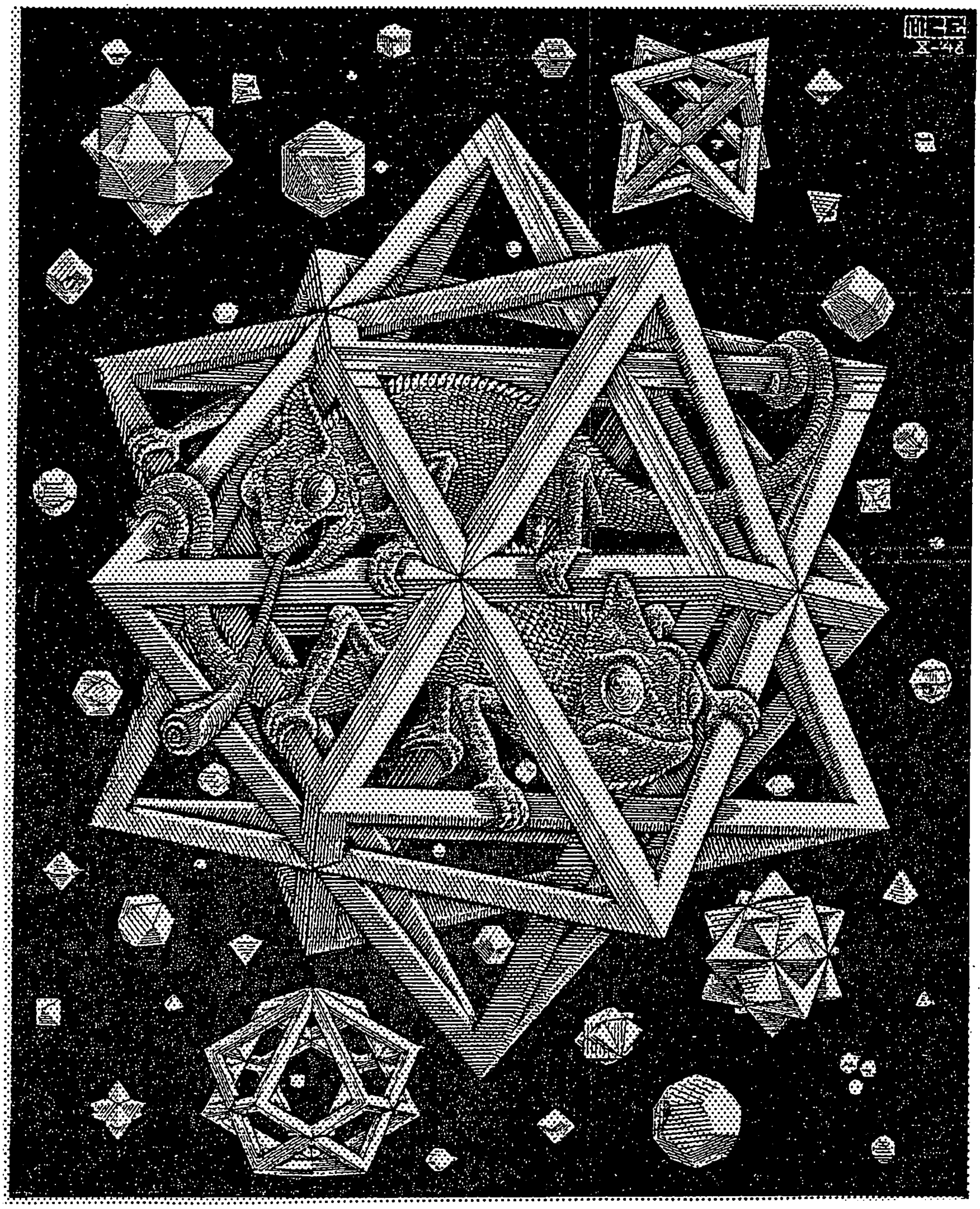
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס' 19 שבט תשנ"א - פברואר 1991



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון וייצמן למדע
רחובות

10084278

תוכן העניינים

אתגר - גליונות מתמטיקה ISBN = 0334-201
מוצא לאור ע"י הפקולטות למתמטיקה במכון וייצמן ובטכניון.

המערכת:
פרופי י. גיליס. המחלקה למתמטיקה שימושית, מכון ויצמן.
פרופי א. ברמן וד"ר צ. הראל, הפקולטה למתמטיקה בטכניון.

מען המערכת: היחידה לפעולות נוער, מכון ויצמן למדע, רחובות, 76100 טל- 08-342970

דבר המערכת

בעת כתיבת השורות האלה נמצא אזור זה של העולם במצב של מלחמה, מי פחות ומי יותר. אי לכך, ולצערנו הגדול, אי אפשר היה לקיים את האולימפיאדה הישראלית במתמטיקה במכון ויצמן בתאריך המתוכנן. יתכן כי נחזור לזמנים יותר תקינים בעתיד הקרוב ואז ננסה לקיים את האולימפיאדה כרגיל, אחרת נאלץ לחפש שיטות חדשות לקיים את התחרות בצורה שתתאים למצב. על כל החלטה חדשה תשלח הודעה לאלה שנרשמו לאולימפיאדה.

*

בעיות חדשות

1. נתון מעגל בעל מרכז O ורדיוס r. מצא משולש ABC החוסם את המעגל כך ש- $OA^2 + OB^2 + OC^2$ יהיה קטן ככל האפשר.

2. אם $a > 0$, מצא את כל הפתרונות הממשיים של

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

3. ניתן להגיע בכבישים מכל עיר במדינה מסוימת לכל עיר אחרת (במידת הצורך, דרך ערים אחרות).
הוכח כי קיימת לפחות עיר אחת, נגיד U , שאפילו אם תיסגר לתנועה, עדיין יהיה אפשר להגיע מכל עיר (חוץ מ- U) לכל עיר אחרת.

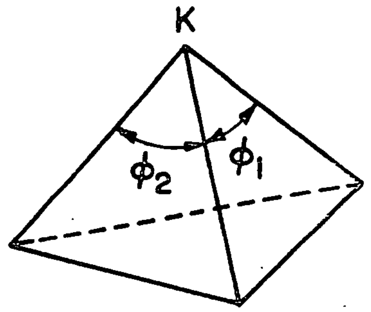
הסינוס של זווית מרחבית (המשך)

יעקב נהיר (ירושלים)

מבוא

בחלק הראשון של מאמר זה (ראה אתגר - גליונות מתמטיקה, מסי 18) הגדרנו את המושג של זווית מרחבית ואת הסינוס שלה, כאשר החישוב של סינוס זה התבסס על הוקטורים היוצרים את הזווית. בחלק זה נמצא דרך לקביעת $\sin\Omega$ של פינה משולשת כאשר אין ניתנים הוקטורים האלה אלא רק הזוויות הרגילות בין הוקטורים. בנוסף נראה איך ליחס סימן אלגברי, (+) או (-) לזוית Ω.

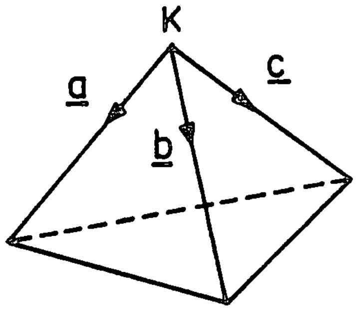
דטרמיננטת הקוסינוסים



ציור כ"א

נתונה פינה משולשת, ז"א משהו מעין קודקוד של ארבעון (ציור כ"א, הנקודה K) וידועות שם שלוש הזוויות של שלוש הפאות. בציור כ"א מתואר קודקוד כזה (הנקודה K) ומסומנות שם הזוויות φ_1 ו- φ_2 בלבד לשם הבהירות.

מטרתנו למצוא דרך לקבוע את $\sin\Omega$ שבין 3 המקצועות של הפינה המשולשת (מקצוע הוא קו החתוך בין שני מישורים).



ציור כ"ב

נקבע שלושה ווקטורי יחידה $\underline{a}$ $\underline{b}$ ו- $\underline{c}$ לאורך המקצועות מנקודת המוצא K בקודקוד הפינה (ציור כ"ב).

הווקטורים הללו אינם ידועים במפורש שהרי אילו היו ידועים לנו, נאמר ע"י רכיביהם, אז כבר נפתרה הבעיה כי יכולנו לחשב את $\sin\Omega$ בעזרת הרכיבים לפי נוסחה (5).

ניח איפוא, כרגיל במתמטיקה, שידועים לנו הווקטורים ונמצא את הקשר שלהם אל המשך הבעיה וכך נפתור אותה. ובכן, הנחנו שקיימים ווקטורי יחידה $\underline{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\underline{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\underline{c} = (c_x, c_y, c_z)$
ולפי זה (נוסחה (5))

$$\sin\Omega = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

ועתה במקום לחשב את $\sin\Omega$ נחשב את $\sin^2\Omega$

$$\sin^2\Omega = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{a}^2 & \underline{a}\,.\,\underline{b} & \underline{a}\,.\,\underline{c} \\ \underline{b}\,\underline{a} & \underline{b}^2 & \underline{b}\,\underline{c} \\ \underline{c}\,\underline{a} & \underline{c}\,\underline{b} & \underline{c}^2 \end{vmatrix}$$

בצעד הראשון החלפנו את הדטרמיננטה הימנית בדטרמיננטה המחלפת, ז"א שיקפנו את הדטרמיננטה ביחס לאלכסון הראשי דבר שאינו משנה את ערכה. בצעד השני השתמשנו בכך שמכפלת דטרמיננטות היא גם הדטרמיננטה של כפל המטריצות המתאימות.

הדטרמיננטה שהתקבלה ידועה במתמטיקה ונקראת הדטרמיננטה של גרהם (Graham).

ועתה, הווקטורים הם ווקטורי יחידה

ולכן $\underline{a}^2 = \underline{b}^2 = \underline{c}^2 = 1$,

וכן $\underline{a}\cdot\underline{b} = \underline{b}\cdot\underline{a} = \cos\varphi_3$, $\underline{a}\cdot\underline{c} = \underline{c}\cdot\underline{a} = \cos\varphi_2$,

$\underline{b}\cdot\underline{c} = \underline{c}\cdot\underline{b} = \cos\varphi_1$

לפי זה תקבל הדטרמיננטה של גרהם את הצורה

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_3 & \cos\varphi_2 \\ \cos\varphi_3 & 1 & \cos\varphi_1 \\ \cos\varphi_2 & \cos\varphi_1 & 1 \end{vmatrix}$$

מכל זה מקבלים

$$\sin\Omega = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos\varphi_2 & \cos\varphi_3 & 1 \\ \cos\varphi_1 & 1 & \cos\varphi_3 \\ 1 & \cos\varphi_1 & \cos\varphi_2 \end{vmatrix} \qquad (24\text{א})$$

כאמור, רק הזוויות φ_1 φ_2 ו- φ_3 היו נתונות אך לא הווקטורים $\underline{a}$ $\underline{b}$ ו- $\underline{c}$. יוצא איפוא שמצאנו דרך לחשב את $\sin\Omega$ מתוך ידיעת φ_1 , φ_2 ו- φ_3 בלבד.

נזכיר כאן, כי גם במקרה של זווית מישורית ידועה הזהות $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ולכן ניתן לכתוב

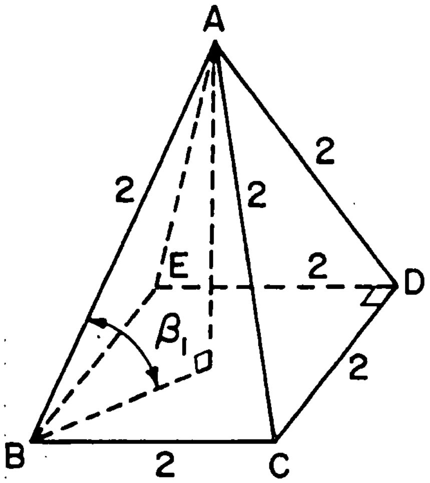
$$\sin^2\alpha = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha \end{vmatrix} \qquad (24\text{ב})$$

הנוסחה (24 א) דלעיל יכולה איפוא להחשב מעין הרחבה של (24 ב) למקרה התלת - מימדי. או במילים אחרות חישוב $\sin\Omega$ לפי דטרמיננטת הקוסינוסים מתקבלת כהרחבה של הזהות הטריגונומטרית $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
בדרך הגעתנו לנוסחה (24 א) קבלנו
כי במקומות (1,2) ו- (2 , 1) של הדטרמיננטה נמצא $\cos\varphi_3$
ובן כי במקומות (1,3) ו- (3 , 1) של הדטרמיננטה נמצא $\cos\varphi_2$
ובן כי במקומות (2,3) ו- (3 , 2) של הדטרמיננטה נמצא $\cos\varphi_1$
למעשה אפשר להחליף את המקומות, כלומר $\cos\varphi_1$ יכול להחליף מקום עם $\cos\varphi_2$ או עם $\cos\varphi_3$ ובן $\cos\varphi_2$ יכול להחליף מקום עם $\cos\varphi_3$ וזאת מבלי שישתנה ערך הדטרמיננטה ובעקבותיה הערך של $\sin\Omega$. הסיבה לכך היא כי המקומות של $\cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2$ ו- $\cos\varphi_3$ נקבעו לפי הסדר בו סומנו הווקטורים $\underline{a}$ $\underline{b}$ ו- $\underline{c}$ שהוא שרירותי.

דוגמא

נזכיר את הבעיה מסוף חלק א׳ של המאמר (גליון 18, תשרי תשנ״א): נתונה פירמידה A B C D E (ציור כ׳ שם, שחזרנו עליו כאן לשם הנוחיות, ציורים כ״ג 1 וכ״ג 2).

בקשנו שם למצוא את הזווית β_2 שבין מקצוע הבסיס BC והמישור (פאה) ABC. כל המקצועות אורכם אחיד 2.



ציור כ"ג 1

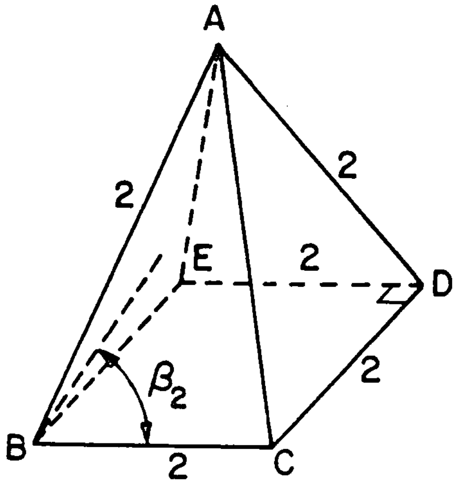
הפתרון מתקבל ע״י מציאת גובה הפירמידה באמצעות הנדסה מרחבית. בעזרת הגובה מוצאים את β_1 בין הבסיס ובין המקצוע AB (ציור כ״ג 1).

מידיעת β_1 אפשר למצוא את β_2 (ציור כ״ג 2)

ע״י שימוש במשפט הסינוסים הכפלי (נוסחה (21) בחלק א׳).

בעיה א׳

עתה אפשר ויש למצוא את שתי הזוויות, הן β_1 והן β_2 באופן ישיר, ללא תלות זה בזה וללא צורך בחישוב מוקדם של גובה הפירמידה, וזאת ע״י חישוב $\sin \Omega$ ליד הקודקוד B שבקצה הבסיס (ראה נוסחה (24 א)) ושימוש בהגדרת $\sin \Omega$ (ראה נוסחה (1) או נוסחה (20)).

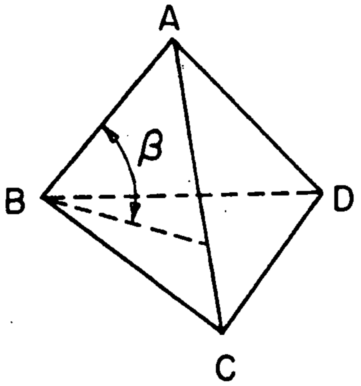


ציור כ"ג 2

בעיה ב׳

בשיטה דומה יש למצוא את הזווית β שבין המקצוע (נאמר AB) והפאה (נאמר BCD) בארבעון משוכלל (ציור כ״ד).

נציין את התוצאה המעניינת שהזווית β שתמצא כאן שווה לזווית β_2 של הבעיה הקודמת.



ציור כ"ד

הסימן האלגברי של $\sin\Omega$ (+ או -)

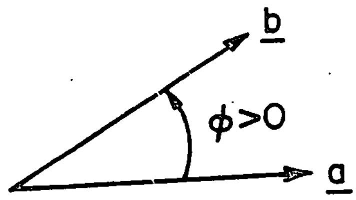
זווית מישורית רגילה עשויה להחשב כחיובית או שלילית בהתאם לסדר בו נמנה את שוקי הזווית.

נתבונן בזוית φ (ציור כ"ו). נמנה את שוקי הזווית, $\underline{a}$ ואח"כ $\underline{b}$.

נסמן זאת $\varphi = \measuredangle(\underline{a}, \underline{b})$

אם סדר השוקים הוא כך שהמעבר מ- $\underline{a}$ ל- $\underline{b}$ הוא בניגוד למהלך מחוגי השעון, (זה נחשב למגמה מתמטית חיובית) אז נראה את הזווית כחיובית, $0 < \varphi$ ואתה גם $0 < \sin\varphi$

(נדון רק בזויות קטנות מ- $180°$).



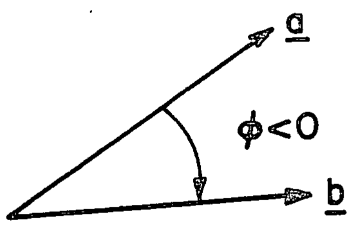
$\phi = \measuredangle(\underline{a}, \underline{b})$

ציור כ"ו

כאשר סדר השוקים שבציור הפוך, כלומר במגמת מהלך מחוגי השעון (מגמה מתמטית שלילית, ציור כ"ז) תחשב φ שלילית ואתה גם $\sin\varphi < 0$.

גם כאן נדון רק בזויות שגדלן המוחלט קטן מ- $180°$.

כלומר ככלל $-180° < \varphi < 180°$.

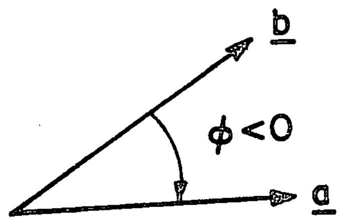


$\phi = \measuredangle(\underline{a}, \underline{b})$

ציור כ"ז

יתכן גם מצב כבציור כ"ח בו מונחות הצלעות כמו במקרה הראשון (ציור כ"ו) אלא שאנו מונים אותן בסדר הפוך, כלומר $\underline{b}$ ואח"כ $\underline{a}$, נסמן זאת $\varphi = \measuredangle(\underline{b}, \underline{a})$

גם במקרה כזה תחשב φ לזווית שלילית $\varphi < 0$.



$\phi = \measuredangle(\underline{b}, \underline{a})$

ציור כ"ח

ועתה נגדיר כדלהלן את הסימן של זווית מרחבית Ω ולכן של $\sin\Omega$.

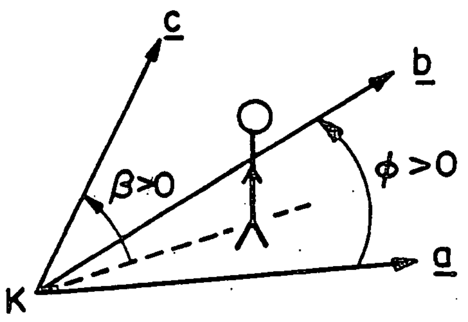
נניח שסדר מניית הצלעות הוא:

תחילה $\underline{a}$, אח"כ $\underline{b}$ ולבסוף $\underline{c}$, אז נסמן זאת $\measuredangle(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$.

נעבור מ- $\underline{a}$ ל- $\underline{b}$ כאדם המהלך כשהוא זקוף כאשר נקודת המוצא של הווקטורים, הנקודה K , נמצאת לשמאלו (ציור כ״ט).

הזווית φ תחשב אז חיובית, $0 < \varphi$ (כמובן נדון רק ב- $\varphi < 180°$).

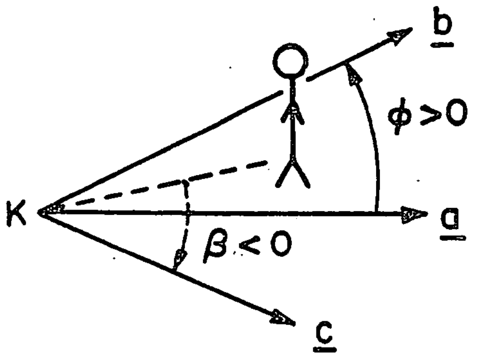
באשר לזווית β בין המישור $\underline{a}\,\underline{b}$ והווקטור $\underline{c}$, היא נקבעת על פי כיוונו של הווקטור $\underline{c}$. אם $\underline{c}$ מכוונת כלפי מעלה ביחס למישור $\underline{a}\,\underline{b}$, כלומר לצד ראש ההלך, אז תחשב β כחיובית, ואתה $\sin\beta > 0$.
(בקיצור $\beta > 0$, $\sin\beta > 0$) (β יכולה להיות לכל היותר 90°).



ציור כ"ט

במצב כזה מקבלים $\varphi > 0$, $\beta > 0$

ולכן $\sin\Omega = \sin\varphi \cdot \sin\beta > 0$



ציור ל'1

אם נמצא הווקטור $\underline{c}$ מתחת למישור $\underline{a}\,\underline{b}$, ז״א בכיוון רגלי ההלך

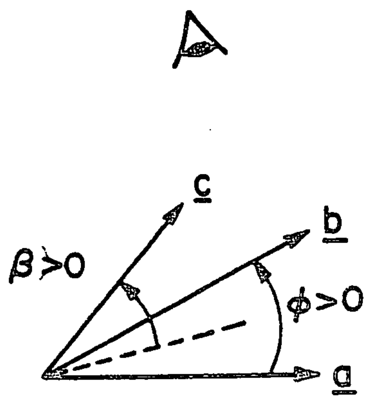
(ציור ל׳1) אזי $\beta < 0$ ומקבלים

$$\sin\Omega = \underset{(+)}{\sin\varphi} \cdot \underset{(-)}{\sin\beta} < 0$$

יש דרך אחרת להגדרת הסימן האלגברי של $\sin\Omega$.
נתבונן במישור $\underline{a}\,\underline{b}$ מכיוון הניצב למישור (ציור ל׳ 2).
נראית שם עין הצופה אל השלישיה ($\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$)

ובפרט אל המישור $\underline{a}\,\underline{b}$.
הווקטור $\underline{c}$ מכוון אל הצד של העין הצופה.

במצב כזה תוגדר הזווית β להיות חיובית.



ציור ל'2

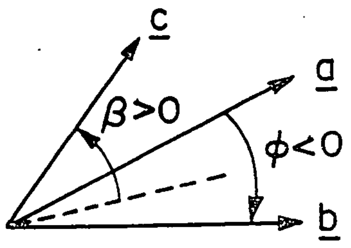
אילו היה $\underline{c}$ מכוון לצד הנגדי לעין הצופה היה β נחשב לשלילי. הזווית φ תחשב חיובית אם המעבר מ- $\underline{a}$ ל- $\underline{b}$ הוא בניגוד למגמת מהלך מחוגי השעון (ציור ל׳ 2).
ותחשב שלילית אם המעבר מ- $\underline{a}$ ל- $\underline{b}$ הוא במגמת מהלך מחוגי השעון (ציור ל״א).

לכן בסיכום:

במצב המתואר בציור ל' 2 מתקיים

$$\sin\Omega = \sin\varphi \cdot \sin\beta > 0$$

(+)   (+)



ציור ל"א

ואילו במצב של ציור ל"א

קיים

$$\sin\Omega = \sin\varphi \cdot \sin\beta < 0$$

(-)   (+)

ברצוני להודות לפרופ' דניאל ברנד על שקרא את כתב היד והעיר הערות רבות ומועילות. כמו כן אביע את תודתי לו ולפרופ' טדי אייזנברג על התענינותם ועידודם בעבודתי. שניהם מהמחלקה למתמטיקה ומדעי המחשב באוניברסיטת בן-גוריון בנגב.

אי - שויונים

א. אלט (אשדוד)

I. כמה אי שויונים פשוטים מאד

נתחיל מאי-שויון טריביאלי וידוע לכל אחד:

עבור כל x,y ממשיים, קיים

$$(x^2+y^2)/2 \geq xy \qquad (1)$$

עם שויון אך ורק כאשר $x=y$.

<u>הוכחה:</u>

$$(x^2+y^2)/2 - xy = \frac{1}{2}(x-y)^2$$

מזה נובע כי עבור כל $a,b\geq 0$ קיים

$$(a+b)/2 \geq \sqrt{ab} \qquad (2)$$

ושויון אך ורק כאשר $a=b$ (ניתן לכתוב $x=\sqrt{a}$, $y=\sqrt{b}$).

למרות פשטותו המוחלטת ניתן להסיק מאי-שויון זה מסקנות רציניות.

<u>דוגמה:</u> עבור $a_1, a_2, a_3, a_4 \geq 0$ קיים

$$(a_1+a_2+a_3+a_4)/4 \geq (a_1 a_2 a_3 a_4)^{1/4} \qquad (3)$$

ושויון רק כאשר $a_1=a_2=a_3=a_4$.

כי אם נכתוב $a = (a_1 + a_2)/2$, $b = (a_3 + a_4)/2$, ונפעיל את (2),

נקבל

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)/4 &= (a + b)/2 \\ &\geq (ab)^{1/2} \\ &= \left(\frac{a_1+a_2}{2} \cdot \frac{a_3+a_4}{2}\right)^{1/2} \\ &\geq (\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_3 a_4})^{1/2} \qquad \text{שוב לפי (2)} \\ &= (a_1 a_2 a_3 a_4)^{1/2}\end{aligned}$$

וגם ברור שכדי שיתקיים שויון דרוש ש- $(a+b)/2 = (ab)^{1/2}$,

$$(a_1+a_2)/2 = (a_1a_2)^{1/2}$$

$$(a_3+a_4)/2 = (a_3a_4)^{1/2}$$

ואלה גוררים

$$a_1=a_2=a_3=a_4$$

ברור כי נוכל להמשיך בטיעון זה ולהסיק כי עבור כל $n = 2^k$, כאשר k הוא מספר טבעי, יהיה

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n \geq (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} \tag{4}$$

אם שויון רק כאשר $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

אמנם הוכחנו כבר את (4) עבור $k=1,2$ וקל מאוד להמשיך בדרך דומה ולהוכיח אותו עבור כל k טבעי בדרך האינדוקציה. המעבר מ-$(k-1)$ ל-k דומה בדיוק להוכחה דלעיל עבור המעבר מ- $k=1$ ל- $k=2$ ולא נרחיב עליו את הדיבור יותר. ניתן להסיק כמה מסקנות.

<u>**דוגמה:**</u> עבור כל a, b, c ממשיים, קיים

$$a^4+b^4+c^4 \geq abc\,(a+b+c)$$

<u>**הוכחה:**</u> מ- (1) נובע כי

$$b^4 + c^4 \geq 2b^2c^2$$

וכמובן

$$c^4 + a^4 \geq 2c^2a^2$$

וגם

$$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$$

אם נחבר את שלושה אלה, נקבל

$$a^4+b^4+c^4 \geq b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2$$

אבל

$$c^2 a^2 + a^2 b^2 \geq 2\sqrt{a^4 b^2 c^2} = 2a^2 bc$$

בדרך דומה

$$a^2 b^2 + b^2 c^2 \geq 2ab^2c$$
$$b^2 c^2 + c^2 a^2 \geq 2abc^2$$

נחבר את שלושה אלה ונקבל

$$b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2 \geq abc\ (a+b+c)$$

בהמשך נסתמך על המשפט הכללי הבא:

משפט: יהיו $f(x)$, $g(x)$ שתי פונקציות מונוטוניות עולות בתחום כלשהו, אזי, עבור כל x_1, x_2 בתחום הזה יהיה

$$\{f(x_1) - f(x_2)\} \cdot \{g(x_1) - g(x_2)\} \geq 0 \qquad (5)$$

ההוכחה ברורה כי עבור $x_1 > x_2$ יהיו שני הגורמים חיוביים ועבור $x_1 < x_2$ יהיו שניהם שליליים. רואים מיד כי עבור $x_1 = x_2$ יהיו כולם אפס. אם ניקח $f(x) = x^4$, $g(x) = x$ נקבל, עבור כל $x, y \geq 0$,

$$(x^4 - y^4)(x-y) \geq 0$$

כלומר

$$x^5 + y^5 \geq x^4y + xy^4$$

עכשיו יהיו $a,b,c \geq 0$. אזי יהיה

$$a^5 + b^5 \geq a^4b + ab^4$$
$$b^5 + c^5 \geq b^4c + bc^4$$
$$c^5 + a^5 \geq c^4a + ca^4$$

כמו קודם נקבל (בעזרת חיבור)

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq \frac{1}{2}\{(a^4b+bc^4) + (b^4c+ca^4) + (c^4a + ab^4)\}$$
$$\geq (a^4 b^2 c^4)^{1/2} + (a^4 b^4 c^2)^{1/2} + (a^2 b^4 c^4)^{1/2}$$
$$= a^2 bc^2 + a^2 b^2 c + ab^2 c^2$$
$$= abc\ (bc + ca + ab)$$

II. שיטות אנליטיות

שוב נתחיל בדוגמה פשוטה:

יהיו a,b,c מספרים חיוביים ו- $a + b + c = 1$

מהו הערך המירבי של

$$? \sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}$$

ניתן להסיק את פתרון הבעיה הזאת מהעובדה שעבור כל $x, y, z \geq 0$ קיים

$$(x+y+z)/3 \leq \{(x^2+y^2+z^2)/3\}^{1/2}$$

אי-שויון זה שקול ל-

$$3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$$

אבל זה ברור, כי

$$3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2 = 2(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)$$
$$= (x-y)^2+(z-x)^2+(x-y)^2$$
$$\geq 0$$

ושויון רק כאשר $x=y=z$.

אם נציב $z=\sqrt{4c+1}$, $y=\sqrt{4b+1}$, $x=\sqrt{4a+1}$
נראה כי

$$\{\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\}/3 \leq \{\frac{4(a+b+c)+3}{3}\}^{1/2}$$
$$=(7/3)^{1/2}$$

ולכן

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \leq \sqrt{21}$$

ויתקיים שויון אם ורק אם

$$a=b=c=1/3$$

אבל נוכל להגיע לאותה מסקנה בדרך אנליטית שהיא פחות אלמנטרית אבל ניתנת לישומים רחבים מאוד.
ניקח מספר חיובי t כלשהו. מ - (1) נובע כי

$$\sqrt{(4a+1)t} \leq \frac{1}{2}(4a+1+t)$$

עם שויון אם ורק אם $t=4a+1$. כמו כן

$$\sqrt{(4b+1)t} \leq \frac{1}{2}(4b+1+t) \quad , \quad \sqrt{(4c+1)t} \leq \frac{1}{2}(4c+1+t)$$

ומכאן

$$\sqrt{(4a+1)t} + \sqrt{(4b+1)t} + \sqrt{(4c+1)t} \le \frac{1}{2}\{4(a+b+c)+3+3t\}$$
$$= \frac{1}{2}(7+3t)$$

יוצא כי

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \le \frac{7+3t}{2\sqrt{t}}$$
$$= (7t^{-1/2} + 3t^{1/2})/2$$

עם שויון רק כאשר $t = 4a+1 = 4b+1 = 4c+1$

כלומר $t = 7/3$, $a = b = c = 1/3$

אבל מ - (5) נובע כי

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \le \underset{t>0}{\mathrm{Min}} \{(7t^{-1/2} + 3t^{1/2})/2\}$$

מאידך ניתן להסיק מ - (2) שהמינימום הזה יתקבל
כאשר $7t^{-1/2} = 3t^{1/2}$, דהיינו כאשר $t = 7/3$, דהיינו ש -

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \le \sqrt{21}$$

קיימת גישה קצת שונה המאפשרת פתרון של קבוצה שלמה של בעיות.
מ - (1) נובע כי, עבור $y > 0$, קיים

$$\frac{x^2}{y} \ge 2x-y$$

עם שויון רק כאשר $x = y$. לכן עבור a, b, c חיוביים כלשהם, קיים

$$\frac{a^2}{b} \ge 2a-b,\quad \frac{b^2}{c} \ge 2b-c,\quad \frac{c^2}{a} \ge 2c-a$$

אם נחבר נקבל

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \ge a+b+c$$

עם שויון רק כאשר $a = b = c$.

לפעמים מועיל לצרף את הגישה הזאת לגישה הקודמת. ניקח $t > 0$ כלשהו, אזי עבור $y > 0$ וכל x ממשי, מתקבל

$$\frac{(tx)^2}{y} \geq 2tx - y$$

ולכן, עבור כל $t > 0$, $y > 0$, יש לנו

$$\frac{x^2}{y} \geq \frac{2^2}{t} - \frac{y}{t^2}$$

__דוגמא__: יהיו $a,\ b,\ c > 0$.

ממה שאמרנו נובע כי

$$\frac{a^2}{a+b} \geq 2a/t - (a+b)/t^2$$

עבור כל $t > 0$.

כמו כן

$$b^2/(b+c) \geq 2b/t - (b+c)/t^2$$

$$c^2/(b+a) \geq 2c/t - (c+a)/t^2$$

נחבר שלושת האי-שויונים האלה ונקבל כי

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq 2(a+b+c)(t^{-1} - t^{-2})$$

אבל

$$t^{-1} - t^{-2} = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{t}\right)$$

וערכו המירבי של זה מתקבל כאשר

$$\frac{1}{t} = \left(1 - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}$$

דהיינו $t = 2$. יוצא כי

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

III. משפט הממוצעים

המשפט טוען כי עבור כל מערכת של מספרים חיוביים, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ יהיה

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n \geq (a_1 + a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

כבר בהתחלת המאמר הזה ראינו שהדבר נכון כאשר $n = 2^k$ עבור k מספר טבעי כלשהו. עכשיו נוכיח כי אם הוא מתקיים עבור $n = N$ הוא יתקיים גם עבור $n = N - 1$. מזה נובע מיד כי הוא יתקיים גם עבור כל $n \leq N$. לכן, כדי להוכיח את המשפט עבור איזה n יספיק למצוא את k כך ש- $2^k > n$. מאחר שהמשפט מוכח עבור 2^k הוא יהיה נכון עבור n.

השיטה הזאת, מעין "אינדוקציה הפוכה" מיוחסת לפרמה (**Fermat**). אין אנחנו יודעים האם פרמה בעצמו המציא את השיטה אבל אין ספק שהשתמש בה בהצלחה רבה לפתור כמה בעיות קשות ביותר בתורת המספרים. נניח אם כן כי המשפט נכון עבור N מספרים, ונתבונן באיזו קבוצה $\{a_1, a_2, \cdots, a_{N-1}\}$ של $(N-1)$ מספרים, נגדיר

$$A = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1})/(N-1)$$

וניקח את הקבוצה

$$\{a_1\ a_2 \cdots, a_{N-1}, A\}$$

שיש בה N איברים. לפי הנחת האינצוקציה ההפוכה יהיה

$$(a_1 a_2 \cdots a_{N-1} A)^{1/N} \leq (a_1 + a_2 \cdots + a_{N-1} + A)/N$$
$$= \{(N-1)A + A\}/N = A$$

יוצא כי

$$(a_1\ a_2 \cdots a_{N-1})^{1/N} \leq A^{1-1/N}$$

ולכן

$$a_1 a_2 \cdots a_{N-1} \leq A^{N-1}$$

דהיינו

$$A \geq (a_1 a_2 \cdots a_{N-1})^{1/N-1}$$

שזה בדיוק המשפט עבור $(N-1)$. נשאיר לקורא לאשר כי גם כאן יתקיים שויון אם ורק אם כל האיברים שווים.

עכשיו ניקח מספר ממשי $x > -1$ ונגדיר

$$(m<n) \qquad a_1 = a_2 \cdots = a_m = 1 + x\ , \qquad a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots = a_n = 1$$

ממשפט הממוצעים נובע כי

$$\frac{m(1+x) + (n-m)\cdot 1}{n} \geq \sqrt[n]{(1+x)^m}$$

ושויון אם ורק אם $x = 0$

יוצא כי

$$(1+x)^{m/n} \le 1 + \frac{m}{n}x$$

ז.א. כי עבור כל $x > -1$ וכל מספר רציונלי $r < 1$, קיים

$$(1+x)^r \le 1 + rx$$

ושויון אם ורק אם $x = 0$.

מאידך אם $s > 1$ הוא מספר רציונלי נוכל לכתוב sx במקום x. מאחר ש- $\frac{1}{s} < 1$ יהיה

$$(1 + sx)^{1/s} \le 1 + \frac{1}{s} \cdot sx = 1 + x$$

דהיינו

$$(1 + x)^s \ge 1 + sx$$

בסיכום, עבור כל $x > -1$ ו- α רציונלי, יהיה

$(1+x)^\alpha \le 1 + \alpha x$ עבור $0 < \alpha < 1$

ו- $(1+x)^\alpha \ge 1 + \alpha x$ עבור $\alpha > 1$.

וניתן להרחיב את המשפט לכל α ממשי, אם ניקח מספרים רציונליים r_n, כאשר $\alpha = \lim_{n\to\infty} r_n$. מאחר שהמשפט נכון עבור כל r_n יהיה נכון גם עבור α.

IV. ממוצעים ממעלה p

נסמן ב-A קבוצה $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ של מספרים חיוביים וניקח $p > 0$ כלשהו. אנחנו מגדירים את <u>הממוצע ממעלה p</u> של A, ע"י

$$m_p(A) = m_p(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

$$= \left(\frac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}{n}\right)^{1/p}$$

בסעיף הזה נבדוק את השפעת המעלה p על הממוצע $m_p(A)$.

יהיו $p > q$ מספרים טבעיים ו- t מספר חיובי כלשהו. ממשפט הממוצעים נובע כי

$$(a_i^q \cdot t^{p-q})^{1/p} \le \frac{qa_i + (p-q)t}{p} \qquad (6)$$

ושויון רק כאשר $t = a_i$. אם נכתוב את (6) עבור כל i $(1 \le i \le n)$ ונחבר, נקבל

$$t^{\frac{p-q}{p}}\left(a_1^{q/p} + a_2^{q/p} + \cdots + a_n^{q/p}\right) \le \frac{q}{p}\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right) + \frac{n(p-q)t}{p}$$

דהיינו

$$a_1^{q/p} + a_2^{q/p} + \cdots + a_n^{q/p} \le \frac{q}{p} \cdot t^{\frac{q-p}{p}}\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right) + n\left(\frac{p-q}{p}\right) \cdot t^{q/p}$$

ואי - שויון זה יתקיים עבור כל $t > 0$.

ניקח

$$t = (a_1 + a_2 \cdots + a_n)/n = m_1(A)$$

ונקבל, אחרי קצת עבודה אלגברית

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_1^{q/p}\right)^{p/q} \le \frac{1}{n}\sum a_i$$

עכשיו נכתוב, עבור $1 \le i \le n$, $a_i = b_i^p$ ונקבל

$$\left(\frac{1}{n}\sum b_i^q\right)^{1/q} \le \left(\frac{1}{n}\sum b_i^p\right)^{1/p}$$

דהיינו שעבור $p > q > 0$ קיים

$$M_p(b_1, b_2, \cdots, b_n) \ge M_q(b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

באופן כללי הוכחנו איפוא כי עבור כל קבוצה של מספרים חיוביים $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ וכל מספר r רציונלי חיובי יהיה $M_r(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ פונקציה עולה של r.

אפשרית גם גישה נוספת. ניקח מספרים טבעיים $p > q > 0$. אזי, עבור $t > 0$ כלשהו יהיה, לפי משפט הממוצעים

$$p\, a_i^q\, t^{p-q} \le q a_i + (p-q)t$$

עכשיו נגדיר $r = \frac{q}{p} < 1$

ונקבל $a_i^r \; t^{1-r} \le r a_i + (1-r)t$

מכאן נובע כי

$$t^{1-r} \sum_{i=1}^{n} a_i^r \le r \sum_{i=1}^{n} a_i + n(1-r)t$$

נכתוב $M = \sum_{i=1}^{n} a_i$

ומכאן $\sum_{i=1}^{n} a_i^r \le \frac{rM + n(1-r)t}{t^{1-r}}$

$$= rMt^{r-1} + n(1-r)t^r$$

זה נכון עבור כל $t > 0$ ולכן

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^r \le \underset{t>0}{\underline{\mathrm{Min}}} \left\{ rMt^{r-1} + n(1-r)t^r \right\}$$

את המינימום הזה נמצא בעזרת חשבון דיפרנציאלי

$$r(r-1)Mt^{r-2} + nr(1-r)t^{r-1} = 0$$

ז.א.

$$t = M/n$$

ולכן

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^r \le \frac{rM + M(1-r)}{(M/n)^{1-r}}$$

$$= \frac{M^r}{n^{r-1}}$$

ז.א.
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} a_i^r \le \left(\frac{1}{n}\sum a_i\right)^r \qquad (7)$$

אם נציב $a_i = b_i^p$ נוכל לכתוב את (7) בצורה יותר כללית, כלומר

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q} \le \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p} \qquad (8)$$

עבור $p > q$,

משמעותו של האי-שויון (8) הוא שהפונקציה

$$M_p(b_1, b_2 \cdots, b_n)$$

היא פונקציה עולה של p, וקבועה אך ורק כאשר $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

V. חיבור כפול

<u>משפט:</u> יהיו $p_1, p_2, \cdots, p_n$ מספרים כלשהם, אזי

$$\sum_{1\le i<j\le n} (p_i + p_j) = (n-1)\sum_{i=1}^{n} p_i \qquad (9)$$

<u>הוכחה:</u> עבור r איזשהו $(1 \le r \le n)$ נספור כמה פעמים מופיע p_r בסכום הכפול שבאגף השמאלי של (9) למעשה הוא יופיע באברים $(p_r + p_s)$ עבור $r + 1 \le s \le n$, שהם $(n - r)$ במספר, וגם באברים $(p_t + p_r)$ עבור $1 \le t < r$ ואלה $(r - 1)$ במספר. יוצא כי מספר ההופעות של p_r הוא

$$(n - r) + (r - 1) = n - 1$$

וזה לכל r. המסקנה מיידית.

עכשיו יהיו $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ שתי קבוצות של מספרים. ברור כי

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{1\le i<j\le n} a_i b_j + \sum_{1\le j<i\le n} a_i b_j$$

אבל ע"י החלפת האינדקסים j , i אפשר לראות ש -

$$\sum_{1\le j<i\le n} a_i b_j = \sum_{1\le i<j\le n} a_j b_i$$

ולכן נוכל לכתוב

$$\sum_{1\le i<j\le n} (a_i b_j + a_j b_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \qquad (10)$$

<u>**דוגמא:**</u> תהיה $f(x)$ פונקציה עולה של x בתחום $x \ge 0$. אם ניקח $g(x) = x$ באי-שויון (5) למעלה נקבל כי, עבור כל $x_i , x_j > 0$ יהיה

$$(x_i - x_j) \cdot \{f(x_i) - f(x_j)\} \ge 0$$

ולכן

$$0 \le \sum_{1\le i<j\le n} (x_i - x_j) \cdot \{f(x_i) - f(x_j)\}$$

$$= \sum_{1\le i<j\le n} \{x_i f(x_i) + x_j f(x_j)\} - \sum_{1\le i<j\le n} \{x_i f(x_j) + x_j f(x_i)\}$$

$$= (n-1) \sum x_i f(x_i) - \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} f(x_j) - \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\right\}$$

לפי (9) ו-(10) דלעיל. מכאן נובע כי

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} f(x_j)$$

ומאחר שכל ה- x_i חיוביים אנחנו מסיקים כי

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

ניתן להסיק מאי-שויון זה מסקנות רבות, אבל נסתפק כאן בדוגמא אחת. ניקח

$$f(x) = \ln x$$

ונקבל

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} \ln x_j$$
$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \ln\,(x_1\ x_2 \cdots x_n)$$

במילים אחרות

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \geq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

מסביב לבעיה "רחובות בת מאה"

דוד רימר (רחובות)

בעתוננו, בגליון מס' 18, תשרי תשנ"א, פורסמה הבעיה הבאה (ציור 1): אם מתברים כל שתי אותיות שכנות בקטע אנכי או אופקי, ניתן לקרוא n פעמים את הביטוי "רחובות בת מאה". מהו n המירבי? מטרת המאמר הנוכחי הוא לדון ברעיונות להתרת הבעיה.

ר

ר ח ר

ר ח ו ח ר

ר ח ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ב ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ב ת ב ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ב ת מ ת ב ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ב ת מ א מ ת ב ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ב ת מ א ה א מ ת ב ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ב ת מ א מ ת ב ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ב ת מ ת ב ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ב ת ב ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ב ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ח ר

ר ח ו ח ר

ר ח ר

ר

ציור 1

I. א. מובן מאליו כי הכוונה היא לקריאה בכל הכיוונים: מימין לשמאל, משמאל לימין, מלמעלה למטה ומלמטה למעלה.

ב. מהעובדה כי הציור הוא מעוין, צורה סימטרית ביחס לאלכסונים, נובעת התובנה כי מוטב להתייחס תחילה לחלק מהציור, להפיק ממנו לקחים להתרה ואח"כ לעבור למעוין השלם. לכן נתרכז במשולש אשר בציור 2. בחרנו במשולש זה, דווקא, בגלל שאין בו קריאה משמאל לימין שהיא פחות נוחה, ועלולה לשבש תפיסת העיקרון.

ג. יתר על כן, כדי להקל עוד יותר, נפחית את הכמות ונשאיר בעינה את המהות. לכן נתייחס רק לחלק מהמשולש שבציור 2, דהיינו למשולש שבציור 3 בו ניתן לקרוא רק את השם "רחובות".

II. א. כדי לקרוא את הביטוי הנתון, טבעי להתחיל מה"ר". אבל היות וה"ר" קיימת בציור 3, שש פעמים, נוצרת לנו דילמה: מאיזה "ר" נתחיל? לכן, טוב לוותר עכשיו על ה"ר" ולהתחיל מה"ת" שבסוף המלה "רחובות", בגלל שהיא ה"ת" היחידה בציור, ממנה נתקדם "לאחור" לכיוון ה"ר" שבראש השם "רחובות".

ר
ר ח
ר ח ו
ר ח ו ב
ר ח ו ב ו
ר ח ו ב ו ת
ר ח ו ב ו ת ב
ר ח ו ב ו ת ב ת
ר ח ו ב ו ת ב ת מ
ר ח ו ב ו ת ב ת מ א
ר ח ו ב ו ת ב ת מ א ה

ציור 2.

ר
ר ח
ר ח ו
ר ח ו ב
ר ח ו ב ו
ר ח ו ב ו ת

ציור 3.

ב. כדי לעבור מה״ת״ ל-״ו״ הקודמת לה מיד, ישנם שני מסלולים: ימינה ולמעלה, ובזה קראנו שתי האותיות ״ות״ שבסוף השם. מה - ״ו״ צריך להתקדם לאות ״ב״ הקודמת לה, שוב ישנם שני מסלולים: ימינה ולמעלה. וכך כדי לקרוא את שלושת האותיות ״בות״ שבסוף השם ניתן לעבור באחד מ- $2^2 = 4$ מסלולים דהיינו: ״ב ו ת, ״ב ״ב ו ״ב
ו
ת״ ת״ ו ת״

מה - ״ב״ אליה הגענו באחד מארבעת המסלולים, כדי לעבור ל- ״ו״ שלפני ה״ב״, אנו רואים כי כל אחד מארבעת המסלולים מתפצל לעוד שני מסלולים ובזה ״השגנו״ 4 אותיות באחד מ - $2^3 = 8$ מסלולים. אל ה״ח״ שלפני ה״ו״ מגיעים שוב באחת משתי דרכים, אזי ישנם עד כה $2^4 = 16$ מסלולים וכשעוברים ל״ר״ שבראש השם ״רחובות״, ניתן לעבור שוב באחת משתי הדרכים ובאופן זה, כדי לקרוא את כל השם ״רחובות״ ניתן לעבור על אחד מ- $32 = 2^5$ מסלולים.

ג. נעיר כי במלה ״רחובות״ ישנן 6 אותיות והמעריך של 2 הוא 5, ז.א. מספר אותיות המלה, פחות 1. מכאן נובע כי ניתן לעבור באחד מ - 2^{10} מסלולים כדי לקרוא את כל הביטוי ״רחובות בת מאה״ המכיל 11 אותיות (ציור 2).

ד. עד כה דנו רק במשולש אחד, אבל במעוין ישנם 4 משולשים שהם זהים מבחינת תוכן הכתוב בהם - והשינוי היחיד הוא רק כיוון הכתיב, שאליו אין אנו מתייחסים כלל וכלל. נובע כי במעוין יש לספור $4 \cdot 2^{10}$ מסלולים, אלא אם כן ספרנו, אולי, מסלול אחד פעמיים. למעשה לאורך כל חצי אלכסון של המעוין, יש ביטוי השייך לשני משולשים שכנים. לכן המספר המדויק של המסלולים הוא $4 \cdot 2^{10} - 4 = 4(2^{10} - 1) = 4092$.

III. א. בסעיף II הקודם, קראנו את השם ״רחובות״ בלכתנו אחורנית מה - ״ת״ שבסוף השם ל ״ר״ שבראשו. נקרא עכשיו באופן טבעי את השם רחובות מה - ״ר״ ל - ״ת״, ונשווה את התוצאות, ואת השיטות.

ב. כדי להכליל, נחליף את ששת האותיות מהמלה ״רחובות״ באות a עם שני אינדקסים, ז.א. a_{ij} כאשר האינדקס i מצביע על השורה (האופקית) בה נמצאת האות והאינדקס j מצביע על הטור (האנכי) בה נמצאת האות (ציור 4). האות ״ר״ שבציור 3 הוחלפה כאן ב- a_{ij}, עם $i + j = 7$. כדי שנקודת הזינוק של המסלולים תהיה ״ר״, נתחיל את

המסלולים מה - a_{ij} שעל היותר.

וכדי להגיע, בסוף המסלול ל - "ית" שבקודקוד הזוית הישרה, נצטרך להתקדם כל פעם לכיוון ה - a_{11} שבקודקוד הזוית הישרה.
לכן כל מסלול מתחיל מ - a_{ij} כלשהו שעל היותר ומתקדם לכיוון אחד הניצבים, ז.א. שמאלה או למטה.
כל סטיה, ז.א. כל "עליה" לכיוון היתר מרחיקה אותנו מה - a_{11} שצריך להיות הנקודה הסופית,
ולכן היא טעות בבניית המסלול.

$$\begin{array}{llllll}
a_{61} & & & & & \\
a_{51} & a_{52} & & & & \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & & & \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16}
\end{array}$$

ציור 4

להדגמה, נבנה את המסלולים היוצאים מן a_{16} ו-a_{25}. ונרשום את החיצים המתאימים.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{21} & \leftarrow & a_{22} & \leftarrow & a_{23} & \leftarrow & a_{24} & \leftarrow & a_{25} & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
a_{11} & \leftarrow & a_{12} & \leftarrow & a_{13} & \leftarrow & a_{14} & \leftarrow & a_{15} & \leftarrow & a_{16}
\end{array}$$

נכתוב גם בנפרד את המסלולים, כאשר נפרט בהם רק את הנקודות בהן קיים שינוי בכיוון החיצים

$$a_{11} \leftarrow a_{14} \leftarrow a_{24} \leftarrow a_{25} \;;\; a_{11} \leftarrow a_{15} \leftarrow a_{25} \;;\; a_{11} \leftarrow a_{16}$$

$$a_{11} \leftarrow a_{21} \leftarrow a_{25} \;;\; a_{11} \leftarrow a_{12} \leftarrow a_{22} \leftarrow a_{25} \;;\; a_{11} \leftarrow a_{13} \leftarrow a_{23} \leftarrow a_{25}$$

כפי שרואים בדיאגרמות האלה, קיים מסלול אחד, בקו ישר, היוצא מן a_{16} וקיימים 5 מסלולים בקוים שבורים, היוצאים מן a_{25}.

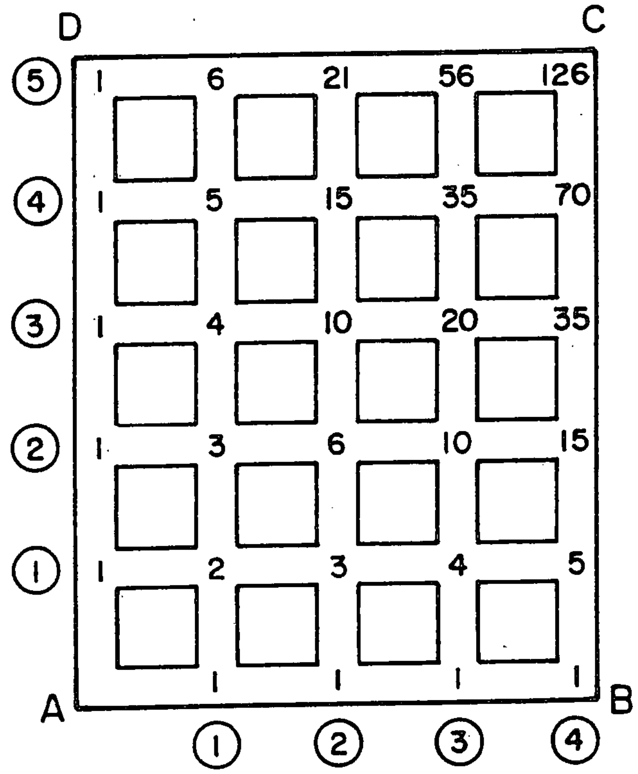
אנחנו ממליצים לקורא להמשיך בבניית המסלולים היוצאים משאר הנקודות שעל היתר וימצא כי מ- a_{34} ומ- a_{43} יוצאים 10 מסלולים, מ- a_{52} יוצאים 5 מסלולים ומ- a_{61} יוצא מסלול אחד (שהוא בקו ישר).
לכן, מספרי המסלולים היוצאים מהנקודות a_{ij} שעל היתר הם: 1, 5, 10, 10, 5, 1 וסכומם הוא $2^5 = 32$.

ג. התוצאה הסופית זהה לתוצאה שבסעיף I, אבל היא נותנת לנו גם אינפורמציה מלאה על מספר המסלולים היוצאים מכל "נקודה" שעל היתר, דבר שהשיטה הראשונה לא היתה מסוגלת לתת.

ד. נציין עוד כי אם נחשב $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ נראה כי המקדמים הינם בדיוק אותם המספרים שקבלנו גם לעיל בבעית המסלולים, דהיינו C_5^n, עם $n = 0, 1, \ldots, 5$. באופן דומה לגמרי, עבור $(a+b)^{10}$ נקבל את המקדמים C_{10}^n, עם $n = 0, 1, \ldots, 10$, בדיוק אותם מספרים שמתקבלים בבעית המסלולים כאשר מתיחסים לכל הביטוי "רחובות בת-מאה" בעל 11 אותיות.

IV. הבעיה בה עסקנו ופתרנוה בשתי שיטות שונות, ניתנת לשינויים ב"לבוש החיצוני", תוך שמירה קפדנית על הגרעין המתמטי. הנה מספר דוגמאות.

א. על שטח קרקע מלבני, בונים שכונה חדשה, שרחובותיה ושדרותיה מקבילות לצלעות השטח המלבני. בציור 5 מצוירת סכימת השכונה בה 4 רחובות בכיוון אחד ו- 5 שדרות בכיוון השני. בכמה מסלולים שונים בעלי אורך מינימלי ניתן להגיע מהפינה A של השכונה, לכל אחד מצמתי השכונה?



ציור 5

התרה. אם P, Q, R שלושה צמתים שכנים $(PR \parallel AB,\ QR \parallel AD)$ ואם מסמנים ב- $m(\alpha)$ את מספר המסלולים המינימליים בהם ניתן להגיע מ- A לצומת α, אז קיימת הנוסחה המידית

$$m(R) = m(P) + m(Q) \qquad (1)$$

לכל צומת ברחוב הצמוד ל- AB ובשדרה הצמודה ל - AD ניתן להגיע רק במסלול אחד. נרשום על הציור 4, את המספר 1 בצמתים האלה. נשתמש בנוסחה (1) ונקבל מיד, זה אחר זה, את המספרים 2, 3, 4,....... שנרשום בצמתים שברחוב הסמוך (שבשדרה הסמוכה). ממשיכים באופן זה ורושמים בכל הצמתים את המספרים המתאימים הנותנים את מספרי המסלולים המינימליים בהם ניתן להגיע מ- A לאותם צמתים.

נמספר את הרחובות (השדרות) ב: ... (3) , (2) , (1) לאורך AB ולאורך AD בהתאמה. רואים בקלות כי בצומת בו נחתכים הרחוב מס. (i) עם השדרה מס. (j), מספר המסלולים הרשום מהווה בדיוק $C^{j}_{i+j} = C^{i}_{i+j}$ (בדוק!).
אם נעביר ישר משופע ל- AD, העובר במספר k בשדרה מס. (1) אז המספרים שבצמתים לאורך ישר זה הם מקדמי הבינום $(a+b)^k$,(כאשר $k = 5$) כולם או חלקם. (בדוק !)

ב. בגן ציבורי בצורת ריבוע ישנן n^2 ערוגות ריבועיות שוות וביניהן שבילים, כל שביל מקביל לאחת מצלעות הריבוע המקיף את הגן. לאורך אחד מאלכסוני הגן הריבועי, ב״נקודות״ בהן נחתכים זוגות של שבילים, קבועים עמודי תאורה מיוחדים. בכמה מסלולים שונים בעלי אורך מינימלי ניתן להגיע מפינה בלי עמוד תאורה לכל אחד מעמודי התאורה?

(**פתרון:** $C^0_n = 1,\ C^1_n,\ C^2_n, \cdots C^n_n = 1$)

ג. נתונות הקבוצות $B = \{1,0\}$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ והפונקציה $F = \{f : A \to B\}$
כאשר $a_1, a_2, \cdots a_n$ נורות ו- f פונקציות המגדירות מצבי הנורות, דהיינו: $f(a_i) = 1$ מסמנת כי הנורה a_i דולקת ו- $f(a_i) = 0$ מסמנת כי a_i כבויה. מהו מספר הפונקציות f?

פתרון: הרעיון מתברר כבר עבור $n = 3$, לכן נכתוב את כל הפונקציות f, במקרה $n = 3$.

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
a_1	1	1	0	1	1	0	0	0
a_2	1	1	1	0	0	1	0	0
a_3	1	0	1	1	0	0	1	0

מספר הפונקציות הוא $2^3 = 8$ ובמקרה הכללי הוא 2^n.

ד. הבעיה הקודמת ניתנת גם לניסוח נוסף.
נתונה הקבוצה $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. מצא את מספר תת-הקבוצות שלה.

<u>**פתרון:**</u> גם כאן מספיק להתייחס למקרה $n = 3$. מהטבלה דלעיל מתקבל כי תמונת כל אחת מהפונקציות $f_1, \dots, f_8$ מצביעה על תת-קבוצה מסוימת של A, דהיינו תת-קבוצת הנורות הדולקות. ז.א. כי ישנן $2^3 = 8$ תת-קבוצות. בדרך-כלל כאשר A היא בעלת n איברים, יש לה 2^n תת-קבוצות.

ה. נגדיר כ״מילה״ כל קבוצה של אותיות מאלף-בית מסוים, אפילו אם אין לה משמעות בשפה הרגילה. נשאלת השאלה: כמה מילים בנות 2 אותיות שונות ניתן לבנות מהאלף-בית העברי, בלי האותיות הסופיות?

פתרון: מדובר למעשה במספר התמונות של הפונקציות $f: A \to B$, כאשר $A = \{$א, ב, ..., ת$\}$, B היא קבוצה של שני מקומות ריקים, ז.א. $B = \{ - , - \}$, וע״י הפונקציות f מציבים שתי אותיות שונות מ- A במקומות הריקים מ- B.

תשובה: $2^{22} = 4{,}194{,}304$

1. יצור חד-תאי מסוים מתחלק אחרי פרק זמן קבוע והופך לשני יצורים זהים לו. תהליך זה חוזר על עצמו גם עם שני היצורים ה״צעירים״וממשיך באופן דומה n פעמים. מהו n המינימלי כדי שמיצור אחד יתקבלו לכל הפחות 1,000,000 יצורים?

פתרון: $2^x > 1.000.000 \Rightarrow x \log 2 > 6 \log 10 = 6 \Rightarrow x > \frac{6}{\log 2} \approx 19.9 \Rightarrow x = 20$

2. (בשינוי קל מתוך החוברת ״הסתברות חלק ב״, מאת: ארזה זליג ונורית הדס, מכון ויצמן למדע, המחלקה להוראת המדעים (1990)).

נתון כי ההסתברות שיהיה יום גשום במקום מסוים, בתקופה מסוימת היא 0.2 ז.א. P(ג) = 0.2 כאשר ״ג״ מסמן יום גשום. אם ב מסמן יום בהיר, אז P(ב) = 0.8.

נרשום קודם את כל האפשרויות לפרק זמן של שלושה ימים - שיהיו ימים גשומים או בהירים ואח״כ את ההסתברויות המתאימות. כל הארועים האפשריים הם:

(ב∩ב∩ב) ∪ (ג∩ב∩ב) ∪ (ב∩ג∩ב) ∪ (ב∩ב∩ג) ∪ (ג∩ג∩ב) ∪ (ג∩ב∩ג) ∪ (ב∩ג∩ג) ∪ (ג∩ג∩ג)

ההסתברויות המתאימות לארועים האלה הן:

P(ג ∩ ג ∩ ג) = 0.2^3

P[(ג ∩ ג ∩ ב) ∪ (ג ∩ ב ∩ ג) ∪ (ב ∩ ג ∩ ג)] = $3 \cdot (0.2)^2 \cdot 0.8$

P[(ג ∩ ב ∩ ב) ∪ (ב ∩ ג ∩ ב) ∪ (ב ∩ ב ∩ ג)] = $3 \cdot 0.2 \cdot (0.8)^2$

P(ב ∩ ב ∩ ב) = 0.8^3

סך הכל, סכום ההסתברויות לכל הארועים האפשריים הוא:

$$0.2^3 + 3 \cdot (0.2)^2 \cdot 0.8 + 3 \cdot 0.2 \cdot (0.8)^2 + (0.8)^3 = (0.2 + 0.8)^3 = 1^3 = 1$$

הערה: שבע הבעיות שנתנו כאן, אף על פי שמתייחסות לנושאים די רחוקים אחד ממשנהו, יש להן גרעין מתמטי משותף.

על״ה

על״ה דן בנושאים הקשורים לתוכנית המתמטיקה החדשה לחטיבה העליונה.
מתפרסמים בו, בין השאר:

* מאמרים על היבטים תיאורטיים, דידקטיים והסטוריים של פרקי לימוד שונים.
* הצעות לתרגילים נוספים ופתרונות של בעיות קשות
* דוגמאות של מבחנים (כולל בחינות בגרות)
* הצעות של מורים לשיפור ההוראה
* ממצאים של מחקרי הערכה.

מחיר של מינוי שנתי (שני גיליונות): -.24 ש״ח.

עלון למורה המתמטיקה

לכבוד
מערכת העלון למורי המתמטיקה
המרכז הישראלי להוראת המדעים
האוניברסיטה העברית, גבעת רם,
ירושלים 91904

אבקשכם לרשום אותי כמנוי על העלון למורי המתמטיקה לשנת תשנ״א.

שם ______________ ביה״ס ______________

כתובת פרטית ______________________________

אני מלמד(ת) לפי התוכנית החדשה: כן / לא.

מצ״ב המחאתי מס׳ ____________ ע״ס -.24 ש״ח למינוי השנתי.

ב ב ר כ ה,

____
חתימה

״איזה שורש נפלא! הבא נקווה שימצא לו שימוש לתועלת
האנושות כולה״.