחש?

הפתרון בעמ' 41

ממוצעים סימטריים

ר. גרשוביץ (ירושלים)

I. פולינומים סימטריים

במאמרים קודמים (ראה אתגר - גליונות מתמטיקה 3,2)

חקרנו את הפונקציה

$$f(x) = \left\{ \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^x \right\}^{1/x}$$

כאשר $a_i \geq 0$ $\{i = 1,2,\dots,n\}$

וראינו כי ערכה משתנה עם x . בין השאר הוכחנו כי כאשר כל המספרים a_i $(1 \leq i \leq n)$ חיוביים ולא כולם שווים זה לזה, אזי עבור $0 < x_1 < x_2$ קיים

$$f(x_1) < f(x_2) .$$

במאמר זה ננסה להכליל את מושג הממוצע לכלול גם ממוצעים סימטריים נוספים. אבל ראשית כל נגדיר את המושג של פולינום סימטרי.

הגדרה: הפולינום $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ב-n המשתנים $x_1,x_2,\dots,x_n$ נקרא סימטרי אם איננו משתנה כאשר משנים את סדר המשתנים.

דוגמא:

עבור $n=2$ הפולינומים $x_1^2 + x_2^2$, x_1x_2 , $(x_1-x_2)^6$, הם כולם סימטריים, כי ברור ש-

$$x_2^2 + x_1^2 \equiv x_1^2 + x_2^2$$

$$x_2x_1 \equiv x_1x_2$$

$$(x_2-x_1)^6 \equiv (x_1-x_2)^6$$

וכו'. עבור $n=3$ נוכל לקחת כדוגמאות

$$x_1+x_2+x_3$$

$$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2$$

$$(x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + (x_3-x_1)^2$$

ולא קשה לאשר כי בכל המקרים האלה הפולינומים לא ייפגעו אם נשנה את סדר המשתנים.

הפולינומים הסימטריים האלמנטריים מוגדרים כדלקמן:

$$\sigma_1 = x_1+x_2+x_3+ \dots + x_n$$

$$\sigma_2 = x_1x_2+x_1x_3+ \dots + x_1x_n+x_2x_3+x_2x_4+ \dots +x_2x_n+ \dots$$

$$+ \dots + x_{n-1}x_n$$

כלומר לוקחים את כל הזוגות i,j $(1 \leq i < j \leq n)$ ומגדירים

$$\sigma_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_ix_j$$

בדרך דומה נוכל להגדיר σ_3. לוקחים את כל השלישיות $1 \leq i < j < k \leq n$ ואז

$$\sigma_3 = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} x_ix_jx_k$$

באופן כללי אם נקח את כל הקבוצות של r משתנים מבין $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ונחשב את הסכום של מכפלות האיברים בכל קבוצה וקבוצה, נקבל

$$\sigma_r = \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_r\le n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r} .$$

במקרה $r=n$ נקבל

$$\sigma_n = x_1x_2\cdots x_n$$

II. תכונות הפולינומים האלמנטריים

משפט ויטה (VIETA)

אם $x_1,x_2,\dots,x_n$ הם שורשי המשואה

$$f(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}\ \dots + a_{n-1}x+a_n = 0$$

אזי

$\sigma_1 = -a_1/a_0$, $\sigma_2 = a_2/a_0$, $\sigma_3 = -a_3/a_0$, ... ובאופן כללי

$$\sigma_r = (-1)^r a_r/a_0 .$$

הוכחה: אנו יודעים מאלגברה יסודית כי, עבור $1\le r\le n$, $x-x_r$ הם כולם גורמים של $f(x)$. מאחר שהם n במספר יוצא כי אין גורמים אלגבריים נוספים ולכן

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots + a_{n-1}x+a_n \equiv a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

$$\equiv a_0[x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2} - \dots + (-1)^n\sigma_n]$$

והמשפט נובע מיד אם נשוה את המקדמים בשני האגפים.

<u>משפט יסודי</u>

ניתן להציג כל פולינום סימטרי בעזרת הפולינומים הסימטריים האלמנטריים.

דוגמא: ניקח $n=2$ ונסתכל ב-

$$P_k(x_1,x_2) = x_1^k + x_2^k$$

עבור k מספר טבעי גדול מ-1.

אזי

$$\begin{aligned} P_2(x_1,x_2) &= x_1^2 + x_2^2 \\ &= (x_1+x_2)^2 - 2\,x_1x_2 \\ &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3(x_1,x_2) &= x_2^3 + x_2^3 \\ &= (x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2) - 2x_1x_2(x_1+x_2) \\ &= \sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2) - 2\sigma_1\sigma_2 \\ &= \sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 \end{aligned}$$

ובאופן כללי

$$\begin{aligned} P_k(x_1,x_2) &= x_1^k + x_2^k \\ &= (x_1+x_2)(x_1^{k-1}+x_2^{k-1})-x_1x_2(x_1^{k-2}+x_2^{k-2}) \\ &= \sigma_1P_{k-1} - \sigma_2P_{k-2} \end{aligned}$$

יוצא כי אם ניתן להציג את P_{k-1}, P_{k-2} בעזרת הפולינומים האלמנטריים אזי נוכל להציג גם את P_k.

הוכחנו איפוא בדרך האינדוקציה כי ניתן להציג כל P_k בעזרת σ_1, σ_2 .

לא ניכנס כאן להוכחה מליאה של המשפט, בעיקר מפני שלא נצטרך להסתמך על המשפט בהמשך המאמר. נעיר רק כי ההוכחה הכללית דומה ביסודה לשיקולים שהצגנו כאן. כאשר נתון איזה פולינום

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

נראה כי ניתן לכתוב אותה בצורה יותר אלמנטרית, בעזרת הפולינומים הסימטריים. ואמנם זה עכשיו ראינו דוגמה של הפעולה הזאת כאשר כתבנו

$$x_1^k + x_2^k = \sigma_1(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) - \sigma_2(x_1^{k-2} + x_2^{k-2})$$

ניתן להמשיך בדרך זו עד שמגיעים לפולינומים הפשוטים ביותר, דהיינו האלמנטריים בעצמם.

אולי יובהר הדבר בעזרת דוגמא נוספת ועם זה נשאיר לקורא למצוא בעצמו הוכחה כללית.

<u>דוגמא</u>: ניקח $n=3$ ויהיה

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 + x_1^2 x_2^2$$

$$+ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3(x_1 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2)$$

רואים כי אפשר לכתוב

$$f = f_4 + f_3 + f_2$$

כאשר

$$f_4(x_1,x_2,x_3) = x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + x_1^2x_2^2$$

הוא ממעלה 4,

$$f_3(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$$

הוא ממעלה 3, ואילו

$$f_2(x_1,x_2,x_3) = -3(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2)$$

הוא ממעלה 2.

ברור כי יהיה מספיק (וגם הכרחי) להוכיח את המשפט עבור f_2,f_3,f_4 בנפרד. אבל

$$f_4 = (x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2)^2 -2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)$$

$$= \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3$$

$$f_3 = \{(x_1+x_2+x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\}$$

$$-\{x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2\}$$

$$= \sigma_1\{(x_1+x_2+x_3)^2 -2(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2)\}$$

$$-\{x_1x_2(x_1+x_2)+x_1x_3(x_1+x_3)+x_2x_3(x_2+x_3)\}$$

$$= \sigma_1\{\sigma_1^2-2\sigma_2\} - \{x_1x_2(\sigma_1-x_3)+x_1x_3(\sigma_1-x_2)+x_2x_3(\sigma_1-x_1)\}$$

$$= \sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2-\{\sigma_1(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-3\sigma_3\}$$

$$= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 .$$

ואילך

$$f_2 = -3\sigma_2$$

ירצא כי

$$f(x_1,x_2,x_3) = \sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3 + \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3-3\sigma_2 \ .$$

III. ממוצעים סימטריים

נשים לב כי הפולינום σ_k הוא סכום של C_n^k מחוברים כאשר כל מחובר הוא מכפלה של k איברים מבין $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$. לכן טבעי לראות את המספר

$$\left\{\frac{\sigma_k}{C_n^k}\right\}^{1/k}$$

כמין ממוצע של הקבוצה $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$. נגדיר איפוא את הממוצע הסימטרי מסדר k

$$\mu_k(a) = \{\sigma_k/C_n^k\}^{1/k}$$

כאשר a מסמן את הקבוצה $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$.

אם נשים לב לעובדה ש-

$$\begin{cases} \sigma_1 = a_1+a_2 \dots + a_n \\ \sigma_n = a_1a_2 \dots a_n \\ C_n^1 = n \\ C_n^n = 1 \end{cases}$$

נראה כי אפשר לכתוב את משפט הממוצעים המפורסם בצורה

$$\mu_n(a) \leq \mu_1(a)$$

כאשר שוויון מתקבל אך ורק במקרה ש- $a_1=a_2 = \dots = a_n$.

למעשה זה מקרה פרטי של משפט יותר כללי:

<u>משפט מקלורין (MACLAURIN)</u>

אם k,l הם מספרים טבעיים כך ש- $1 < k \leqslant n$, ו-

$a_i \geqslant 0$, $\{i = 1,2 = ,\dots,n\}$, אזי $\mu_k(a) \leqslant \mu_l(a)$

ושוויון יתקבל אך ורק כאשר $a_1 = a_2 \dots = a_n$.

דוגמא: ניקח $n = 3$ ואז

$$\mu_1(a) = (a_1+a_2+a_3)^{1/3}$$

$$\mu_2(a) = \left(\frac{a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2}{3}\right)^{1/2}$$

$$\mu_3(a) = (a_1a_2a_3)^{1/3}$$

והמשפט קובע כי

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geqslant \left(\frac{a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2}{3}\right) \geqslant (a_1a_2a_3)^{1/3}$$

במילים אחרות הממוצעים הסימטריים של $a_1,a_2,\dots,a_n$ נמצאים כולם בין הממוצע ההנדסי והחשבוני. את משפט מקלורין נוכיח בהמשך אבל יהיה נוח יותר אם נוכיח ראשית כל אי-שוויון המיוחס לניוטון (NEWTON).

III. <u>משפט ניוטון</u>

עבור כל $k > 1$

$$\{\mu_k(a)\}^{2k} \geqslant \{\mu_{k+1}(a)\}^{k+1}\{\mu_{k-1}(a)\}^{k-1}$$

אם נכתוב

$$P_k = \{\mu_k(a)\}^k = \frac{\sigma_k}{C_n^k}$$

אזי נוכל לכתוב את משפט ניוטון ש-

$$P_k^2 \geqslant P_{k+1}P_{k-1}$$

<u>דוגמא</u>: ניקח $n = 4$, $k = 2$ ונקבל.

$$P_1 = (a_1+a_2+a_3+a_4)/4$$

$$P_2 = (a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4)/6$$

$$P_3 = (a_2a_3a_4+a_1a_3a_4+a_1a_2a_4+a_1a_2a_3)/4$$

והמשפט קובע כי

$$\left(\frac{a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4}{6}\right)^2$$

$$\geqslant \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)\left(\frac{a_2a_3a_4+a_1a_3a_4+a_1a_2a_4+a_1a_2a_3}{4}\right)$$

כלומר

$$(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4)^2 \geqslant \frac{9}{4}\,(a_1+a_2+a_3+a_4)\ x$$

$$x\ (a_2a_3a_4+a_1a_3a_4+a_1a_2a_4+a_1a_2a_3)$$

<u>הוכחת משפט נירטון</u>

ההוכחה היא בעזרת אינדוקציה. נניח כי המשפט נכון עבור $(n-1)$ המספרים $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ ונסיק כי אז יהיה נכון עבור n המספרים $a_1, a_2, \dots, \dots, a_{n-1}, a_n$.

כזכור σ_k הוא סכום המכפלות של כל הקבוצות בעלות b איברים מתוך n האיברים $a_1, a_2, \dots \dots, a_n$. נסמן ב- σ'_k את סכום המכפלות של קבוצות בעלות k איברים מתוך $(n-1)$ האיברים $a_1, a_2, \dots \dots, a_{n-1}$. ברור כי

$$\sigma_k = a_n \sigma'_{k-1} + \sigma'_k$$

באופן דומה נגדיר

$$P'_k = \frac{\sigma'_k}{C^k_{n-1}}$$

אבל

$$P_k = \frac{\sigma_k}{C^k_n} = \frac{a_n \sigma'_{k-1} + \sigma'_k}{C^k_n}$$

$$= \frac{a_n \sigma'_{k-1}}{\frac{n}{k} \cdot C^{k-1}_{n-1}} + \frac{\sigma'_k}{\frac{n}{n-k} \cdot C^k_{n-1}}$$

מאחר ש-

$$C^k_n = C^{k-1}_{n-1} \cdot \frac{n}{k} = C^k_{n-1} \cdot \frac{n}{n-k}$$

ולכן

$$P_k = \frac{k}{n} a_n P'_{k-1} + \frac{n-k}{n} P'_k$$

ומכאן

$$P_k^2 - P_{k+1}P_{k-1} = \left\{ \frac{n-k}{n} P'_k + \frac{k}{n} a_n P'_{k-1} \right\}^2 - \left\{ \frac{n-k-1}{n} P'_{k+1} + \frac{k+1}{n} a_n P'_k \right\}$$

$$\left\{ \frac{n-k+1}{n} P'_{k+1} + \frac{k-1}{n} a_n P'_{k-2} \right\} = \frac{1}{n^2} \left\{ A + Ba_n + Ca_n^2 \right\}$$

כאשר:

$$A = (n-k)^2 (P'_k)^2 - (n-k-1)(n-k+1) P'_{k+1} P'_{k-1}$$

$$B = 2k(n-k) P'_k P'_{k-1} - (k-1)(n-k-1) P'_{k+1} P_{k-1} - (k+1)(n-k+1) P'_k P'_{k-1}$$

$$C = k^2 (P'_{k-1})^2 - (k+1)(k-1) P'_k P'_{k-2}$$

לפי הנחת האינדוקציה, יש לנו

$$(\text{א}) \quad (P'_k)^2 = P'_{k+1} P'_{k-1}$$

$$(\text{ב}) \quad (P'_{k-1})^2 > P'_k P'_{k-2}$$

ומהכפלת שני אלה

$$P'_k P'_{k-1} \geq P'_{k+1} P'_{k-2}$$

מכאן נובע כי

$$A = (n-k)^2 (P'_k)^2 - \{(n-k)^2 - 1\} P'_{k+1} P'_{k-1}$$

$$= (P'_k)^2 + \{(n-k)^2 - 1\}\{(P'_k)^2 - P'_{k+1} P'_{k-1}\} > (P'_k)^2$$

בדרך דומה מתקבל (אחרי קצת עבודה אלגברית)

$$B > -2P'_k P'_{k-1}$$

$$C > (P'_k)^2$$

ולכן

$$P_k^2 - P_{k+1}P_{k-1} > \frac{1}{n^2}\{ P_k'^2 a_n^2 - 2P_k'P_{k-1}^1 a_n + P_{k-1}'^2\}$$

$$= \frac{1}{n^2} \{ P_k' a_n - P_{k-1}' \}^2 \geqslant 0$$

בזאת הוכחנו את משפט ניוטון ועכשיו נוכל לגשת למשפט מקלורין.

IV. <u>הוכחת משפט מקלורין</u>

כזכור משפט זה קובע כי עבור $k > 1$,

$$\mu_k(a) \leqslant \mu_1(a)$$

כאשר השוויון קיים אך ורק במקרה ש- $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

לפי משפט ניוטון

$$P_1^2 > P_2P_o$$

אבל $P_k = \mu_k^k$ ולכן

$$\mu_1^2 > \mu_2^2$$

כלומר

$$\mu_1(a) > \mu_2(a) \qquad (א)$$

כמו כן

$$P_2^2 > P_3P_1$$

ז.א. $$\{\mu_2(a)\}^4 > \{\mu_3(a)\}^3 \mu_1(a)$$

$$> \{\mu_3(a)\}^3 \mu_2(a)$$

לפי (א), ולכן

$$\{\mu_2(a)\}^3 > \{\mu_3(a)\}^3$$

ז.א.
$$\mu_2(a) > \mu_3(a) \qquad (ב)$$

נוכל להמשיך בדרך זו ונקבל כי

$$\mu_1(a) \geq \mu_2(a) \geq \mu_3(a) \geq \ldots \geq \mu_k(a) \geq \mu_{k+1}(a) \ldots \geq \mu_n(a)$$

דהיינו משפט מקלורין.

בסוף נעיר כי ניתן להוכיח את המשפט בצורה יותר פשוטה בעזרת חשבון דיפרנציאלי ואת ההוכחה ניתן בהמשך המאמר בגליון הבא.

*   *   *   *

<u>האם מכפלת 4 מספרים תכופים בסדרה חשבונית היא רבוע שלם?</u>

דב ירדן ז"ל *

ב"דפים" חוברת ז, עמודים 6-8, הוכיח א. פצורניק כי מכפלת 4 מספרים תכופים בסדרת המספרים הטבעיים אינה רבוע שלם. בתור הכללה אפשר לשאול: האם מכפלת 4 מספרים תכופים בסדרה חשבונית היא רבוע שלם? ברצוני להוכיח כאן את המשפט הבא:

<u>משפט</u>. מכפלה מצורת $a(a+d)(a+2d)(a+3d)$, כאשר a ו- d הם מספרים טבעיים זרים ביניהם, אינה רבוע שלם, אם $a \geq (-3d+\sqrt{4d^4+5d^2+1})/2$.
במלים אחרות: רק בראש סדרה חשבונית שאברה הראשון והפרשה טבעיים-זרים ביניהם נמצאות אולי רביעיות של מספרים תכופים, שמכפלתם היא רבוע שלם. לעמת זה מובטחנו כי במרחק מספיק **מההתחלה** לא יקרה דבר זה לעולם.

<u>הרכחה</u>. קיימת זההות

(1) $$a(a+d)(a+2d)(a+3d)+d^4=[a(a+3d)+d^2]^2 ,$$

שקל לאמתה על ידי חשוב 2 האגפים. אילו היה $a(a+d)(a+2d)(a+3d)$ רבוע שלם, היה לפי הזהות (1) והמשפט על מספרי פתררוס ("כל פתרונות המשואה $x^2+y^2=z$ ב x,y,z טבעיים-זרים ביניהם כלולים בנוסחאות: $z=m^2+n^2$ ו- $x=m^2-n^2$, $y=2mn$, או $y=m^2-n^2$, $x=2mn$, כאשר m ו- n עוברים על כל המספרים הטבעיים ו $n < m$"):

(2) $$a(a+3d)+d^2=m^2+n^2$$

ו-

(3) $$a(a+d)(a+2d)(a+3d)=(m^2-n^2)^2=(m-n)^2(m+n)^2 ,$$

(4) $$d^2=2mn ,$$

או

(3') $$a(a+d)(a+2d)(a+3d)=4m^2n^2 ,$$

(4') $$d^2=m^2-n^2 .$$

על ידי הצבת (4) באגף השמאלי של (2), נקבל

(5) $$a(a+3d)=(m-n)^2 .$$

מכאן ו-(3):

(6) $$(a+d)(a+2d)=(m+n)^2$$

על ידי הצבת (4') באגף השמאלי של (2), נקבל:

(5') $$a(a+3d)/2=n^2$$

מכאן ו-(3')

(6') $$(a+d)(a+2d)/2=m^2$$

הפרש הרבועים (6) ו- (5) הוא $2d^2$. הפרש הרבועים (6') ו- (5') הוא d^2. הפרש הרבועים של 2 מספרים טבעיים איננו קטן מפעמים המספר הקטן + 1, כי אם u ו- v הם מספרים טבעיים יהיה: $(u+1)^2-u^2=2u+1 \leqslant (u+v)^2-u^2$.

מכאן:

$$2d^2 \geq 2\sqrt{a(a+3d)}+1 \qquad (7)$$

או

$$d^2 \geq \sqrt{2a(a+3d)}+1 \qquad (7')$$

מ-(7) ירצא:

$$a \leq (-3d+\sqrt{4d^4+5d^2+1})/2 \qquad (8)$$

מ-(7') ירצא:

$$a \leq (-3d+\sqrt{2d^4+5d^2+2})/2 \qquad (8')$$

האגף הימני של (8) גדול מן האגף הימני של (8'), כי d הוא מספר טבעי, לכן קיים משני אי-השוויונות (8) ו- (8') לפחות אי-השוויון החלש יותר (8).

אנו יכולים איפוא להחליט לכל d טבעי נתון האם מכפלת 4 מספרים תכופים בסדרה חשבונית בעלת ההפרש d ואבר ראשון טבעי זר ל- d יכלה להיות רבוע שלם כי לפי (8), יש לבדק רק מספר סופי (קטן ביחס) של מספרים a.

---

* ד"ר דב ירדן, (מקודם דב יוז'וק) ז"ל השתייך לקבוצת מניחי היסודות לחינוך והוראה במתמטיקה בארץ. הוא נולד ברוסיה בשנת 1911, עלה ארצה בגיל צעיר ונפטר בספטמבר 1986.
לפני כארבעים שנה ערך, יחד עם ד"ר ת. מוצקין ז"ל, עתון בשם "דפים למתמטיקה ולפיסיקה" שנועד בעיקר לתלמידי תיכון. בין השנים 1948 עד 1960 עסק בהוצאת העיתון "רבעון למתמטיקה" אשר תוכנו היה בעיקר מאמרי מחקר. המאמר הקצר דלעיל, שהופיע ב-1945, ואשר בא להכליל משפט של א. מצ'ורניק, שהיה אז תלמיד תיכון (היום פרופסור לכימיה במכון ויצמן למדע) מובא כאן מחדש ומוקדש לזכרו של ד"ר ירדן.

תיקון טעות

לצערנו לא הודפס דף מס' 19 בגליון מס' 7 היטב. אנו מביאים כאן דף זה מחדש.

חילוק של פולינום בגורם ליניארי

א. בלום
ירושלים

נתון הפולינום ממעלה n,

$$P(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n.$$

בקשר לחילוק של הפולינום $P(x)$ ב- $(x-a)$, ניתן להוכיח את המשפט הבא, הידוע בשם משפט בזו (Bezout):

שארית החילוק של פולינום $P(x)$ ב- $(x-a)$ שווה ל- $P(a)$, ז.א. את שארית החילוק ניתן לקבל כאשר מציבים בפולינום $P(x)$ את a במקום x.

__הוכחה:__ אם נסמן את מנת החילוק ב- $Q(x)$ ואת השארית ב- R, נוכל לכתוב הזהות $P(x)\equiv(x-a)\cdot Q(x)+R$ (1)

המנה $Q(x)$ היא פולינום ממעלה $n-1$ והשארית היא מספר קבוע, מפני שהמחלק $x-a$ הוא ממעלה הראשונה ומעלת השארית חייבת להיות קטנה ממעלת המחלק.

אם בזהות (1) נציב במקום x את a, נקבל $P(a)\equiv(a-a)Q(a)+R$, אז $R=P(a)$, מ.ש.ל.

משפט זה מאפשר למצוא בקלות את שארית החילוק R, של חילוק הפולינום $P(x)$ ב- $x-a$.

__דוגמאות:__

א. כדי למצוא את שארית R של חילוק הפולינום $P(x) = 4x^3-2x^2+x-1$ ב- $x-2$, מספיק לחשב את $P(2)=32-8+2-1=25$. ז.א. השארית היא $R=25$.

ב. אם רוצים לחשב את שארית החילוק של הפולינום $P(x) = 2x^3+3x^2+4x-2$ ב- $x+1$, נחשב את $P(-1)$ ונקבל $P(-1)=-5$. ז"א השארית היא $R=-5$.

ראינו איפוא כיצד למצוא את שארית החילוק של פולינום $P(x)$ ב- $x-a$.

נראה בהמשך, איך ניתן למצוא את מנת החילוק $Q(x)$, שהיא פולינום ממעלה $n-1$ (אם $P(x)$ הוא פולינום ממעלה n) בצורה

$Q(x) = b_o x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}$.

על מנת לקבל את המקדמים של המנה $Q(x)$, נכתוב את זהות החילוק $P(x) \equiv (x-a)Q(x) + R$. נציב בזהות הזאת את הביטויים של $P(x)$ ו- $Q(x)$ ונקבל:

$$(2)\quad a_ox^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+ \dots + a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n \equiv (x-a)(b_ox^{n-1} + b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-2}x+b_{n-1}) + R$$

נבצע את המכפלה שבאגף הימני של הזהות (2) ונקבל:

$$(b_ox^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-2}x+b_{n-1})(x-a) =$$
$$= b_ox^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x^2+b_{n-1}x +$$
$$+ (-ab_ox^{n-1}-ab_1x^{n-2} - \dots - ab_{n-3}x^2-ab_{n-2}x-ab_{n-1}) =$$
$$= b_ox^n+(b_1-ab_o)x^{n-1}+(b_2-ab_1)x^{n-2} + \dots + (b_{n-1}-ab_{n-2})x-ab_{n-1}$$

נציב תוצאה זאת בזהות (2) ונקבל:

$$(3)\quad a_ox^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n \equiv$$
$$\equiv b_ox^n+(b_1-ab_o)x^{n-1}+(b_2-ab_1)x^{n-2} + \dots + (b_{n-1}-ab_{n-2})x + (R-a\cdot b_{n-1})$$

מאחר שקיימת זהות בין האגפים של (3), נוכל להשוות את המקדמים

בשני האגפים:

ז"א נוכל לכתוב:

$$a_o = b_o$$

$$a_1 = b_1 - ab_o$$

$$a_2 = b_2 - ab_1$$

- - - - - - - - -

$$a_{n-1} = b_{n-1} - a \cdot b_{n-2}$$

$$a_n = R - a \cdot b_{n-1}$$

מכאן, בצורה הדרגתית מקבלים:

$$\boxed{\begin{array}{c} b_{n-1} = a \cdot b_{n-2} + a_{n-1} \ \cdots \ b_2 = ab_1 + a_2 \ , \ b_1 = ab_o + a_1 \ , \ b_o = a_o \\ \\ R = a \cdot b_{n-1} + a_n \end{array}} \qquad (4)$$

הביטויים שמצאנו עבור המקדמים $b_{n-1} \ldots b_1, b_o$ של המנה $Q(x)$ ועבור השארית R, מאפשרים להרכיב סכימה לחישוב המקדמים האלה. ואמנם הסכימה הבאה של הורנר (Horner) מאפשרת לנו לחשב אז המקדמים בלי קושי:

החזקות של x	x^n	x^{n-1}	$x^{n-2}\ \dots x^1$	x^o
המקדמים של P(x)	a_o	a_1	$a_2\ \dots\ a_{n-1}$	a_n
המקדמים של Q(x)	a_o	ab_o+a_1	$ab_1+a_2, \dots, ab_{n-2}+a_{n-1}$	$ab_{n-1}+a_n$
והשארית R	b_o	b_1	$b_2\ \ b_{n-1}$	R
	המקדמים של Q(x)			השארית

כפי שניתן לראות בסכימה, בשורה העליונה של הסכימה של הורנר (Horner) נמצאים המקדמים של P(x) ובשורה האחרונה נמצאים המקדמים של המנה Q(x) והשארית R.

אם נסתכל על הסכימה הנ"ל, נוכל להסיק פרוצדורה כדי לקבל את המקדמים של המנה Q(x) ואת השארית R.

נניח שסדרנו את P(x) לפי חזקות יורדות של ה-x. מהסכימה רואים שהמקדם הראשון b_o של Q(x) שווה למקדם הראשון a_o של P(x).
המקדם השני של Q(x) הוא $b_1 = ab_o+a_1$. ז"א את המקדם b_1 של Q(x) מקבלים, אם מכפילים המקדם הקודם (ז"א a_o) ב- a ומוסיפים את a_1.
המקדם השלישי של Q(x) הוא $b_2=ab_1+a_2$. ז"א את המקדם b_2 של Q(x) מקבלים, אם מכפילים המקדם הקודם של Q(x), את b_1 ב- a ומוסיפים a_2.
מכאן, שהפרוצדורה לקבל את המקדם b_2, היא אותה פרוצדורה שלפיה קבלנו את המקדם b_1, וכן הלאה.

ננסה להבהיר את הפרוצדורה הנ"ל, ע"י מספר דוגמאות:

א. רוצים לקבל בעזרת הסכימה של הורנר את המנה Q(x) ואת השארית R של חילוק הפולינום $P(x) = 3x^4-2x^3+4x-1$ ב- x-2.

ראשית כל נכתוב את P(x) בצורה הבאה: $P(x) = 3x^4-2x^3+0x^2+4x+2$,

כלומר המקדם של x^2 הוא אפס.

נרשום עתה את הסכימה

החזקות של x של הפולינום P(x)	x^4	x^3	x^2	x	x_o	
המקדמים של P(x)	3	-2	0	4	-1	2 a-ה x-a-מ
המקדמים של Q(x)	3	2.3-2=4	2.4+0=8	2.8+4=20	2.20-1=39	
	המקדמים של המנה Q(x)				השארית R	

ז"א המנה Q(x) תהיה, $Q(x) = 3x^3+4x^2+8x+20$

והשארית R=39 . כלומר, במקרה הזה, הזהות של החילוק עם שארית,

$P(x) \equiv (x-a)Q(x) + R$ תהיה:

$$3x^4-2x^3+4x-1 \equiv (x-2)\ (3x^3+4x^2+8x+20) + 39$$

ב. רוצים למצוא את מנת החילוק של הפולינום $P(x) = 2x^4+3x^3-x+4$

ב- x+1 . נרשום את הסכימה של הורנר (Horner).

x^4	x^3	x^2	x	x_o	
2	3	0	-1	4	-1
2	1	-1	0	4	
המקדמים של Q(x)				השארית R	

המנה $Q(x)$ תהיה $Q(x) = 2x^3+x^2-x$ והשארית R תהיה $R = 4$.

ז"א נוכל לכתוב $2x^4+3x^3-x+4 \equiv (x+1)(2x^3+x^2-x)+4$

הערה: הסכימה של הורנר (Horner) היא שימושית לא רק לביצוע, ולמציאת המנה $Q(x)$ והשארית R, אלא גם לחישוב הערך $P(a)$, שלפי משפט בזהו (Bezout), שארית החילוק שווה $P(a)$.

<u>האפסים (השורשים) של פולינום</u>

מקרה חשוב ביותר בחילוק הפולינום $P(x)$ ב- $x-a$ הוא, כאשר השארית R שווה אפס. במקרה הזה אומרים ש- $P(x)$ מתחלק ב- $x-a$.

ע"פי הגדרה, המספר a הוא אפס (שורש) של הפולינום $P(x)$, כאשר $P(a) = 0$, ז"א אם מציבים את a במקום x בפולינום $P(x)$ והתוצאה שווה אפס.

בקשר לזה נוכיח את המשפט הבא:

משפט: תנאי הכרחי ומספיק שהפולינום $P(x)$ יתחלק ב-$x-a$; הוא, שהמספר a יהיה אפס (שורש) של הפולינום $P(x)$.

הוכחה:

התנאי הוא הכרחי, כי אם הפולינום $P(x)$ מתחלק ב- $x-a$, אז מתקיים ש- $P(x) \equiv (x-a)\cdot Q(x)$. אם נציב במקום x את a נקבל ש- $P(a) = 0$, ז"א השארית $R = 0$ (שהרי הוכחנו מקודם ש- $R = P(a)$).

התנאי הוא מספיק אם a הוא אפס (שורש) של הפולינום $P(x)$, אז $P(a) = 0$, $R =$. ז"א הפולינום $P(x)$ מתחלק ב- $x-a$.

הערה: לפעמים, במקום לדבר על האפס של הפולינום $P(x)$, מדברים על השורש של המשוואה $P(x) = 0$

המשפט הנ"ל הוא אחת המסקנות החשובות ביותר של משפט בזו (Bezout).

אחרי שהצגנו את משפט בזו (Bezout) ומסקנותיו ואת הסכימה של הורנר (Horner), שמאפשרת מציאת המנה $Q(x)$ והשארית R בחילוק הפולינום $P(x)$ ב- $x-a$, נראה עתה כיצד תלמיד פתר את התרגיל מס' 13 מבחינת הבגרות, מועד קיץ 1985, ברמה של 5 יח"ל, בפרק חשבון דיפרנציאלי. התרגיל היה:

הוכח כי לכל x ממשי $3x^4 - 4x^3 + 1 \geqslant 0$

מובן מאליו, שהכוונה לכתחילה היתה חקירה ותיאור גרפי של הפונקציה $f(x) = 3x^4-4x^3+1$ באמצעות הנגזרת ולהסיק שהמינימום המקומי והמוחלט של הפונקציה $f(x)$ כאשר $x=1$.

אבל, קרה שתלמיד אחד לא בחר בדרך זו. הוא ראה ש- $x=1$ הוא אפס של הפולינום $3x^4-4x^3+1$ ועבר ישר לכתוב את הסכימה של הורנר בצורה הבאה:

$$\begin{array}{ccccc|c} 3 & -4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & \end{array}$$

הוא גם רשם את המנה $3x^3-x^2-x-1$

שוב ראה התלמיד ש- $x=1$ הוא שורש גם של המנה $3x^3-x^2-x-1$ ושוב כתב למטה את סכימה של הורנר בצורה הבאה:

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

אחר כך הוא כתב את האגף השמאלי של האי-שוויון שבתרגיל בצורה מפורקת $(x-1)^2(3x^2+2x+1)$ וציין ש- $(x-1)^2 \geqslant 0$ עבור כל x ממשי. וגם $3x^2+2x+1 > 0$ עבור כל x ממשי ומכאן ש- $3x^4-4x^3+1 \geqslant 0$ עבור כל x ממשי.

<u>פתרון הבעיות מגליון מס' 5</u>

25. מצא את כל הפתרונות הממשיים של המשואה

$$\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} = \frac{1}{2}(x+y+z).$$

<u>פתרון</u>: נכתוב $x = \alpha^2$, $y-1 = \beta^2$, $z-2 = \gamma^2$ ונקבל

$$\alpha+\beta+\gamma = \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3)$$

ומכאן $$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2+(\gamma-1)^2 = 0$$

ולכן $$\alpha = \beta = \gamma = 1$$

$$(x,y,z) = (1,2,3)$$

26. חשב את הסכום

$$\sum_{r=1}^{n} r \cos[\alpha+(r-1)\beta]$$

<u>פתרון</u>: עבור z מרוכב כלשהו נגדיר

$$S_n(z) = 1+2z+3z^2+ \dots + nz^{n-1}$$

ואז יהיה

$$z\,S_n(z) = z+2z^2+ \dots + (n-1)z^{n-1}+nz^n$$

ויוצא כי

$$(1-z)S_n(z) = 1+z+z^2+ \dots + z^{n-1}-nz^n$$

$$= \frac{1-z^n}{1-z} - nz^n$$

$$S_n(z) = \frac{1-(n+1)z^n+nz^{n+1}}{(1-z)^2}$$

עכשיו מקבלים

$$\sum_{r=1}^{n} r \cos[\alpha+(r-1)\beta] = \mathrm{Re} \sum_{r=1}^{n} r\, e^{i[\alpha+(r-1)\beta]}$$

$$= \mathrm{Re}\, \{e^{i\alpha} \cdot \sum_{r=1}^{n} r\, e^{i(r-1)\beta}\}$$

$$= \mathrm{Re}\, \{e^{i\alpha} S_n(e^{i\beta})\}$$

$$= \mathrm{Re} \left\{ e^{i\alpha} \cdot \frac{1-(n+1)e^{in\beta}+ne^{i(n+1)\beta}}{(1-e^{i\beta})^2} \right\}$$

$$= \mathrm{Re} \left\{ \frac{e^{i\alpha} \cdot (1-e^{-i\beta})^2 \cdot [1-(n+1)e^{in\beta}+ne^{i(n+1)\beta}]}{(1-e^{i\beta})^2 (1-e^{-i\beta})^2} \right\}$$

אבל

$$(1-e^{i\beta}) \cdot (1-e^{-i\beta}) = 2(1-\cos\beta) = 4 \sin^2 \beta/2$$

ולכן

$$\sum_{r=1}^{n} r \cos[\alpha+(r-1)\beta]$$

$$= \frac{1}{16\sin^4 \beta/2} \cdot \mathrm{Re} \left\{ e^{i\alpha}(1-2e^{-i\beta}+e^{-2i\beta})[1-(n+1)e^{in\beta}+ne^{i(n+1)\beta}] \right\}$$

$$= \frac{1}{16\sin^4 \beta/2} \; \mathrm{Re} \left\{ e^{i\alpha}[1-2e^{-i\beta}+e^{-2i\beta}-(n+1)e^{i(n-2)\beta}+(3n+2)e^{i(n-1)\beta} -(3n+1)e^{in\beta}+ne^{i(n+1)\beta} \right\}$$

$$= \frac{1}{16\sin^4 \beta/2} \left\{ \cos\alpha-2\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-2\beta)-(n+1)\cos[\alpha+(n-2)\beta]+ +(3n+2)\cos[\alpha+(n-1)\beta]-(3n+1)[\cos(\alpha+n\beta)] + n\cos[\alpha+(n+1)\beta] \right\}$$

27. חשב את הסכום

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{2^{2n-r}} \binom{2n-r}{n}$$

<u>פתרון:</u>

$\frac{1}{2^{2n-r}}\binom{2n-r}{n}$ הוא המקדם של x^n בפתוח של הבינום

$\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2n-r}$ ולכן

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{2^{2n-r}} \binom{2n-r}{n}$$

הוא המקדם של x^n ב- $\sum_{r=0}^{n}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2n-r}$, וזה שווה למקדם של x^n בסכום $\sum_{r=0}^{2n}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2n-r}$, מאחר שבחלק $\sum_{r=n+1}^{2n}$ אין האיבר x^n מופיע בכלל (למה ?). אם נכתוב $s=2n-r$, נראה כי יש לבדוק את

$$F_n = \sum_{s=0}^{2n} \left(\frac{1+x}{2}\right)^s$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2n+1}}{1-\frac{1+x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2^{2n+1}-(1+x)^{2n+1}}{1-x}$$

$$= \frac{2}{1-x} - \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(1+x)^{2n+1}}{1-x}$$

$$= 2\cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{r=0}^{2n+1} C_{2n+1}^r \; x^r \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

ברור כי המקדם של x^n בחלק $2\cdot\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ הוא 2. המקדם של x^n בפונקציה

$$\sum_{r=0}^{2n+1} C_{2n+1}^r \; x^r \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

$$= \sum_{r=0}^{n} C_{2n+1}^r$$

וקל להוכיח כי הסכום הזה הוא 2^n. יוצא כי

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{2^{2n-r}} \binom{2n-r}{n} = 2 - \frac{1}{2^n} \cdot 2^n = 1$$

<u>פתרון שני</u>

אפשר לפתור את הבעיה בדרך שהיא שונה מאד מהפתרון לעיל. נניח שמישהו מתחיל את יומו כאשר ברשותו שתי קופסות גפרורים, עם n גפרורים בכל קופסה. כאשר דרוש לו גפרור הוא בוחר באקראי באחת הקופסות ומוציא ממנה גפרור. הוא ממשיך בדרך זו עד לרגע שהקופסה שהוא בוחר בה מתגלית כריקה. מה ההסתברות שברגע ההוא מספר הגפרורים בקופסה השניה יהיה r ? ניתן לקופסות שמות א' ו- ב'. ההסתברות שבחר ב- א' ומצאה ריקה כאשר מספר הגפרורים בקופסה ב' היה r הוא בעצם ההסתברות ש-

1) הוא בחר בקופסה א'

וגם 2) מתוך 2n-r הגפרורים שניצל עד אז היו n בקופסה א'

בהסתמך על משפט ברנולי אנו רואים כי ההסתברות הזאת היא

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{2n-r}} \binom{2n-r}{n}$$

ברור כי זו גם ההסתברות שיבחר בקופסה ב' וימצאיה ריקה כך שההסתברות המבוקשת היא

$$2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{2n-r}} \binom{2n-r}{n}$$

דהיינו $\frac{1}{2^{2n-r}} \binom{2n-r}{n}$. אבל בדיוק אחד מהערכים של r בין 0 ל- n חייב לקרות ולכן הסכום המבוקש הוא 1.

28. נתונים מספר טבעי n ומספרים ממשים $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ המקיימים

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \dots\dots \leqslant x_n .$$

אם $s = \sum_{r=1}^{n} x_r$, הוכח כי

$$(s-x_1)^{x_1}(s-x_2)^{x_2} \dots (s-x_n)^{x_n} \leqslant \left[\frac{s(n-1)}{n}^{s} \right]$$

<u>פתרון:</u> ממשפט הממוצעים נובע כי

$$(s-x_1)^{x_1}(s-x_2)^{x_2} \dots (s-x_n)^{x_n} \leqslant \left\{\frac{1}{\Sigma x_n} \sum_{k=1}^{n} x_k(s-x_k)\right\}^{\Sigma x_k}$$

$$= \left\{\frac{1}{s}\left[s \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right]\right\}^{s}$$

$$= \left\{\frac{s^2-\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{s}\right\}^{s}$$

אבל מאי-שוויון קושי (Cauchy) נובע כי

$$s^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} 1.x_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} 1. \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

ולכן

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant s^2/n .$$

יוצא כי

$$\left\{\frac{s^2-\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{s}\right\}^s \leq \left\{\frac{s^2-s^2/n}{s}\right\}^s$$

$$= \left\{\frac{s(n-1)}{n}\right\}^s$$

29. הוכח כי עבור זויות α,β,γ כלשהן קיים

$$\sin^3\alpha\ \sin^3(\beta-\gamma)+\sin^3\beta\ \sin^3(\gamma-\alpha)+\sin^3\gamma\ \sin^3(\alpha-\beta)$$

$$= 3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)$$

<u>הפתרון</u>: עבור כל x,y,z קיים

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$$

ולכן $x+y+z = 0$ גורר כי

$$x^3+y^3+z^3 = 3xyz$$

למטרתנו יספיק איפוא אם נוכיח כי

$$S = \sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha) + \sin\gamma\ \sin(\alpha-\beta) = 0$$

אבל

$$S = \frac{1}{2}\Big\{\cos(\alpha-\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta-\gamma+\alpha)-\cos(\beta+\gamma-\alpha)$$

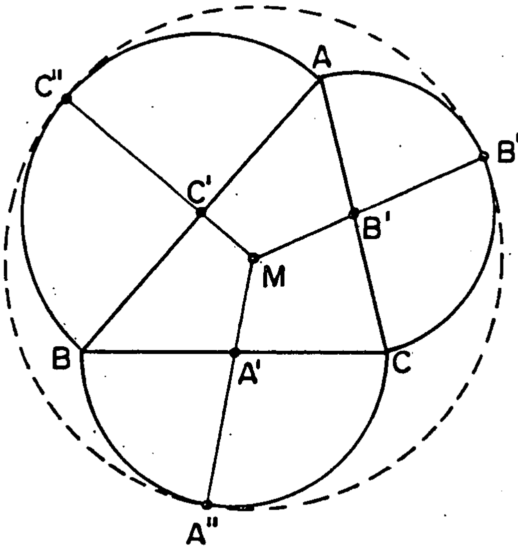
$$+ \cos(\alpha-\beta-\gamma)-\cos(\gamma-\beta+\gamma)\Big\}$$

ומכאן ברור כי $S = 0$.

30. אורכי הצלעות BC,CA,AB של המשולש ABC הם a,b,c בהתאמה. C_1,C_2,C_3 הם מעגלים על הקוטרים BC,CA,AB בהתאמה ו- D הוא הקוטר של מעגל המשיק ל- C_1,C_2,C_3 כך שאלה נמצאים בפנים לו. אם $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, הוכח כי

$$\sqrt{\frac{p}{D-p}} = \sqrt{\frac{D}{p-a}-1} + \sqrt{\frac{D}{p-b}-1} + \sqrt{\frac{D}{p-c}-1}$$

<u>פתרון</u>: יהיו A',B',C' האמצעים של BC,CA,AB בהתאמה, M מרכז המעגל המשיק למעגלים C_1,C_2,C_3 ו- A",B",C" נקודות המגע של המעגל M במעגלים C_1,C_2,C_3 בהתאמה. ברור כי המשיק המשותף ל- M ו- C_3 בנקודה "C ניצב גם ל- "MC וגם ל- "C'C ומכאן ש- "MC'C הוא קו ישר. מזה מובע כי



$$MC' = (MC"-C'C") = \frac{D-c}{2}$$

וכמו כן $MA' = \frac{1}{2}(D-a)$, $MB' = \frac{1}{2}(D-b)$.

עכשיו נסתכל במרובע BA'MC' , הוא מורכב למעשה משני המולשים BA'C' ו- MA'C'. ברור כי השטח של BA'C' הוא S 1/4 כאשר S הוא השטח של ABC (למה ?). כדי לחשב את השטח של MA'C' נזכור כי $A'C' = \frac{1}{2}b$, $MA' = \frac{1}{2}(D-a)$ $MC' = \frac{1}{2}(D-c)$.

אם נכתוב

$$P = \frac{1}{2}\ (MA'+MC'+A'C')$$

נקבל

$$P = \frac{1}{4}\ \{(D-a)+(D-c)\ +\ b\}$$

$$= \frac{1}{4}\ \{2D-2\,(p-b)\}$$

$$= \frac{1}{2}\ (D-p+b)$$

מאידך

$$(P-MA') = \frac{1}{2}\ (D-p+b)\ -\ \frac{1}{2}\ (D-a)$$

$$= \frac{1}{2}\ (a+b-p)$$

$$= \frac{1}{2}\ (2p-c-p)$$

$$= \frac{1}{2}\ (p-c)$$

כמו כן

$$(P-MC') = \frac{1}{2}\ (D-p+b)\ -\ \frac{1}{2}\ (D-c)$$

$$= \frac{1}{2}\ (b+c-p)$$

$$= \frac{1}{2}\ (p-a)$$

בעוד

$$(P-A'C') = \frac{1}{2}\ (D-p+b)\ -\ \frac{1}{2}\ b$$

$$= \frac{1}{2}\ (D-p)$$

מנוסחת הירון נובע ש-

$$S_{MA'C'} = \frac{1}{4}\sqrt{(D-p)(D-p+b)(p-a)(p-c)}$$

$$= \frac{1}{4} S \sqrt{\frac{(D-p)(D-p+b)}{p(p-b)}}$$

יוצא איפוא ש-

$$S_{MA'BC'} = \frac{1}{4} S \left\{ 1 + \sqrt{\frac{(D-p)(D-p+b)}{p(p-b)}} \right\}$$

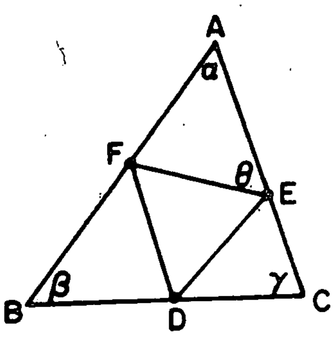
נוסחאות דומות מתקבלות עבור $S_{MAB'C'}$ ו- $S_{MA'B'C}$. אבל סכום כל השלושה הוא S ולכן

$$S = \frac{3}{4} S + \frac{1}{4} S \sqrt{\frac{D-p}{p}} \left\{ \sqrt{\frac{D-p+b}{p-b}} + \sqrt{\frac{D-p+a}{p-a}} + \sqrt{\frac{D-p+c}{p-c}} \right\}$$

דהיינו

$$\sqrt{\frac{p}{D-p}} = \sqrt{\frac{D}{p-a} - 1} + \sqrt{\frac{D}{p-b} - 1} + \sqrt{\frac{D}{p-c} - 1}$$

.31 נתון משולש ABC, אשר אורכי צלעותיו הם a,b,c ושטחו S, ובונים משולש שווה צלעות אשר שלושת קדקודיו נמצאים על שלוש צלעות ABC. אם x הוא אורכה של כל צלע במשולש שווה הצלעות הוכח כי



$$x \geqslant 2\sqrt{2}\, S\left(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\, S\right)^{-\frac{1}{2}}$$

<u>פתרון</u>:

יהיו D על BC, E על AC, F

על AB קודקדי המשולש החסום;

יהיו α,β,γ הזויות A,B,C

בהתאמה ונגדיר $\sphericalangle AEF = \theta$ (ראה ציור).

מאחר ש- $\sphericalangle EDF = \sphericalangle EFD = \sphericalangle DEF = {}^{\pi}/3$

אנחנו מסיקים מיד כי

$$\sphericalangle DEC = \frac{2\pi}{3} - \theta$$

$$\sphericalangle EDC = \frac{\pi}{3} + \theta - \gamma$$

$$\sphericalangle BDF = \frac{\pi}{3} + \gamma - \theta$$

$$\sphericalangle DFB = \alpha + \theta - {}^{\pi}/3$$

נכתוב $DE = x$.

ממשפט הסינוסים נובע כי

$$\frac{BD}{x} = \frac{\sin(\alpha+\theta-{}^{\pi}/3)}{\sin\beta}$$

בעוד

$$\frac{CD}{x} = \frac{\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)}{\sin\gamma}$$

ולכן

$$\frac{a}{x} = \frac{BD+CD}{x} = \frac{\sin(\alpha+\theta-\frac{\pi}{3})}{\sin\beta} + \frac{\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)}{\sin\gamma}$$

הערך של θ שיביא לערך קיצוני עבור $\frac{a}{x}$ יתקבל כאשר

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{a}{x}\right) = 0$$

דהיינו

$$0 = \frac{\cos(\alpha+\theta-\frac{\pi}{3})}{\sin\beta} - \frac{\cos(\frac{2\pi}{3}-\theta)}{\sin\gamma}$$

ואז יהיה

$$\frac{a^2}{x^2} = \frac{a^2}{x^2} + \left\{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\bar{a}}{x}\right)\right\}^2$$

$$= \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} - \frac{2\{\cos(\alpha+\theta-\frac{\pi}{3})\cos(\frac{2\pi}{3}-\theta)-\sin(\alpha+\theta-\frac{\pi}{3})\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)\}}{\sin\beta\ \sin\gamma}$$

$$= \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} - \frac{2\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})}{\sin\beta\ \sin\gamma}$$

וקל לאשר כי זה קובע מכסימום של $\frac{a^2}{x^2}$. מכאן נובע כי

$$\frac{a^2}{x^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} = \frac{2\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})}{\sin\beta\ \sin\gamma}$$

אבל

$$S = \frac{1}{2}bc\ \sin\alpha = \frac{1}{2}ca\ \sin\beta = \frac{1}{2}ab\ \sin\gamma$$

ולכן

$$\frac{a^2}{x^2} \leqslant \frac{c^2a^2}{4s^2} + \frac{a^2b^2}{4s^2} - \frac{\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha}{\sin\beta\ \sin\gamma}$$

$$= \frac{a^2}{4s^2}(b^2+c^2) - \frac{a^2bc}{4s^2}\left\{-\frac{\sqrt{3}\cdot 2s}{bc} + \frac{b^2+c^2a^2}{2bc}\right\}$$

(כאן הסתמכנו על משפט הקוסינוסים).

יוצא כי

$$\frac{a^2}{x^2} \leqslant \frac{a^2}{8s^2}\left\{2(b^2+c^2)-(b^2+c^2-a^2)+4\sqrt{3}s\right\}$$

כלומר

$$x \geqslant 2\sqrt{2}s\ \{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}s\}^{-1/2}$$

.32 במישור נתונים ארבעה ישרים l_1, l_2, l_3, l_4 . הראה איך לבנות ישר l במישור כך שלושת הקטעים שיוקצו עליו ע"י פגישותיו עם l_1, l_2, l_3, l_4 יהיו ביחסים נתונים.

<u>פתרון</u>: אנו מתנצלים בפני קוראינו כי קל לראות שבדרך כלל <u>אין</u> פתרון. הרי במקרה שכל ארבעת הישרים הנתונים עוברים דרך נקודה אחת יהיה <u>היחס הכפול</u> של ארבע נקודות הפגישה ביניהם לבין הישר קבוע מראש ודבר זה יהיה אפשרי רק במקרה הפרטי שהיחסים הנתונים מתאימים ליחס כפול זה.

.33 n הוא מספר טבעי נתון ואנחנו מגדירים:

(i) $x_1 = n, \quad y_1 = 1$

(ii) עבור כל $i \geqslant 0$

$$x_{i+1} = \left[\frac{x_i+y_i}{1}\right] \quad , \quad y_{i+1} = \left[\frac{n}{x_i}\right]$$

כאשר, לכל x, $[x]$ מציין כרגיל את המספר השלם הגדול ביותר שאינו גדול מ-x. הוכח כי עבור $i = 1,2,\dots,n$ קיים $x_i \geqslant [n]$ וכי יש לפחות ערך אחד של i בתחום זה אשר $x_i = [\sqrt{n}]$.

<u>פתרון</u>: רואים כי $x_1 \geqslant [\sqrt{n}]$ וגם $x_2 = [\frac{n+1}{a}] \geqslant [\sqrt{n}]$ (למה?)

נניח כי קיים מספר טבעי m כך שעבור איזה $i \geqslant 2$

$$x_i = [\sqrt{n}] + m$$

נוכיח כי במקרה זה $[\sqrt{n}] \leqslant x_{i+1} < x_i$.   (*)

כי אז

$$\frac{n}{x_i} = \frac{n}{[\sqrt{n}] + m} < \sqrt{n}$$

ולכן

$$y_i = [\frac{n}{x_i}] < \sqrt{n} < x_i$$

ומכאן ש-

$$x_{i+1} = [\frac{x_i + y_i}{2}] < x_i$$

מאידך

$$\sqrt{n} - \frac{n}{x_i} = \frac{\sqrt{n}([\sqrt{n}]+m) - n}{[\sqrt{n}]+m}$$

$$= \frac{m\sqrt{n}}{[\sqrt{n}]+m} < m$$

ולכן

$$[\sqrt{n}] - [\frac{n}{x_i}] < \sqrt{n} - \frac{n}{x_i} + 1$$

$$< m + 1$$

ומכאן ש-

$$[\sqrt{n}] - y_i \leq m$$

ולכן

$$x_{i+1} = [\frac{x_i+y_i}{2}] \geq [\frac{(\sqrt{n}+m)+(\sqrt{n}-m)}{2}] = [\sqrt{n}]$$

ובזה הוכחנו את אי-השוויון (*) וממנו נובע כי כל עוד $x_i > [\sqrt{n}]$ יהיה $x_{x+1} \leq x_i-1$ ולכן, אחרי מספר סופי של צעדים נגיע בהכרח לערך של i אשר עבורו

$$x_i = [\sqrt{n}]$$

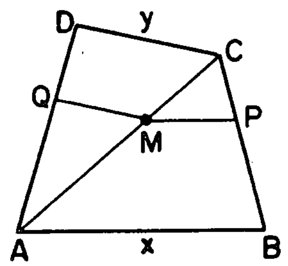
אבל כאשר $x_i = [\sqrt{n}]$ יהיה גם $y_i \geq [\sqrt{n}]$ ולכן

$$y_{i+]} \geq [\sqrt{n}]$$

ולכן, עבור כל $k \geq i$ יהיה $x_k = [\sqrt{n}]$.

.34 M היא נקודה כלשהי על האלכסון AC של מרובע קמור $ABCD$. P,Q הן נקודות על הצלעות BC,AD בהתאמה כך ש- MP מקביל ל-AB ו- MQ ל- CD. הוכח כי

$$MP^2 + MQ^2 \geq \frac{AB^2 \cdot CD^2}{AB^2+CD^2}$$



פתרון: יהיה $AB=x$, $CD = y$

$$\frac{AM}{MC} = t$$

אזי יהיה $$MP = \frac{x}{t+1}$$

$$M\alpha = \frac{ty}{t+1}$$

ולכן

$$MP^2+MQ^2 - \frac{AB^2 \cdot CD^2}{AB^2+CD^2}$$

$$= \frac{x^2+t^2y^2}{(t+1)^2} - \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{1}{(t+1)^2(x^2+y^2)} \left\{ t^2y^4-2tx^2y^2+x^4 \right\}$$

$$= \frac{(t^2y^2-x^2)^2}{(t+1)^2(x^2+y^2)} \geqslant 0$$

*   *   *   *

פתרון החידה מעמוד 3

אילו היו גם ב' וגם ג' שניהם חובשים כובעים אדומים הרי אז היה א' יודע להסיק כי כובעו שלו שחור. לכן מעצם אי יכולתו של א' להשיב יכול ב' להסיק כי או הוא או ג' (או שניהם) חובשים שחור.

מאידך, אילו היה כובע אדום על ראשו של ג' היה ב' יכול להסיק כי כובעו הוא שחור. אבל למעשה גם ב' נכנע ומכאן הסיק ג' שעל ראשו כובע שחור.

בעיות חדשות

40. a,b,c הם ארכי הצלעות של משולש, R הוא הרדיוס של המעגל החוסם את המשולש ו- r הרדיוס של המעגל החסום בו. הוכח כי

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \geqslant \frac{3}{2Rr}$$

באיזו תנאים יתקיים שיוון ?

41. כל שלושת הקדקדים של משולש מסוים הם נקודות סריג, דהינו שכל ששת שיעוריהם הם מספרים שלמים. אם a,b,c הם אורכי הצלעות ו- R הרדיוס של המעגל החוסם את המשולש, הוכח כי

$$abc \geqslant 2R \ .$$

(ג ז ו ר   כ א ן)

לכבוד
מערכת "אתגר-גליונות מתמטיקה"
לידי מר אפרים בנהר
היחידה לפעולות נוער
מכון וייצמן למדע
רחובות 76100

.... (תאריך)

א.נ.,
מצורפת בזה המחאה מספר .... משוכה על בנק ....
סניף ...., על סך -.6 ש"ח, בעבור חידוש המנוי על "אתגר-גליונות מתמטיקה לשנת תשמ"ז.

השם: .... הכתבת: ....
מיקוד: ...., טלפון: ....
ביה"ס: ....(או צה"ל) .....
כתה: .... ד.צ.: ....

.... (חתימה)

42. עבור x כלשהו מגדירים

$$\alpha = x^5 \quad , \quad \beta = x^6 \quad , \quad \gamma = x+x^7$$

מצא פולינום $P(\alpha,\beta,\gamma)$ בשלושת המשתנים α,β,γ המקיים

$$P(\alpha,\beta,\gamma) \equiv x \ .$$

43. רוצים ליצור 200 קבוצות לא ריקות $\{B_1,B_2,\ldots\ldots,B_{200}\}$ כך ש-

א) איברי הקבוצות האלה הם מספרים שלמים מ- 0 עד 9,

ב) עבור כל $1 \leq i < j \leq 200$, מספר האיברים בחיתוך $B_i \cap B_j$ לא יהיה גדול מ-2.

האם הדבר יתכן ? נמק.

44. E הוא האמצע של מיתר AB של מעגל ; C,D הן נקודות על AB כך ש- $AC=CD=DB$, P היא נקודה כלשהי על המעגל והישרים PC,PE,PD פוגשים את המעגל שנית ב- H,L,K בהתאמה. הוכח כי

$$32\left(\frac{1}{CH^2}+\frac{1}{DK^2}\right)-\frac{81}{EL^2}=\frac{4}{CD^2}$$

45. אם $x_1,x_2,\ldots\ldots,x_m$ הם מספרים כלשהם, הוכח כי

$$\sum_{k=1}^{m} x_k \left\{ 1 - \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m} \left(1 + \frac{1}{x_j-x_k} \right)\right\} = \frac{1}{2}\, m(m-1) \ .$$

יוצא לאור על ידי הפקולטה לפיסיקה והיחידה לפעולות נוער
במדרשת פיינברג, מכון ויצמן למדע, רחובות