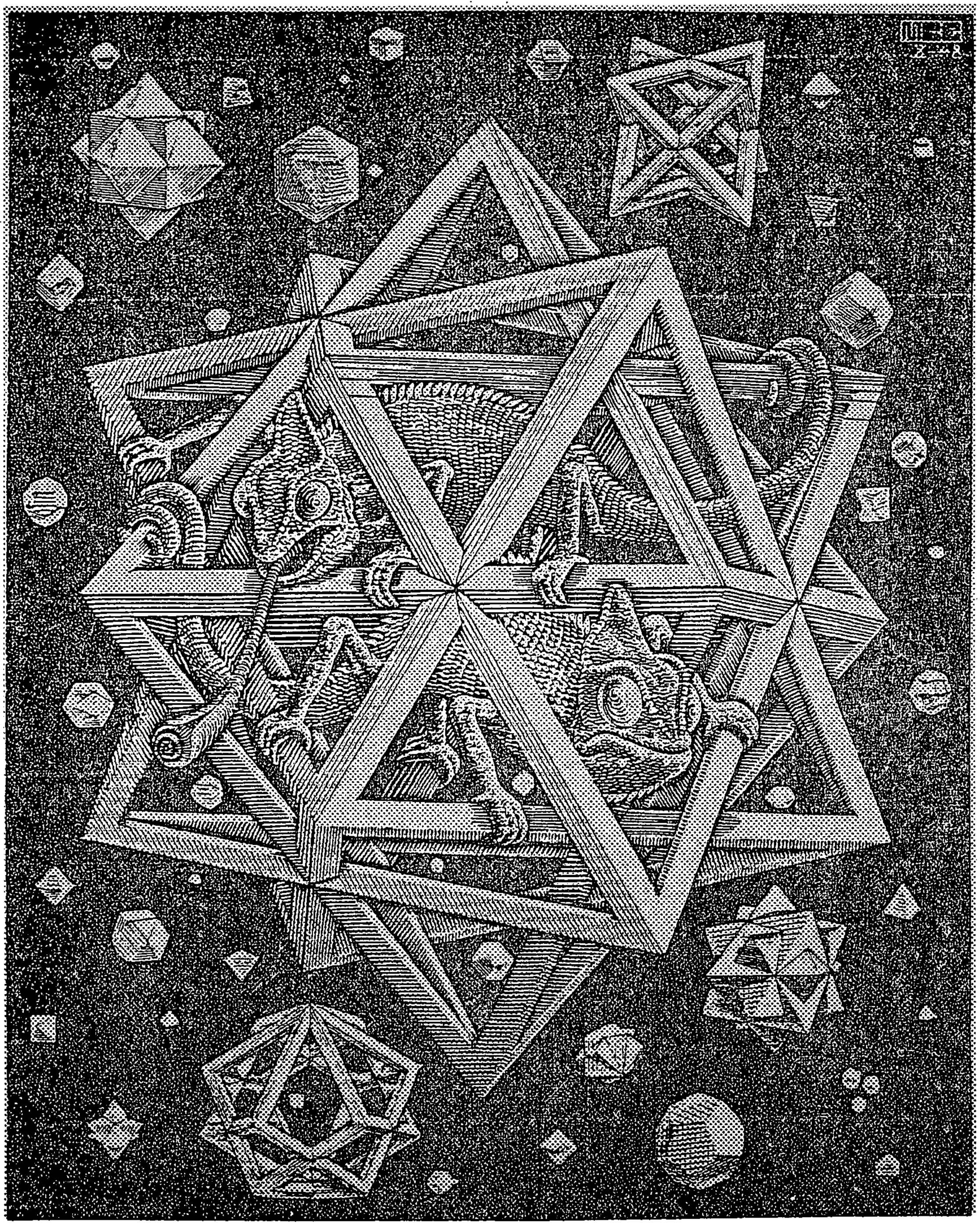
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס' 25

שבט תשנ"ג – פברואר 1993



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון ויצמן למדע
רחובות

תוכן העניינים

אתגר - גליונות מתמטיקה ISBN = 0334-201

מוצא לאור ע"י הפקולטות למתמטיקה במכון ויצמן ובטכניון.

מען המערכת: היחידה לפעולות נוער, מכון ויצמן למדע רחובות 76100 טל-08-342970.

דבר המערכת

אנו מצטערים על האיחור בהוצאת גליון זה, והוא בגלל קשיים טכניים שהתעוררו עם העברת עריכת העתון מהטכניון למכון ויצמן. נעשה מאמץ מיוחד להדביק את הפיגור במשך השנה.

בהזדמנות זו אנו מפנים את תשומת לבכם לאולימפיאדה הישראלית לנוער במתמטיקה שתתקיים במכון ויצמן **ביום ג׳, 23.3.93**, בשעה 1:30 אחה״צ.

כל קוראינו מוזמנים להירשם לתחרות זו. עבור פרטים נוספים, טופסי רישום וכו׳, יש לפנות ליחידה לפעולות נוער נוער מכון ויצמן למדע, רחובות.

פרופסור עזריאל אביתר ז"ל

לאחרונה הלך לעולמו פרופסור ע. אביתר, מתמטיקאי בעל שעור קומה, אשר בנוסף למחקריו המתימטיים היה גם חוקר של הוראת המתמטיקה.

פרופסור אביתר עסק שנים רבות בגילוי תלמידים מחוננים ובפיתוח חשיבתם המתמטית.

בעיניו מתמטיקה היתה אומנות ואמנות ולהערכתו אפשר לפתח את חוקרי העתיד על ידי הרחבת מאגר הידע, פיתוח היצירתיות והקניית מיומנויות מחקר.

פרופסור אביתר כתב ספרי לימוד רבים בהם הדגיש את הצורך בחקירות עצמיות של התלמידים.

בספריו התרגול היה משולב עם נושאים ממדעים שונים, שלהם המתמטיקה היתה שפה.

יהיה זכרו ברוך.

מקרה פרטי של משפט דירישלה (Dirichlet)

גיל אלון (ירושלים)

אם a ו-d הם מספרים טבעיים זרים, אז הסדרה החשבונית $\{a+nd\}_{n=0}^{\infty}$ מכילה קבוצה אינסופית של מספרים ראשוניים.

הוכחה למשפט מפורסם זה ניתנה לראשונה ע"י המתמטיקאי דיריכלה (Dirichlet ,1805-1859). ההוכחה הינה סבוכה ביותר ומשתרעת על פני עמודים רבים, אך, גרוע מכך - עושה שימוש במושגים שאינם שייכים לתורת המספרים האלמנטרית.

הוכחה "אלמנטרית" לחלוטין לא נמצאה עד כה למשפט, אולם מעניין לראות שבמקרים פרטיים מסויימים (לאמור: ערכים ספציפיים של a ו-d) אפשר לתת הוכחה אלמנטרית.

במאמר זה תוצג הוכחה לשורת המקרים הפרטיים הבאה: d הוא מספר ראשוני (נקרא לו מעתה q), ו-$a = 1$. במקרה זה, נוח יותר לכתוב את המשפט כך:

יהי q מספר ראשוני, אזי יש אינסוף מספרים ראשוניים p המקיימים $p \equiv 1 \pmod q$.

נתחיל בלמה (משפט עזר) מוכרת מתורת המספרים:

למה 1: יהיו a,r מספרים טבעיים זרים, ויהי m המספר הטבעי המינימלי המקיים $a^m \equiv 1 \pmod r$. אזי כל מספר טבעי n, אשר עבורו $a^n \equiv 1 \pmod r$, מתחלק ב-m.

הוכחה: ראשית, נעיר שאם a ו- r זרים אכן קיים מספר טבעי S אשר עבורו $a^S \equiv 1 \pmod r$, (וזאת לפי משפט אוילר, הגורס ש- $a^{\phi(r)} \equiv 1 \pmod r$, כאשר $\phi(r)$ הוא מספר השאריות מודולו r הזרות ל-r) - ולכן m מוגדר היטב.

נבצע חלוקה (עם שארית) של n ב-m: $n = mx + y$, $0 \le y < m$. כעת,

$$1 \equiv a^n = a^{mx+y} = (a^m)^x \cdot a^y \equiv$$
$$\equiv 1^x \cdot a^y = a^y (\bmod r)$$

כלומר, y מספר שלם בין 0 ל- $(m-1)$ המקיים $a^y \equiv 1 \ (\bmod r)$. אם y>0, זה עומד בסתירה להגדרת m טבעי המינימלי המקיים זאת. לכן בהכרח $y = 0$, כלומר $m \mid n$.

מ.ש.ל.

למה 2: יהיו p,q ראשוניים ו-a מספר טבעי כך ש- $p \mid (a^q - 1)$ אך $p \nmid (a-1)$, אזי, $p \equiv 1 \ (\bmod q)$.

הוכחה: מהנתונים נובע ש-a ו-p זרים (אחרת, לא יכול היה להתקיים $p \mid (a^q - 1)$).
יהי m המספר הטבעי המינימלי המקיים $a^m \equiv 1 \ (\bmod p)$. נתון ש- $a^q \equiv 1 \ (\bmod p)$, ולכן מלמה 1 נובע ש- $m \mid q$. q ראשוני, ולכן יש שתי אפשרויות: $m = q$ או $m = 1$. האפשרות $m = 1$ נפסלת, כי נתון ש- $a \not\equiv 1 \ (\bmod p)$. לכן, $m = q$.

נשים לב כי $a,\ p$ מקיימים את תנאיי משפט Fermat הקטן: $a,\ p$ זרים ו-p ראשוני. לכן, $a^{p-1} \equiv 1 \ (\bmod p)$. נשתמש שוב בלמה 1 ונקבל: $m \mid (p-1)$. אבל $m = q$ ולכן $q \mid (p-1)$.

מ.ש.ל.

למה 3: אם a,q מספרים טבעיים כך ש-q ראשוני ו-$q \nmid (a-1)$, אז קיים p ראשוני כך ש- $p \mid (a^q - 1)$ ו- $p \nmid (a-1)$.

הוכחה: כידוע, $(a-1) \mid (a^q - 1)$. לכן מספיק להוכיח שיש גורם ראשוני של $\frac{a^q - 1}{a-1}$ שאינו גורם ראשוני של $a-1$. למעשה נוכיח כי $\frac{a^q - 1}{a-1}$ ו-$a-1$ זרים.

לשם כך, נחשב את $\frac{a^q-1}{a-1}$ מודולו $(a-1)$:

$$\frac{a^q-1}{a-1}=\sum_{i=0}^{q-1}a^i\equiv\sum_{i=0}^{q-1}1^i\equiv q\ (\mathrm{mod}\, a-1)$$

כלומר, קיים x שלם כך ש- $\frac{a^q-1}{a-1}=(a-1)x+q$

כעת, אם ל- $\frac{a^q-1}{a-1}$ ול-$a-1$ היה גורם משותף, $d>1$, אז מהמשוואה האחרונה היה נובע ש-$d \mid q$. אבל q ראשוני, ולכן $d=q$, ומכאן $q \mid (a-1)$ - בסתירה לנתון.

מ.ש.ל.

למה 2 ולמה 3 נותנות לנו דרך לבנות, עבור q ראשוני נתון, מספרים ראשוניים p המקיימים $p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, q)$. כל מה שעלינו לעשות זה לבחור a טבעי כך ש- $q \nmid (a-1)$. **מלמה 3**, מובטח לנו שאם נסתכל על הגורמים הראשוניים של a^q-1, נמצא ביניהם לפחות p אחד שאינו מחלק את $a-1$. **ומלמה 2**, מובטח לנו ש-p זה יקיים $p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, q)$. מה שלא מובטח לנו עדיין, הוא שבעזרת בחירות של a-ים שונים נצליח לקבל רשימה אינסופית של p-ים כנ"ל. לשם כך נדרש צעד נוסף:

הוכחת המשפט: נבנה בצורה אינדוקטיבית סידרה אינסופית $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$, של מספרים ראשוניים שונים המקיימים $p_i\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, q)$ לכל i.

ראשית, עבור i=0, נבחר למשל את p_0 מבין המחלקים הראשוניים של 2^q-1. תנאיי **למה 2** מתקיימים (עם $a=2$), ולכן $p_0\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, q)$.

כעת, באינדוקציה, נניח שכבר מצאנו n ראשוניים שונים $p_0,\dots,p_{n-1}$ המקיימים $p_i\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, q)$, $0\le i\le n-1$, ונמצא p_n ראשוני שונה מ- $p_0,\dots,p_{n-1}$ המקיים $p_n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, q)$.

ניקח $a = p_0 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} + 1$. $a \equiv 2 \pmod{q}$, לכן $q \mid (a-1)$.

כלומר, מתקיימים תנאיי למה 3, ולכן קיים ראשוני [אותו נסמן ב- p_n], עבורו מתקיים $p_n \mid (a^q - 1)$ אך $p_n \nmid (a-1)$.

לפי למה 2, $p_n \equiv 1 \pmod{q}$. מאידך, התנאי ש- $p_n \nmid (a-1)$ אומר בדיוק ש- $p_n \neq p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$.

מ.ש.ל.

המחשה גרפית חלקית של השורשים המרוכבים של פולינום

דוד רימר (רחובות)

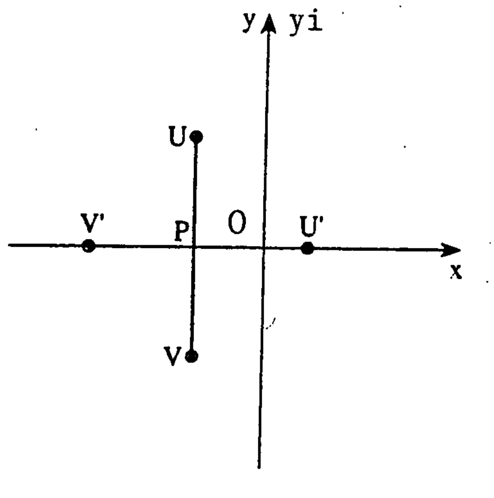
א. הקדמה

כידוע, ההצגה הגרפית של פולינום שכל שורשיו מספרים ממשיים מבליטה גם את שורשי הפולינום, דהיינו הנקודות בהן גרף הפולינום חותך את ציר ה-x. אבל דבר זה בלתי אפשרי כאשר מדובר בשורשים המרוכבים של הפולינום.

מטרת רשימה זו היא להציע שיטה שתאפשר המחשה גרפית חלקית של השורשים הללו.

ב. מהמישור הגאוסי למישור הממשי - פסאודושורשים

במישור הגאוסי מצויד במערכת צירים $Ox(yi)$ (איור 1) מסומנות הנקודות $P(a+0i),\ U(a+bi),\ V(a-bi)$. נסובב את הקטע UV ב-$(-90°)$ מסביב למרכזו P, אז נקבל את הקטע $U'V'$ על ציר ה-x. כאשר נתייחס למישור הממשי מצויד במערכת צירים Oxy שמתלכדת עם מערכת הצירים $Ox(yi)$ דלעיל, אז לנקודות U',V' השיעורים $U'(a+b,0),V'(a-b,0)$. (איור 1).



איור 1

לכן הנקודות U',V' מהוות, במישור הממשי, תמונות הנקודות U,V מהמישור הגאוסי, ע"י הסיבוב המוגדר לעיל. נסמן זאת ע"י $U'=T(U),V'=T(V)$ כאשר T מסמנת את הטרנספורמציה ע"י סיבוב זה. ברור כי ע"י סיבוב הקטע $U'V'$ מסביב למרכזו P ב-$(+90°)$, מקבלים חזרה את זוג הנקודות המקוריות U,V ז.א. $U=T^{-1}(U'),V=T^{-1}(V')$.

אם $x_1 = a+bi$ ו- $x_2 = a-bi$ הם שורשי פולינום P(x) עם מקדמים ממשיים, נסמן

$\tilde{x}_1 = a+b\ ,\tilde{x}_2 = a-b$. טבע כי כאשר נתונים $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2$ מתקבלים בקלות $a=\dfrac{\tilde{x}_1+\tilde{x}_2}{2}$

$b=\dfrac{\tilde{x}_1-\tilde{x}_2}{2}$ ולכן השורשים $x_{1,2}=a\pm bi$ הם $x_{1,2}=\dfrac{\tilde{x}_1+\tilde{x}_2}{2}\pm\dfrac{\tilde{x}_1-\tilde{x}_2}{2}i$ ז.א. כי

ניתן לעבור מ- (x_1,x_2) ל- $(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$ ולהיפך, הן בצורה אלגברית, הן בצורה גאומטרית.

בשל חשיבות עובדה זו, נגדיר את המספרים הממשיים $\tilde{x}_{1,2}=a\pm b$ **כפסאודושורשים** של הפולינום הנתון P(x).

הערה: הביטוי "פסאודו" מבליט את ההבדל המשמעותי בין $x_{1,2}$ ו- $\tilde{x}_{1,2}$. הם שייכים לשני שדות מספרים שונים: המרוכבים והממשיים, בהתאמה. לעומת זאת הביטוי "שורשים" מבליט את המשותף ביניהם: $a\pm b$.

ג. תוכניות החקירה

יהא פולינום P(x) עם מקדמים ממשיים, שיש לו גם זוגות שורשים מרוכבים צמודים $x_{1,2}=a\pm bi,\ \ x_{3,4}=c\pm di$ וכו', ויהא G הגרף שלו.

- בונים את הפולינום $\tilde{P}(x)$ ששורשיו $\tilde{x}_{1,2}=a\pm b,\ \tilde{x}_{3,4}=c\pm d$ וכו' ואת הגרף שלו $\tilde{G}$.
- מוצאים שיטה לעבור מ- P(x) ל- $\tilde{P}(x)$ ולהיפך.
- מחשבים את ערכי P(x) עבור $x=\tilde{x}_j$ ומסמנים על הגרף G של P(x) את הנקודות $M_j=\left[\tilde{x}_j,\ P(\tilde{x}_j)\right]$. **נקודות אלה ממחישות גרפית את הפסאודושורשים של** P(x).
- מוצאים עקומה y=f(x) עליה נמצאות הנקודות M_j.

ד. יישום התוכנית על פולינומים ממעלות 2,3,4.

ד-1. פולינום ממעלה 2

יהא הפולינום $P_2(x)$ ששורשיו $x_{1,2}=a\pm bi$ והפולינום $\tilde{P}_2(x)$ ששורשיו $\tilde{x}_{1,2}=a\pm b$.

$$P_2(x)=[x-(a+bi)]\,[x-(a-bi)]=x^2-2ax+(a^2+b^2)$$

$$\tilde{P}_2(x)=[x-(a+b)]\,[x-(a-b)]=x^2-2ax+(a^2-b^2)$$

הגרפים שלהם הם שתי פרבולות זהות $G, \tilde{G}$ וכל אחת מהן יכולה להתקבל מהאחרת ע"י הזזה בוקטור מקביל ל-Oy באורך $2b^2$ בגלל ש:

(1) $\quad P_2(x) = \tilde{P}_2(x) + 2b^2, \qquad$ (עבור כל $x \in R$)

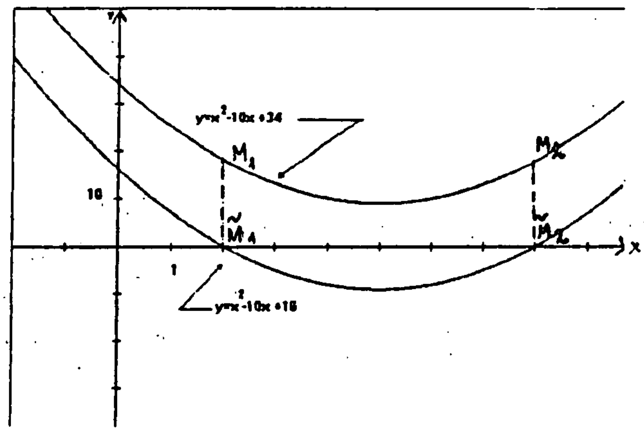
בין מקדמי P_2 ו-$\tilde{P}_2$, ההבדל היחיד הוא הסימן של b^2.

לדוגמא: יהיו

$P_2(x) = x^2 - 10x + 34$ ששורשיו $x_{1,2} = 5 \pm 3i$

$\tilde{P}_2(x) = x^2 - 10x + 16$ ששורשיו $\tilde{x}_{1,2} = 5 \pm 3$

ז.א. $\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = 8$.



איור 2

על הגרפים $\tilde{G}$, G שלהם הנקודות: $M_1(2,18), \; M_2(8,18)$; $\tilde{M}_1(2,0), \; \tilde{M}_2(8,0)$.

הנקודות $M_1, \; M_2$ נמצאות על ישר מקביל לציר ה-x.

הערה: על הקורא להיות מודע לעובדה כי כאשר לקחנו את המקדם של x^2 בדיוק 1 ולא מספר ממשי אחר כלשהו שונה מ-0, לא צמצמנו את הכלליות, כי אנו עוסקים רק בשורשים של הפולינום והם לא מושפעים ע"י המקדם של x^2.

ד-2. פולינום ממעלה 3

יהיה הפולינום $P_3(x)$ ששורשיו $x_{1,2} = a \pm bi, \; x_3 = c$ והפולינום המתאים $\tilde{P}_3(x)$ ששורשיו $\tilde{x}_{1,2} = a \pm b, \; x_3 = c$

$$P_3(x) = x^3 - (2a+c)x^2 + (a^2 + b^2 + 2ac)x - c(a^2 + b^2)$$

$$\tilde{P}_3(x) = x^3 - (2a+c)x^2 + (a^2 - b^2 + 2ac)x - c(a^2 - b^2)$$

המעבר ממקדמי $P_3(x)$ לאלה של $\tilde{P}_3(x)$ נעשה בשינוי יחידי: הסימן של b^2. בין התבניות של $P_3(x)$ ושל $\tilde{P}_3(x)$ קיימת נוסחת הקשר

$$P_3(x) = \tilde{P}_3(x) + 2b^2(x-c) \qquad (x \in R) \tag{2}$$

היא מתקבלת ישר מן החיסור $P_3(x)-\tilde{P}_3(x)$.

עבור $x = \tilde{x}_j (j = 1,2,3)$, האיבר $P_3(\tilde{x}_j)$ מתבטל, בגלל ש-$\tilde{x}_j$ מהווים שורשי $\tilde{P}_3(x)$. לכן הנוסחה (2) נותנת

$$P_3(\tilde{x}_j) = 2b^2(\tilde{x}_j - c) \tag{2'}$$

אם G ו- $\tilde{G}$ הם הגרפים של $P_3(x)$ ושל $\tilde{P}_3(x)$ בהתאמה, מציינים על $\tilde{G}_3$ את הנקודות $\tilde{M}_j(\tilde{x}_j, O),\ (j = 1,2,3)$ ועל הגרף G את הנקודות $M_j(\tilde{x}_j, P_3(x_j))$, כאשר $j = 1,2,3$

הנקודות M_j ממחישות גרפית את הפסאודושורשים של $P_3(x)$.

מן הנוסחה (2') נובע כי שלושת הנקודות M_j הינן על ישר אחד, דהיינו על

$$y = 2b^2x - 2b^2c \tag{2''}$$

הערה: את העובדה כי שלושת הנקודות M_j הינן על ישר אחד ניתן להוכיח באופנים שונים. למשל:

α) כותבים משוואת הישר העובר ב- M_1, M_2 ומאשרים כי גם M_3 נמצאת על ישר זה. כך נעשה ב-[3].

β) מחשבים את שיפועי הישרים $M_1 M_2$, $M_2 M_3$ והיות ומתקבלת, בשני המקרים, אותה תוצאה, דהיינו $2b^2$, נובע כי שלושת הנקודות על ישר אחד.

γ) מחשבים את הדטרמיננטה
$$\begin{vmatrix} \tilde{x}_1 & P_3(\tilde{x}_1) & 1 \\ \tilde{x}_2 & P_3(\tilde{x}_2) & 1 \\ \tilde{x}_3 & P_3(\tilde{x}_3) & 1 \end{vmatrix}$$

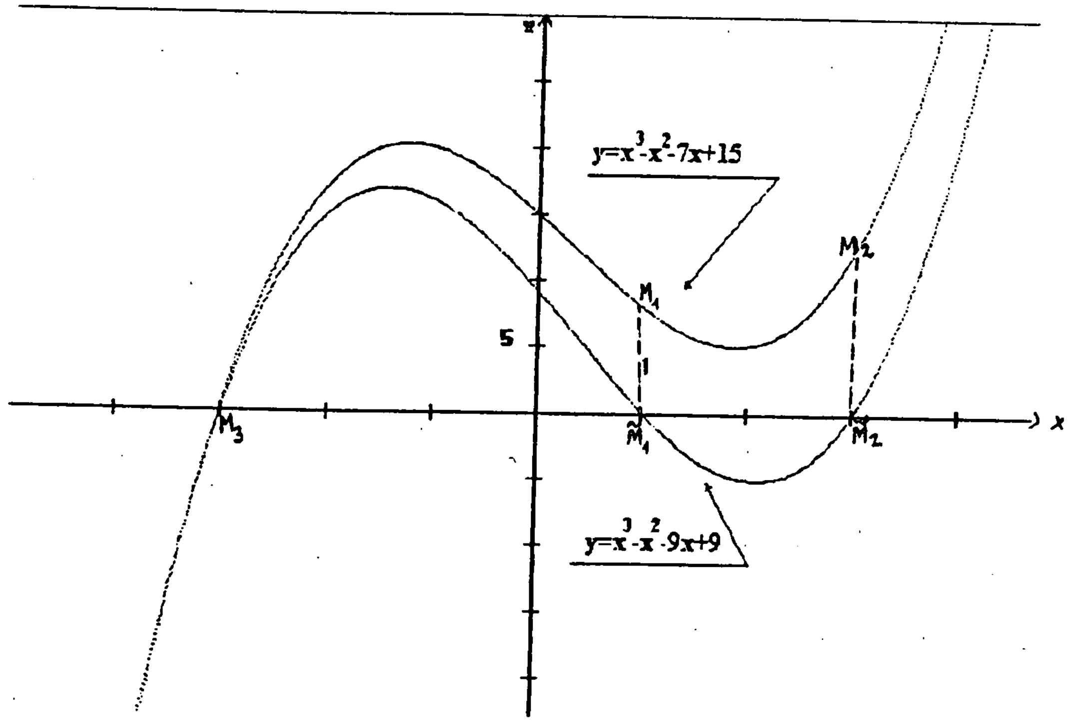
וכיוון שהדטרמיננטה שווה ל-0, נובע כי שלושת הנקודות על ישר אחד.

אנחנו מעדיפים להשתמש בנוסחה (2'') בגלל כי בנוסחאות מסוג זה נשתמש בהמשך, עבור $n > 3$.

לדוגמא: יהא

$P_3(x) = x^3 - x^2 - 7x + 15$ ששורשיו $x_{1,2} = 2 \pm i,\ x_3 = -3$

$\tilde{P}_3(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$ ששורשיו $x_1 = 2-1 = 1,\ x_2 = 2+1 = 3,\ x_3 = -3$



איור 3

באיור 3 משורטטות הקוביקות G_3 ו- $\tilde{G}_3$ והנקודות $M_1(1,12), M_2(3,12), M_3(-3,0)$ על G וכמו כן $\tilde{M}_3(-3,0)$, $\tilde{M}_1(1,0),\ \tilde{M}_2(3,0)$ על $\tilde{G}_3$. הנקודות $M_1,\ M_2,\ M_3$ מייצגות גרפית את פסאודושורשיו של P_3. קל לבדוק כי שלוש הנקודות $M_1,\ M_2,\ M_3$ הינן על ישר אחד.

ד. הפולינומים ממעלה 4

צריך להבחין בשני מקרים: פולינומים בלי אף שורש אחד ממשי, - אותם נסמן $P_{4,0}(x)$.
ופולינומים עם שני שורשים מרוכבים ושניים ממשיים - אותם נסמן $P_{4,2}(x)$.

ד-1. $P_{4,0}(x)$

יהיו $x_{1,2} = a \pm bi,\ \ x_{3,4} = c \pm di$ השורשים ו- $P_{4,0}(x) = \prod_{j=1}^{4}(x - x_j)$, ז"א

$$P_{4,0}(x) = x^4 - 2(a+c)x^3 + (a^2+b^2+c^2+d^2+4ac)x^2 - 2\left[a(c^2+d^2)+c(a^2+b^2)\right]x + (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

עבור $\tilde{x}_{1,2} = a \pm b,\ \ \tilde{x}_{3,4} = c \pm d$ מתקבל הפולינום

$$\tilde{P}_{4,0}(x) = x^4 - 2(a+c)x^3 + (a^2-b^2+c^2-d^2+4ac)x^2 - 2\left[a(c^2-d^2)+c(a^2-b^2)\right]x + (a^2-b^2)(c^2-d^2)$$

המעבר מ-$P_{4,0}(x)$ ל- $\tilde{P}_{4,0}(x)$, בנוגע למקדמים, נעשה כאשר מחליפים את סימני b^2 ו- d^2

(נזכיר כי b ו- d הם מקדמי החלק הדמיוני של $a \pm bi$ ושל $c \pm di$ בהתאמה.

בחישוב רגיל מתקבל הקשר בין תבניות $P_{4,0}(x)$ ו-$\tilde{P}_{4,0}(x)$, דהיינו

$$P_{4,0}(x) = \tilde{P}_{4,0}(x) + 2\left[(b^2+d^2)x^2 - 2(b^2c+d^2a)x + (b^2c^2+d^2a^2)\right] \qquad (3)$$

היות ו- $\tilde{P}_{4,0}(\tilde{x}_j) = 0$, מן הנוסחה (3) מתקבל

$$P_{4,0}(\tilde{x}_j) = 2\left[(b^2+d^2)\tilde{x}_j^2 - 2(b^2c+d^2a)\tilde{x}_j + (b^2c^2+d^2a^2)\right] \qquad (3')$$

ז.א. כי ארבעת הנקודות $M_j\left[\tilde{x}_j, P_{4,0}(\tilde{x}_j)\right]$, כאשר $j = 1,2,3,4$ נמצאות על הפרבולה

$$y = 2\left[(b^2+d^2)x^2 - 2(b^2c+d^2a)x + (b^2c^2+d^2a^2)\right] \qquad (3'')$$

לדוגמא ,יהיו הפולינומים

$P_{4,0}(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 10$ ששורשיו $x_{1,2} = 1 \pm i,\ \ \tilde{x}_{3,4} = -2 \pm i$

$\tilde{P}_{4,0}(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$ ששורשיו $-3,\ -1,\ 0,\ 2$

ארבעת הנקודות $M_1(-3,34),\ M_2(-1,10),\ M_3(0,10),\ M_4(2,34)$ נמצאות על הפרבולה $y = 4x^2 + 4x + 10$. זאת לפי הנוסחה (3'').

ניתן לקבל את משוואת פרבולה זו גם אם במשוואה הכללית של $y = Ax^2 + Bx + C$ פרבולה, נציב את הזוגות (x,y) , דהיינו

$(-3,34),\ \ (-1,10),\ \ (0,10),\ \ (2,34)$

ואז נקבל $A = B = 4,\ \ C = 10$.

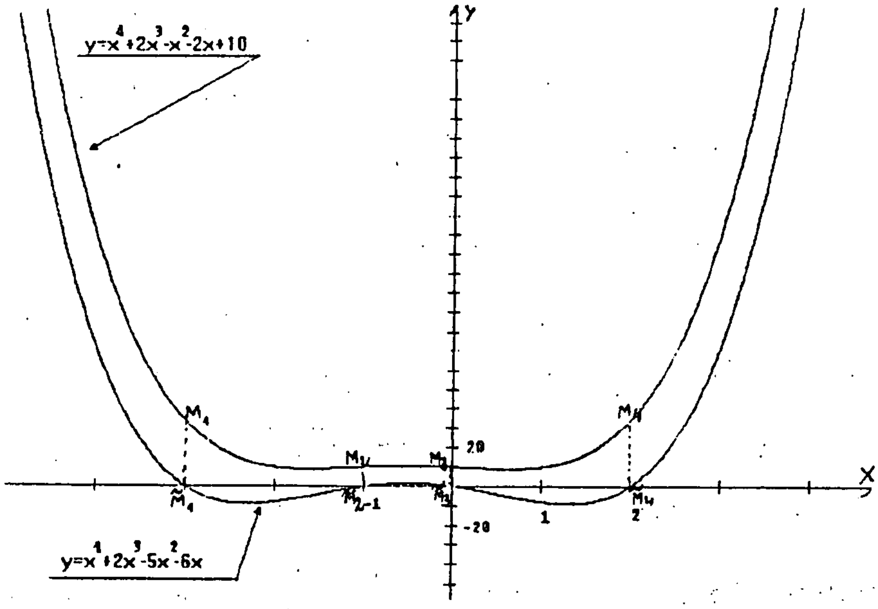
(איור 4 בעמ' הבא)

ד-2. $P_{4,2}(x)$

יהיו $x_{1,2} = a \pm bi,\ \ x_3 = m,\ \ x_4 = n$ שורשי $P_{4,2}(x)$ ו- $\tilde{x}_{1,2} = a \pm b,\ \ \tilde{x}_3 = m,\ \ \tilde{x}_4 = n$ שורשי $\tilde{P}_{4,2}(x)$. אז מתקבל:

$$P_{4,2}(x)-\tilde{P}_{4,2}(x)=\prod_{j=1}^{4}(x-x_j)-\prod_{j=1}^{4}(x-\tilde{x}_j)=\left[x^2-(m+n)x+mn\right]\left[(x^2-2ax+a^2+b^2)-(x^2-2ax+a^2-b^2)\right]=$$

$$=2b^2\left[x^2-(m+n)x+mn\right].$$



איור 4

נובע

$$P_{4,2}(x)=\tilde{P}_{4,2}(x)+2b^2\left[x^2-(m+n)x+mn\right]. \qquad (4)$$

ולכן, עבור $x=\tilde{x}_j$ מתקבל

$$P_{4,2}(\tilde{x}_j)=2b^2\left[x_j^2-(m+n)x_j+mn\right]$$

ז.א. כי ארבעת הנקודות

$$M_j\left[\tilde{x}_j,\ P_{4,2}(\tilde{x}_j)\right]$$

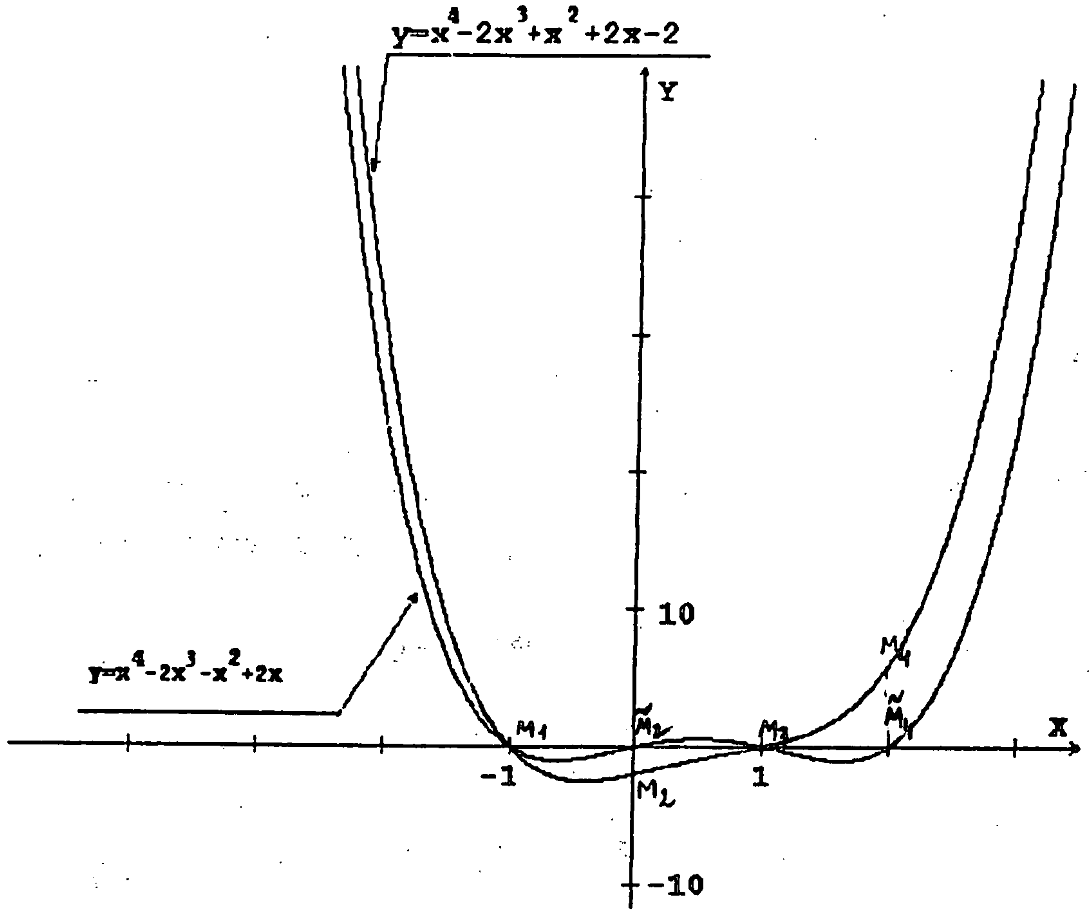
נמצאות על הפרבולה.

$$y=2b^2\left[x^2-(m+n)x+mn\right] \qquad (4')$$

לדוגמא, יהיו הפולינומים

$P_{4,2}(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2$ ששורשיו $x_{1,2} = 1 \pm i,\ x_{3,4} = \pm 1$

$\tilde{P}_{4,2}(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$ ששורשיו $-2,\ -1,\ 0,\ 1$



איור 5

על פי (4), ארבעת הנקודות $M_1(-1,0),\ M_2(0,-2),\ M_3(1,0),\ M_4(+2,6),$

נמצאות על הפרבולה $y = 2x^2 - 2$.

ה. פולינומים ממעלה גדולה מ-4

במקרה של $n > 4$, נוכל לעבור על אותם שלבים כמו עבור $n = 2,3,4$, אבל ככל ש-n גדל, הולכים החישובים ומסתבכים. מאחר ואנחנו מעונינים במיוחד להגיע לקשר בין התבניות

$P_n(x)$ ו- $\tilde{P}_n(x)$ מספיק להעיר כי בשני הפולינומים האלה, המקדמים של x^n שווים זה לזה,

דהיינו ל-1 ושל x^{n-1} גם כן שווים זה לזה. נוכיח את העובדה האחרונה.

על פי נוסחת Vieta, המקדם של x^{n-1} הוא בדיוק הנגדי של סכום שורשי הפולינום.

אם הפולינום ממעלה זוגית, אז שורשי הפולינום הם

$$a_1+ib_1,\ a_1-ib_1,\ a_2+ib_2,\ a_2-ib_2,\ \ldots,\ a_{n/2}+ib_{n/2},\ a_{n/2}-ib_{n/2}$$

ולכן הסכום שלהם הוא $2\sum_{p=1}^{n/2} a_p$. כך גם בפולינום $\tilde{P}_n(x)$, ששורשיו $a_p \pm b_p (p=1,2...n/2)$ הסכום שלהם הוא $2\sum_{p=1}^{n/2} a_p$. נובע כי מקדמי x^{n-1} שווים ב- P_n וב- $\tilde{P}_n$ ולכן בחיסור $P_n(x)-\tilde{P}_n(x)$ האיברים ב- x^{n-1} מתבטלים ואז מתקבל כהפרש ביניהם פולינום ממעלה $n-2$, ז.א.

$$P_n(x)=\tilde{P}_n(x)+Q_{n-2}(x) \qquad (5)$$

עבור $x=\tilde{x}_j$ מתקבל (מאחר ש- $\tilde{P}_n(\tilde{x}_j)=0$)

$$P_n(\tilde{x}_j)=Q_{n-2}(\tilde{x}_j) \qquad (5')$$

אם G_n ו- $\tilde{G}_n$ הינם הגרפים של שני הפולינומים האלה, הנקודות $M_j[\tilde{x}_j,\ P_n(\tilde{x}_j)]$ שעל G, נמצאות גם על עקומה אלגברית ממעלה $n-2$. הנקודות האלה ממחישות גרפית את פסאודושורשי $P_n(x)$.

אם הפולינומים ממעלה אי-זוגית, ז.א. יש להם גם מספר שורשים ממשיים, הדיון דלעיל נשאר בתוקף לגבי המקדמים של x^n ו- x^{n-1} ולכן גם בנוגע לעקומה G_{n-2} שעליה נמצאות הנקודות $M_j[\tilde{x}_j,\ P_n(\tilde{x}_j)]$.

הערה: את ההשערה בנוגע לעקומה ממעלה $n-2$ שעליה נמצאות הנקודות $M_j[\tilde{x}_j,\ P_n(\tilde{x}_j)]$ מצאנו ב- [3] אבל המחברים מצהירים כי לא מצאו הוכחה לזה.

ביבליוגרפיה

1. דוד רימר. הערה על זוג פרבולות סימטריות, אתגר-גליונות מתמטיקה, גליון מס. 20, עמ' 3-7, מכון ויצמן למדע. רחובות 1990.

2. David Rimer, Von komplexen zu reellen Nullstellen. Mathematik in der Schule, 30 Jahrgang, Mai 1992, S. 292-295, Berlin.

3. Robert Travers and David Kim, Those elusive imaginary zeros, Math. Teacher, January , 1982, p. 62-64.

הבעת תודה: אנו מביעים את תודתנו למר יגאל יסטרוביצקי מהמחלקה להוראת המדעים של מכון ויצמן למדע עבור האיורים 2-5 שביצע במחשב.

טופס חתימה על "אתגר - גליונות מתמטיקה" (לצלם ולשלוח)

לכבוד
מערכת "אתגר - גליונות מתמטיקה"
היחידה לפעולות נוער
מכון ויצמן למדע
<u>רחובות 76100</u>

מצורפת בזה המחאה מס' ____________ משוכה על בנק ________________
על סך -.25 ש"ח לפקודת "היחידה לפעולות נוער" - עבור מנוי על "אתגר גליונות מתמטיקה לשנת תשנ"ג.

שם ______________________________ **טלפון** ______________

כתובת ______________________________ **מיקוד** ______________

ביה"ס ____________________ **כתה** ______ **צה"ל (ד.צ.)** ____________

תאריך ____________________ **חתימה** ____________________

ניתן להזמין חוברות קודמות (אם ישנן) במחיר 7 ש"ח לחוברת בטלפונים 04-294544 ו-08-342970 (מכון ויצמן).

פתרון בעיות מגליון 23/24

בעיה 1.

מצא שני שברים - אחד עם מכנה 8 והשני עם מכנה 13 - כך שיהיו שונים זה מזה אבל ההפרש בין הגדול והקטן יהיה קטן ככל האפשר.

פתרון

עבור כל x,y שלמים, אלא אם כן $\frac{x}{y}=\frac{8}{13}$

$$\left|\frac{x}{8}-\frac{y}{13}\right|=\frac{|13x-8y|}{104}\geq\frac{1}{104}$$

אם שויון עבור $(x,y)=(5,8)$

ולכן התשובה היא $\left(\frac{5}{8},\frac{8}{13}\right)$

בעיה 2.

סכום המספרים בקבוצה מסויימת שווה ל-1. האם ייתכן שסכום ריבועיהם קטן מ-0.1?

פתרון

התשובה היא "כן".

ניקח $x_1=x_2=\ldots.=x_{11}=\frac{1}{11}$

ואז יהיו

$$\sum x_1=1\ ,\ \sum x_i^2=11\cdot\frac{1}{11^2}=\frac{1}{11}<0.1$$

בעיה 3.

האם קיים מצולע קמור בעל 1992 צלעות בו כל זוית היא בעלת מספר שלם של מעלות?

פתרון

<u>התשובה היא לא</u>. כי סכום הזויות הפנימיות של מצולע קמור בעל n קודקודים הוא $180(n-2)$ מעלות. יוצא כי ממוצע הזויות של מצולע כזה בעל 1992 קודקודים יהיה

$$\frac{180\cdot1990}{1992}\sim179.8^\circ$$

אבל כל אחת מהזויות קטנה מ-180° ומאחר שכולן בעלות מספר שלם של מעלות, הרי אף אחת אינה גדולה מ-179°.

4. בעיה

במישור נתונות 4 נקודות שאינן נמצאות על ישר אחד. הוכח שקיים משולש שאינו חד-זויות שקודקודיו הן שלוש מ-4 נקודות אלה.

פתרון

יהיו הנקודות A, B, C, D. קיימות שתי אפשרויות:

א) A, B, C, D הם קודקודים של מרובע קמור. לפחות אחת מבין הזויות הפנימיות שלו (נגיד A) היא בת 90° או יותר. אם הקודקודים הסמוכים לו הם B, D אזי יקיים המשולש ABD את כל התנאים.

ב) במקרה השני תימצא אחת הנקודות בתוך המשולש של שלוש האחרים. אם D נמצא בפנים המשולש ABC אזי יהיה

$$\angle ADB + \angle BDC + \angle CDA = 360^\circ$$

ולכן לפחות אחת מביניהן (למעשה לפחות שתיים מביניהן) תהיה גדולה מ-90°.

5. בעיה

באלפבית של השבט מומבו-יומבו יש רק שתי אותיות - A ו- B. בשפת השבט יש משמעות לכל צירוף של "A"-ים ו-"B"-ים, עם שני כללים: מותר להחליף בכל מקום במילה את השלישיות BAB , ABA (למשל, את BABABA מותר להפוך ל- BBABBA או ל- BABBAB): כמו-כן, מותר לזרוק מהמילה שתי אותיות זהות המופיעות ברצף (למשל את AAAB מותר להפוך ל-AB). אם ניתן לקבל מילה מסוימת ממילה אחרת ע"י מספר פעולות כאלה, אזי משמעויות שתי המילים זהות.

האם איש השבט יכול לספור את:

א) האצבעות של ידו?

ב) ימי השבוע?

פתרון

א) כן.

ב) לא.

בעצם נוכיח כי ישנן בדיוק 5 מילים שונות אשר כל מילה אחרת ניתנת להעברה לאחת מאלה על ידי סדרת החלפות. ברור שנוכל להשמיט כל זוג של אותיות זהות סמוכות וכך ניתן להעביר כל מילה לצורה ...ABABAB...

אם יש במילה 4 אותיות או יותר נוכל שוב לעשות החלפות

$$ABAB \rightarrow AABA \rightarrow BA$$

וגם
$$BABA \rightarrow ABAA \rightarrow AB$$

לכן כל מילה ניתנת להעברה לאחת הצורות ABA , BA , AB , B , A.

6. בעיה

אמנון כתב על פאות קוביה את הספרות 6, 5, 4, 3, 2, 1. משה לא ראה איך אמנון עשה זאת, אבל הוא העז לטעון כי:

א) יש לקוביה שתי פאות סמוכות שעליהן כתובות ספרות עוקבות.

ב) יש לפחות שני זוגות פאות כאלה.

האם צודק משה בשני המקרים? למה?

פתרון

משה צדק בשני המקרים כי למעשה ב) נכון. נסתכל בפאה המסומנת ב-3. יש רק פאה אחת שאינה סמוכה לה, ולכן לפחות אחד המספרים 2,4 יפול בהכרח על פאה הסמוכה ל-3. נניח ש-2 מונח על הפאה המנוגדת ל-3, ולכן 3,4 יהיו על פאות סמוכות. המספרים 1,2,5,6 יהיו על 4 הפאות הנותרות וכל אלה סמוכות גם לפאה 3 וגם לפאה 4.

7. בעיה

בכמה אופנים ניתן לרשום את המספר 1992 כהפרש הריבועים של שני מספרים טבעיים (כלומר שלמים חיוביים)?

פתרון

נכתוב
$$\begin{aligned} 1992 &= x^2 - y^2 \\ &= (x-y)(x+y) \end{aligned}$$

מאחר שההפרש בין שני גורמים אלה הוא $2y$ ולכן זוגי נובע כי הם שניהם זוגיים.

אבל
$$1992 = 8 \times 3 \times 83$$

ולכן
$$x + y > \sqrt{1992} > 44$$

יוצא כי האפשרויות הן:

ולכן
$$\left.\begin{aligned} x+y &= 2\times 83 = 166 \\ x-y &= 4 \times 3 = 12 \\ (x,y) &= (89,77) \end{aligned}\right\}$$

או

ואז
$$\left.\begin{aligned} x+y &= 4\times 83 = 332 \\ x-y &= 6 \\ (x,y) &= (169,163) \end{aligned}\right\}$$

או
$$\left.\begin{aligned} x+y &= 6\times 83 = 498 \\ x-y &= 4 \\ (x,y) &= (251,247) \end{aligned}\right\}$$

או

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 12\times 83 = 996 \\ x-y &= \quad 2 \\ (x,y) &= (499,497) \end{aligned}\right\}$$

ולכן ישנן 4 אפשרויות

$$1992 = 89^2 - 77^2 = 169^2 - 163^2 = 251^2 - 247^2 = 499^2 - 497^2$$

8. בעיה

בתחרות משתתפים 10 קופצים למים. כל שופט מצוות של שלושה מדרג את הקופצים לפי מקומות מ-1 עד 10 לפי שיקול דעתו. הספורטאי עם סכום הנקודות הקטן ביותר מוכרז מנצח. מהו הערך הגדול ביותר של הסכום הזה שיכול להיות למנצח (המנצח הוא יחיד).

פתרון

סכום כל הערכים הוא $(1+2+\ldots+10)\times 3 = 165$.

אם המנצח היחיד קיבל את הסכום S אזי כל אחד מתשעת האחרים קיבל לפחות S+1.

יוצא כי:

$$165 \geq S + 9(S+1)$$
$$10\,S \leq 156$$
$$S \leq 15$$

ואמנם האפשרות $S = 15$ קיימת:

מס' הקופץ	ההערכות
1	$5+5+5=15$
2	$2+4+10=16$
3	$4+10+2=16$
4	$10+2+4=16$
5	$1+7+9=17$
6	$7+9+1=17$
7	$9+1+7=17$
8	$3+6+8=17$
9	$6+8+3=17$
10	$8+3+6=17$

9. בעיה

האם אפשר לבנות 5 קרניים (כלומר חצאי-ישר) במישור המתחילות באותה נקודה של המישור כך שבין הזויות שייוצרו תהיינה בדיוק 4 זויות חדות? נחשבות לא רק זויות בין קרניים סמוכות אלא בין כל זוג קרניים שונות.

פתרון

הדבר אפשרי. ניקח ארבע זויות עוקבות, כל אחת בגודל α° וזה ישאיר זוית חמישית בגודל $360^\circ - 4\alpha^\circ$. תנאי הבעיה יתקיימו אם

$$45 < \alpha < 67.5$$

כי אז יהיה $2\alpha > 90$

ואילו $360 - 4 - \alpha > 90$

10. בעיה

כדי לזגג 15 חלונות בעלי גדלים שונים וצורות שונות הכינו 15 זכוכיות לפי גודל החלונות וצורתם. זגג מבולבל שאינו יודע שהזכוכיות מתאימות לחלונות, פועל באופן הבא:

הוא מגיע לחלון מסוים. מחפש בין הזכוכיות הנשארות לו, אחת שאיתה אפשר לזגג את החלון (כלומר, שהזכוכית מתאימה לחלון או שממנה אפשר לחתוך את החלק המתאים). אם אין זכוכית כזאת הוא עובר לחלון הבא, וכן הלאה עד שהוא עובר על כל החלונות.

מהו מספר החלונות הגדול ביותר העלולים להשאר ללא זכוכית?

פתרון

לא יתכן שישארו יותר מ-7 חלונות לא מזוגגים כי אז היה מספר הזכוכיות שלא נוצלו גדול ממספר החלונות המזוגגים ולכן יש לפחות זכוכית אחת שהיתה מתאימה לחלון אשר בסוף לא זוגג, בניגוד לשיטת העבודה. קל לראות כי המספר יכול אמנם להגיע ל-7 ונשאיר לקורא לאשר את זה.

11. בעיה

הוכח שמספר שלם ניתן לכתיבה כממוצע החשבוני של שני ריבועי שלמים אם ורק אם המספר ניתן לכתיבה כסכום של שני ריבועי שלמים.

פתרון

אם $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ הוא מספר שלם, אזי ברור כי $x \equiv y(\bmod 2)$, ולכן נוכל לכתוב גם

$$z = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

12. בעיה

עבור אילו ערכים של n ניתן לחלק את הקבוצה $(1,2, \ldots, n)$ לחמש תת-קבוצות זרות (כלומר שאין לאף שתיים מהן איברים משותפים) כך שחמשת סכומי האיברים בכל אחת מחמש התת-קבוצות הם שווים?

פתרון

מאחר ש- $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$, יוצא כי סכום האברים שבכל תת-קבוצה צריכה להיות

$$\frac{n(n+1)}{10}$$

ולכן

$$\begin{cases} n = 5r \\ n = 5r-1 \end{cases}$$
או

כאשר r הוא מספר שלם.

התנאי הזה הוא גם <u>מספיק</u>. נבדוק את האפשרויות:

א) r זוגי.
ב) r אי-זוגי.

א) יהיה $r = 2a$, $n = 10a$ או $n = 10a-1$.
אם $n = 10a$ נחלק את 10 הראשונים ל-5 קבוצות
$(1,10),(2,9),(3,8),(4,7),(5,6)$

עבור $n = 10a-1$ נחלק את 9 הראשונים
$(1,8),(2,7),(3,6),(4,5),(9)$

בשני המקרים נשאר אחרי שלב ראשון זה לגוש של איברים אשר מספרם הוא כפולה של 10 ונוכל להמשיך ולחלק כל עשיריה ל-5 תת-קבוצות ולצרף אותם לתת-קבוצות אשר כבר נוצרו.
ב) כאשר $r = 1$ רואים מיד כי הדבר בלתי אפשרי כי אז $n = 5$ או $n = 4$.
עבור $r > 1$ הטיפול הוא כמו במקרה הראשון פרט לזה שמחלקים ראשית כל את 15 המספרים הראשונים.

התקבלו פתרונות מ:
ערן נבו (ירושלים)
אסף אהרוני (קיבוץ יפעת)

בעיות חדשות

1. אם $\{a_1,...,a_n\}$ הם מספרים ממשיים כלשהם, ו-α הוא מספר חיובי כלשהו, הוכח כי

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{a_k a_l}{(k+l+\alpha)^2}\geq 0$$

2. אם $\alpha=\frac{n}{17}$, הוכח כי

$$\cos\alpha+\cos 9\alpha+\cos 13\alpha+\cos 15\alpha=(\sqrt{17}-1)/4$$

$$\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha+\cos 11\alpha=-(\sqrt{17}+1)/4$$

3. המרובע $ABCD$ חסום במעגל אשר מרכזו X. אורכי הצלעות AB,BC,CA,AD הם a,b,c,d בהתאמה ו-Y היא נקודת המפגש של האלכסונים AC,BD. אם r הוא הרדיוס של המעגל, הוכח כי

$$XY^2=\left\{\frac{r}{(ab+cd)(ad+bc)}\right\}^2\left[(ac+bd)\left\{ac(b^2-d^2)^2+bd(a^2-c^2)^2\right\}\right]$$

__חידה__

לפי האגדה קרה פעם שממשלת ארה"ב כעסה על ממשלת קנדה והחליטה להכריז כי מכאן ואילך הדולר הקנדי שווה רק ל-90 סנט ארה"ב. הקנדים לא טמנו את ידם בצלחת והודיעו כי מכאן ואילך יהיה הדולר של ארה"ב שווה בדיוק 90 סנטים קנדיים.

קנדי שהיה לו דולר קנדי בכיסו קנה כוס בירה ב-10 סנט ועם העודף (90 סנט קנדיים) עבר את הגבול לארה"ב וקנה שם דולר אמריקאי. בדולר זה קנה בירה ב-10 סנט אמריקאיים וחזר לקנדה עם העודף (90 סנט אמריקאיטים) בכיסו. בקנדה קנה שוב דולר מקומי אחד וכך חוזר חלילה, עד שהשתכר בעוד כספו המקורי (1 דולר קנדי) נשאר שלם.

__שאלה__

מי בעצם שילם עבור כל הבירה ששתה הקנדי?

עלון למורי המתמטיקה, על"ה

עלון למורי המתמטיקה, עלי"ה, היוצא לאור מטעם המרכז להוראת המדעים באוניברסיטה העברית בירושלים, דן במגוון רחב של נושאים הקשורים למתמטיקה תיכונית ולהוראתה. מתפרסמים בו, בין השאר:

* מאמרים על היבטים שונים של נושאים הנלמדים בתיכון (כשהכוונה **לכל** תוכניות הלימודים הקיימות בישראל, ולא רק לתוכנית החדשה, שעמדה במרכז העניינים בתחילת דרכו של העיתון).
* מאמרים על התפתחויות מעניינות במתמטיקה.
* רשימות היסטוריות - על קורותיה וממציאיה של המתמטיקה.
* דווחים על מחקרים בתחום ההוראה והלמידה של המתמטיקה.
* סיפורים מהשטח והצעות של מורים לשיפור ההוראה.
* סקירות על לימודי מתמטיקה בעולם.
* מידע על תחרויות מתמטיות, פרסים בתחום המתמטיקה וכו'.
* סקירת ספרים מעניינים בנושאים הנ"ל (לרבות, ספרים לועזיים).
* מידע על ספרי לימוד חדשים.
* מבחני בגרות עם פתרונות מלאים (שאלות של מורים ותשובות המפמ"ר).
* בעיות ושעשועים מתמטיים.

העלון אמור לשמש גם בימה לרב-שיח בין המורים, משרד החינוך ומעצבי תוכניות לימודים, וכן בין המורים לבין עצמם. נוסף על חיבורים מעניינים המרחיבים את הדעת, ימצא המורה בכל גליון חומרים שיעזרו לו בעבודתו היום-יומית.

העלון יוצא לאור פעמיים בשנה, באביב ובסתיו. בכל גליון 100 עמודים בממוצע. כ-700 מורים חתומים היום על המנוי ומספר הקוראים גדל במהירות.

את העלון ניתן לרכוש במרכז להוראת המדעים בירושלים באמצעות הספח ובצירוף המחאה על סך 38 ש"ח למינוי שנתי (שני גליונות). לחותמים על המינוי ישלח העלון בדואר.

לבירור פרטים ניתן לפנות בטלפון: 02-584454.

שימו נא לב!

נותרו עוד מספר מוגבל של גליונות קודמים, ואפשר לרכוש אותם במחירים אלה:
גליונות 4,3,2,1 - 5 ש"ח לגליון, גליונות 6,5 - 9 ש"ח לגליון, גליונות 8,7 - 12 ש"ח לגליון.
גליונות 9,10 - 16 ש"ח לגליון.

לגזור ולשלוח

לכבוד
מערכת עלי"ה - עלון למורי המתמטיקה
המרכז הישראלי להוראת המדעים
האוניברסיטה העברית
ירושלים 91904

הנני מזמין: מנוי שנתי ________ גליונות קודמים ____________________________

מצ"ב המחאה מס' ____________ משוכה על בנק ______________ ע"ס __________ ש"ח.

שם המזמין ____________________ טלפון בבית ____________________

כתובת למשלוח ______________________________ חתימה ____________