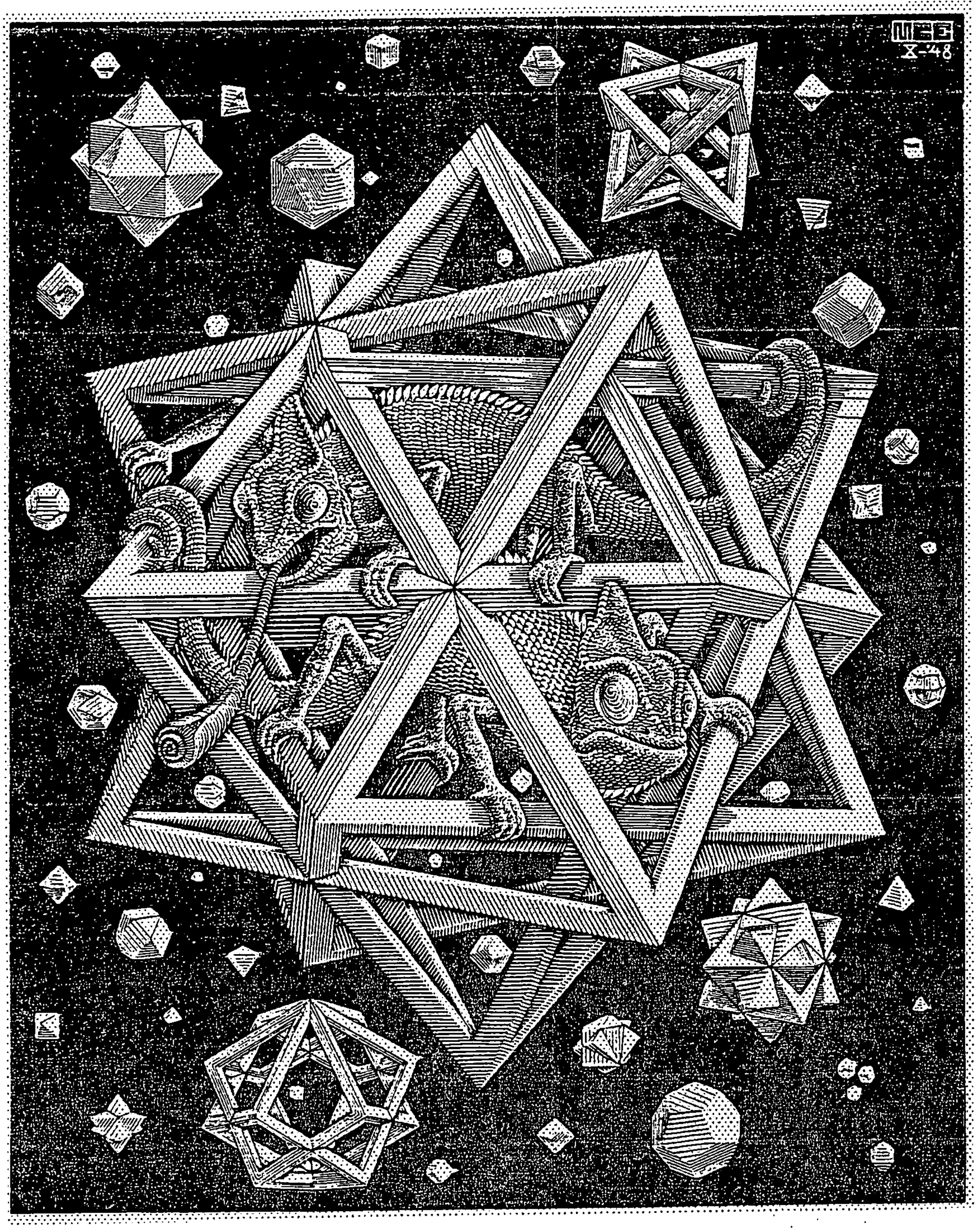
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס׳ 20

אב תשנ״א - יולי 1991



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון ויצמן למדע
רחובות

לכל המעוניין!

בתחילת שנות השבעים הופקה בטלויזיה הלימודית סדרה בשם "מתי בלש מתמטי" ובשנתיים האחרונות מככבים גיבורי סדרה זו בסיפורים הנשלחים לחברי החוג הארצי בהתכתבות של היחידה לפעולות נוער במכון ויצמן. עתה, בהוצאת היחידה לפעולות נוער יוצא ספר ובו 13 סיפורים חדשים הקרוי "להוציא מתוק ממר לא - או לא בא בחשבון". אלו הם סיפורים בלשיים הומוריסטיים שגיבוריהם הפושע הגאוני ד"ר לא, המתמטיקאי מתי מתוק וידידו פקד אלברט כהן. בכל סיפור מבצע ד"ר לא פשע מפתיע ומשאיר סדרת רמזים סתומה לכאורה, המתגרה במשטרה מתוך בטחון מלא בעליונותו השכלית. מתי מגלה ברמזים אלה תבנית מתמטית בלתי צפויה ובלתי שגרתית ובעזרתה מפענח את הפשע. לקורא ניתנת האפשרות בכל שלב לנסות ולגלות בעצמו את המבנה המתמטי או להתקדם עם מתי בשלבים ההדרגתיים של הפתרון. אף שהצד המתמטי הוא יצירתי אין הוא מבוסס על "מתמטיקה גבוהה" ולתלמידי כתות עליונות בביה"ס היסודי ובודאי לתלמידי ביה"ס התיכון יש בסיס מוצק להבין את הפתרונות, ומתוך נסיוננו בחוגים גם לפתור באופן עצמאי.

הספר מאת אמנון זיקוב כולל כ-120 עמודים, 13 סיפורים, ועשרות איורים, שרטוטים וציורים משעשעים. המעוניינים לרוכשו ימלאו את הספח המצורף.

לכבוד
היחידה לפעולות נוער
מכון ויצמן למדע
רחובות 76100

הנני מזמין /ה את הספר "להוציא מתוק ממר לא - או לא בא בחשבון"

מצורפת בזה המחאה מס' __________ משוכה על בנק ______________________ ע"ס 25.- ש"ח

שם המזמין /ה ____________ טלפון בבית ____________________________

כתובת למשלוח ____

____
חתימה

אתגר גליונות מתמטיקה גליון מס׳ 20

תוכן העניינים

אתגר - גליונות מתמטיקה ISBN = 0334-201

מוצא לאור ע״י הפקולטות למתמטיקה במכון ויצמן ובטכניון.

המערכת:

פרופ׳ י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שימושית, מכון ויצמן.

פרופ׳ א. ברמן וד״ר צ. הראל, הפקולטה למתמטיקה בטכניון.

מען המערכת: היחידה לפעולות נוער, מכון ויצמן למדע, רחובות, 76100 טל-08-342970

דבר המערכת

עם סיום שנה״ל תשנ״א, אנו מציינים בסיפוק כי היתה זו שנה מוצלחת למדי במתמטיקה עבור הנוער בישראל, במיוחד בזירה הבינלאומית.

גם באולימפיאדה הבינלאומית למתמטיקה שהתקיימה בסין העממית ביולי 1990 וגם בתחרות הדו-לאומית נגד הונגריה בבודפסט במארס 1991 הגיעו נבחרות ישראל להישגים מכובדים ואנו תקוה כי המצב בנושא זה ילך וישתפר בעתיד. אנו שואבים עידוד מהעליה הרוסית אשר כמה צעירים מתוכה הספיקו כבר לתרום הרבה להצלחות האלה.

כה לחי!

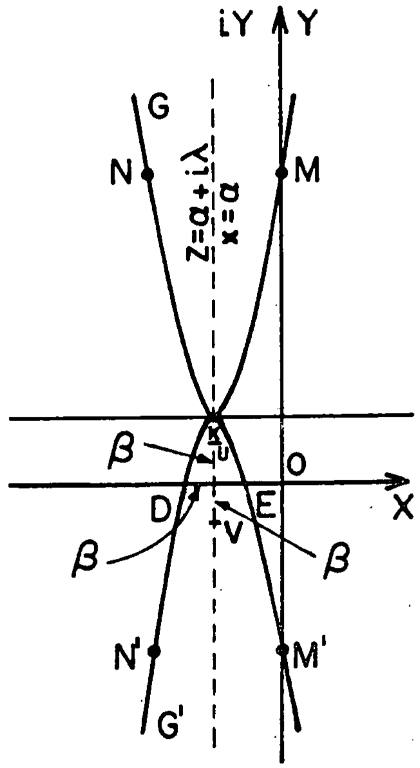
החל מגליון 21 ובמשך כל שנת תשנ״ב יהיה מען המערכת:

פרופ׳ אבי ברמן, הפקולטה למתמטיקה, הטכניון חיפה.

הערה על זוג פרבולות סימטריות

דוד רימר, רחובות

במישור P, בעל מערכת צירים ישרת זווית OXY, תהיינה G ו- G′ שתי פרבולות סימטריות ביחס למשיק t בקודקודן המשותף K (ראה ציור).



$G: y = x^2 + 8x + 20$

$z_U = -4 + 2i$

$z_V = -4 - 2i$

$G': y = - x^2 - 8x - 12$

$x_E = - 4 + 2 = - 2$

$x_D = - 4 - 2 = - 6$

I. משוואת G למשוואת G′

אם נתונה משוואתה של G

$$y = ax^2 + bx + c\,, \quad (b^2 - 4ac < 0) \qquad (1)$$

נוכיח כי משוואתה של G′ היא

$$y = - ax^2 - bx + c - \frac{b^2}{2a} \qquad (2)$$

הוכחה:

בגלל הסימטריות של G ו- G′ ביחס ל- t ,

הציר של G′ הוא בהמשך הציר של G

ואז גם הוא מקביל לציר ה- y. לכן משוואתה

של G′ היא מהסוג

$$y = mx^2 + nx + p \quad (m \neq 0) \qquad (3)$$

כדי לקבוע את הפרמטרים m , n , p

בהתאם לתנאי הסימטריה, נחוץ ומספיק

להציב ב- (3) שיעורי שלוש נקודות שונות

של G′, שהן למעשה שיקופיהן של שלוש

נקודות שונות של G (נמק למה דווקא שלוש ,

ולמה שונות!).

לנוחיותנו ניקח על G את הנקודות: $M(0,c)$ - הנקודה בה G חותכת את ציר ה- y , $N(-\frac{b}{a}, c)$

הנקודה הסימטרית ל- M ביחס לציר הסימטריה של G , $(x = -\frac{b}{2a})$,

והקודקוד $K(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$.

ידוע כי משוואת המשיק t ב-K היא $y = \frac{4ac-b^2}{4a}$ ז"א $y = c - \frac{b^2}{4a}$

קל להוכיח כי: אם (x_1,y_1) , (x_2,y_2) שתי נקודות סימטריות ביחס לישר כלשהו $y = s$,

מקביל לציר ה- x, אז בין שיעוריהן קיימים הקשרים

$$x_2 = x_1 \,,\ y_2 = 2s - y_1 \qquad (4)$$

היות ומשוואת ציר הסימטריה t היא $y = c - \frac{b^2}{4a}$, נציב ב- (4) $s = c - \frac{b^2}{4a}$ ושיעורי

הנקודות M ו- N. אז נקבל שיעורי הנקודות M' , N' הסימטריות ל- M ו- N בהתאמה ביחס

ל- t, דהיינו:

$M'(0, c - \frac{b^2}{2a})$, $N'(-\frac{b}{a}, c - \frac{b^2}{2a})$. הנקודה הסימטרית ל- K ביחס ל- t היא K בעצמה,

היות ו- K נמצאת על ציר הסימטריה t, ולכן היא נקודת שבת.

כאשר מציבים ב- (3) שיעורי הנקודות M' , N' , K מתקבלת מערכת משוואות בשלושה

נעלמים: m, n, p.

$$m \cdot 0^2 + n \cdot 0 + p = c - \frac{b^2}{2a}$$

$$m(-\frac{b}{a})^2 + n(-\frac{b}{a}) + p = c - \frac{b^2}{2a}$$

$$m(-\frac{b}{2a})^2 + n(-\frac{b}{2a}) + p = c - \frac{b^2}{4a}$$

שורשי מערכת זו הם

$$m = -a \,,\ n = -b \,,\ p = c - \frac{b^2}{2a}$$ (בדוק!)

לכן משוואת הפרבולה G' היא בדיוק (2).

II. מנקודות האפס של G לנקודות האפס של G'

בגלל ההנחה $b^2 - 4ac < 0$, פתרונות המשוואה

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (5)$$

הם $-\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$, כאשר $i = \sqrt{-1}$. אם נסמן לצורך קיצור הכתיב

$\alpha = -\frac{b}{2a}\,,\ \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$,

פתרונותיה של (5) הם $\alpha \pm i\beta$

כמו כן, פתרונות המשוואה

$$-ax^2 - bx + c - \frac{b^2}{2a} = 0 \qquad (6)$$

הם $\alpha \pm \beta$ (בדוק!). לכן נקודות האפס של הגרף G' הן:

$D(\alpha - \beta,0)$ ו- $E(\alpha + \beta,0)$ שתיהן על ציר ה- x, כמובן.

<u>הערה</u>: שיקוף הפרבולה (2) בציר ה- x היא הפרבולה:

$$y = ax^2 + bx - c + \frac{b^2}{2a} \qquad (2')$$

נקודות האפס שלה הן D ו- E.

שלושת הפרבולות $(2')$, (2) , (1) זהות אולם תופסות מקומות שונים במישור. $(2')$ מתקבלת גם מ- (1) ע"י הזזת הוקטור $\overline{V}$ במקביל ל- Oy מלמעלה למטה. ואורכו של וקטור ההזזה הוא $2y_k$ כאשר y_k הוא השיעור של הקודקד K (בדוק!).

כדי **להמחיש** גרפית את נקודות האפס של G, ז"א את הנקודות המתאימות למספרים המרוכבים הצמודים $\alpha \pm i\beta$, צריך להשתמש במישור גאוס בעל מערכת הצירים $OX(iY)$, כאשר מערכת זו מתלכדת עם המערכת OXY של המישור הממשי P. בין קבוצות הנקודות של P ושל המישור הגאוסי קיימת ההתאמה החד-חד ערכית הרגילה - T המוגדרת ע"י : $A = (x , y) \leftrightarrow z = x + iy$. בהתאמה זו, לישר $x = \alpha$ מהמישור P (ישר זה הינו למעשה ציר הסימטריה של G) מתאים, במישור הגאוסי, הישר $z = \alpha + i\lambda \quad (\lambda \in R)$ ועל ישר זה נמצאות הנקודות $U\ (\alpha + i\beta)$, $V\ (\alpha - i\beta)$ שהן נקודות האפס של G.

עכשיו נגדיר טרנספורמציה ρ במישור גאוס כך שתמונות הנקודות U , V תהיינה הנקודות E , D שעל הציר הממשי.

טרנספורמציה זו היא:

$$\rho : z = x + iy \leftrightarrow z' = x + y$$

(במישור P, הטרנספורמציה ρ מהווה למעשה סיבוב ב- $(-90°)$ של ישר מקביל ל- OY, סביב לנקודתו שעל הציר OX). עבור $x = \alpha$ ו- $y = \beta$ הטרנספורמציה הזו נותנת:

$\rho(\alpha \pm i\beta) = \alpha \pm \beta$, ז"א בדיוק $\rho(V) = D$ ו- $\rho(U) = E$.

<u>סיכום</u>

הטרנספורמציות בהן השתמשנו כאן נותנות את האפשרות **להמחיש** , בצורה גרפית במישור הממשי את קבוצת השורשים הלא ממשיים של פונקציות ריבועיות. זה יכול להועיל בהחלט מנקודת מבט אינטואיטיבית, **ואולי** לא רק אינטואיטיבית.

III. הנה תרגיל בנוגע לחומר הנ"ל.

1. על ציר המספרים נע, במשך 12 שניות, חלקיק A, כאשר נקודת הזינוק היא במרחק -61 מהראשית O. המהירות ההתחלתית היא 12 והתאוצה קבועה -2.

בדיוק באותו זמן נע על אותו ציר חלקיק אחר B, כאשר נקודת הזינוק היא במרחק 11 מהראשית O, ומהירותו ותאוצתו בכל רגע הם מספרים נגדיים למהירות ולתאוצה המתאימים של החלקיק A.

א. מצא את חוקי התנועות של A ו- B. מהו הקשר בין המקדמים המתאימים?

ב. אחרי כמה זמן A יעבור בראשית? הסבר את הפתרון שמצאת.

ג. מהתשובה של (ב), בלי אף חישוב נוסף, מצא אחרי כמה זמן B יעבור בראשית? בדוק את התוצאה ע"י החישוב המתאים של נקודות האפס של פונקצית התנועה של B.

ד. שרטט את גרפי שתי הפונקציות שקיבלת ב- (א), ובדוק גרפית את התשובה שקבלת ב- (ג).

2. נסח שאלה דומה, שתוביל לפונקציות מסוג (1) ו- (2') ופתור אותה.

__תשובות:__

(א) $y_A = -x^2 + 12x - 61 \;,\; y_B = x^2 - 12x + 11 \;,\; x \in [0,12]$

(ב) $x_{1,2} = 6 \pm 5i$. A לא יעבור אף פעם ב- 0, בגלל ש- $V_A = -2x + 12$, אז $V > 0$ עבור $0 \le x < 6$ ו- $V < 0$ עבור $6 < x \le 12$. לכן ב- $x = 6$ החלקיק משנה כיוון ומתחיל להתרחק מ- 0. עבור $x = 6$, מרחקו מ- 0 הוא $y_A = -25$ וזוהי הנקודה הקרובה ביותר ל- 0 במסלולו בן 12 שניות.

(ג) $x_2 = 6 + 5$; $x_1 = 6 - 5$, כאמור בסעיף II.

(ד) הגרפים הינם שתי קשתות של פרבולות סימטריות ביחס למשיק, בקודקודן המשותף.

__ביבליוגרפיה__

C.R, Holmes. Imagine the roots of a quadratic, The Mathematical Gazette, t.74, No. 469, October 1990, p. 285-6.

ריבועים לאטיניים ובעית השדכן

י. גיליס (רחובות)

I. מבוא

ריבוע לאטיני מסדר n הוא ריבוע של $n \times n$ כאשר כל שורה וגם כל עמודה מורכבת מתמורה (פרמוטציה) של המספרים הטבעיים מ- 1 עד n. לדוגמה נציג כאן ריבוע לאטיני מסדר 5.

1	2	3	4	5
3	5	2	1	4
4	3	1	5	2
5	1	4	2	3
2	4	5	3	1

רואים כי כל אחד מהמספרים מ-1 עד 5 מופיע בדיוק פעם אחת בכל שורה וגם פעם אחת בכל טור. מענין כי הריבועים האלה תופסים מקום מכובד דוקא בחקר החקלאות. נניח למשל שאנו רוצים לבדוק מהו הכי טוב מבין חמישה טיפולים אפשריים לגידול כותנה. דרך אחת היא לקחת חמישה שטחים ולנסות בכל אחד מהם את אחד מהטיפולים. אבל אז לא נוכל להיות בטוחים באיזו מידה הושפעו התוצאות מהבדלים בטיב הקרקע משטח אחד לשני. במקום זה נוקטים בדרך כלל בשיטה אחרת - מחלקים את השטח הכולל לפי ריבוע לאטיני ואז עבור $1 \leq r \leq 5$ מנסים טיפול מסי r בשטחים הקטנים המסומנים במספר r בריבוע זה. ואמנם כמה מהמחקרים הראשונים בבעיה של ריבועים לאטיניים פורסמו דוקא ע״י מתמטיקאים, חוקרי החקלאות!.
כאן נציג ונפתור בעיה אחת בנושא זה.

בעיה: יהיו n,s מספרים טבעיים ו- $s < n - 1$; ונתונות s תמורות שונות של הקבוצה $\{1, 2, \ldots\ldots, n\}$. אם נכתוב אותן אחת מתחת לשניה האם נוכל תמיד למצוא n-s תמורות נוספות שבעזרתן נשלים את הדיאגרמה לריבוע לאטיני?

דוגמא: ניקח n=3 , s=2 , תניח כי קבלנו את שתי השורות הראשונות

3	2	1
1	3	2

ברור שאם נכתוב עבור השורה השלישית 2 , 1 , 3, אזי נקבל באמת ריבוע לאטיני. מאידך אילו היו שתי השורות ההתחלתיות

3	2	1
3	1	2

אזי הדבר לא היה אפשרי כי בטור אחד כבר מופיע המספר 3 פעמיים.

מזה ברור שיש לקובע תנאי הכרחי:

(*) בכל אחד מ- n הטורים החלקיים הנתונים אין אף מספר שמופיע יותר מפעם אחת.

נראה בהמשך שהתנאי (*) הוא גם מספיק, אבל לשם הוכחת התשובה הזאת נצטרך לעבור קודם לשטח שונה מאוד.

II. בעית השדכן

נתונה חברה של N בחורים ולפחות N בחורות ורוצים למצוא לכל בחור בת זוג שהוא מכיר אותה. באיזה תנאים יהיה דבר זה אפשרי? ברור כי הכרחי שמספר הבנות לא יהיה קטן מזה של הבנים, אבל גם ברור כי לא די בכך. גם הכרחי כי כל בחור יכיר לפחות בחורה אחת, אחרת מאין ימצא לו בת זוג מתאימה? זה ועוד, ניקח שני בחורים כלשהם, ונניח כי כל אחד מהם מכיר בחורה אחת, גם אז לא נוכל להבטיח להם בנות זוג בלי שנדע שהבחורות שהם מכירים הן שונות אחת מרעותה. כי במקרה ששני הבחורים מכירים כל אחד רק בחורה אחת והיא אותה הבחורה, שוב מאין יוושעו? לכן נצטרך לדרוש כתנאי הכרחי כי עבור **כל זוג של בחורים, קבוצת הבחורות שהם מכירים מכילה לפחות שתי בחורות שונות.**

ניקח עכשיו שלושה בחורים A , B , C. נניח כי A מכיר רק את הבחורה α , B מכיר רק את β , ואילו C מכיר רק את α ו- β. שוב לא נוכל לשדך את A, B, ו- C, כי אין עבורם שלוש בחורות מתאימות.

לשם פשטות הניסוח נכניס את ההגדרה הבאה: אם E היא קבוצה כלשהי של בחורים ו- F הקבוצה של כל הבחורות אשר מישהו מהקבוצה E מכיר אותה, נגיד כי F מהוה את החוג המתאים ל- E, ונציין את העובדה הזאת ע"י הסימון $F = R(E)$. למשל במקרה הבלתי מוצלח דלעיל E היא הקבוצה $\{A,B,C\}$ ו- F היא הקבוצה $\{\alpha , \beta\}$ ברור כי הכשלון שם נבע מכך שהיו רק שתי בחורות ב- F מול שלושת הבחורים ב- E , ולכן אין למצוא ביניהן עזר כנגד **כל אחד** של חברי E.

מהאמור למעלה אנו רואים כי התנאי הבא הוא הכרחי כדי שתפקידו של השדכן יהיה בר ביצוע:

<u>**תנאי :**</u>

(**) עבור כל תת-קבוצה E של בחורים צריך שבחוג המתאים $F = R(E)$ של בחורות יהיה מספר הבחורות לא קטן מזה של הבחורים ב- E.

אם נסמן עבור כל קבוצה או חוג את מספר היחידים בהם ע"י הסימון $|\ |$, למשל $|E|$, $|F|$, וכו' נוכל לכתוב את התנאי ההכרחי הזה בצורה הבאה :

(**)עבור כל תת - קבוצה E של בחורים צריך ש - $|R(E)| \geq |E|$.

מה שמעניין הוא כי התנאי (**) הוא גם מספיק כדי לאפשר זיווגם של כל N הבחורים, ומטרתנו העיקרית היא להוכיח את העובדה הזאת. ההוכחה תהיה על דרך האינדוקציה.

ראשית ברור שהתנאי (**) מספיק במקרה ש- $N = 1$ (נשאיר לקורא לבדוק את משמעות הקביעה הזאת ולאשרה). עכשיו ניקח מספר טבעי M כלשהו ונניח כי התנאי (**) מספיק , כאשר $M > N$, ונוכיח את הדבר גם עבור $N = M$.

יש לנו איפוא חברה של M. בחורים ומספר בחורות המקיימת את התנאי(**). ישנן שתי אפשרויות:

(א) לכל תת-קבוצה E של בחורים p $(p < M)$ $|R(E)| = p$, יהיה F החוג $R(E)$.
נסמן ב- $\bar{E}$ את קבוצת הבחורים שאינם שייכים ל- E, ו- $\bar{F}$ חוג הבחורות שאינן שייכות ל- F.

עכשיו תהיה A תת-קבוצה **כלשהי** של E. אנו יודעים כי $|R(A)| \geq |A|$, ומאידך כל הבחורות של $R(A)$ שייכות בהכרח ל- F, מכאן נובע כי האוכלוסיה המורכבת מבחורי E ובחורות F מקיימת בזכות עצמה את התנאי (**). מאידך, אנו יודעים כי $|E| < M$ ולכן, לפי הנחת האינדוקציה, ניתן לזווג את הבחורים של E עם בנות מ- F.

עכשיו נראה כי גם האוכלוסיה המורכבת מ- $\bar{E}$ ו- $\bar{F}$ מקיימת את התנאי (**) כי אחרת נוכל למצוא תת-קבוצה X של $\bar{E}$, כך שמספר הבנות של $R(X)$ השייכות ל- $\bar{F}$ קטן מ- $|X|$. נסתכל עכשיו בקבוצה המורכבת מבחורי E יחד עם בחורי X ; נקרא לקבוצה זו Y. מי הן הבנות של $R(Y)$? הלא הן הבחורות של F יחד עם אותן בחורות $R(X)$ שאינן שייכות ל- F. אבל $|E| = |F| = p$. אם $|X| = k$ יש לנו $|Y| = p + k$ בעוד ש- $R(Y)$ מורכב מ- p הבחורות של F ומאלה מבין בחורות $R(X)$ שאינן שייכות ל- F ואשר מספרן, לפי ההנחה, קטן מ- k, יוצא איפוא כי $|R(Y)| < p+k = |Y|$, וזה סותר את העובדה כי האוכלוסיה כולה מקיימת את (**).

(ב) במקרה השני מניחים כי קיים, עבור כל קבוצה E של בחורים, $|R(E)| > |E|$. ניתן לבחור אחד, נקרא לו U, להתארס עם אחת הבחורות שהוא מכיר, נקרא לה V (אנו יודעים מ (**) כי קיימת לפחות בחורה אחת כזאת). עכשיו נסתכל במה שנשאר מהאוכלוסיה. אם זו מקיימת כשלעצמה את התנאי (**) נוכל לגמור את הענין, מאחר שמספר הבחורים הפנויים בה קטן מ- M ואפשר להסתמך על הנחת האינדוקציה. אם לא, פירוש הדבר כי קיימת תת-קבוצה E, נגיד של k בחורים, כך שאין ל- $R(E)$ k, בחורות מחוץ ל- V. אבל זה ייתכן, לאור (**),
רק אם $|R(E)| = k$ כאשר- V אחת הבנות של $R(E)$. במקרה זה נבטל את האירוסין של V עם U ונצרף את V ל- $R(E)$, ששם היא שייכת באופן טבעי, ואנו רואים כי E, ו- R (E) מחזירים אותנו למקרה של (א).

בזה גמרנו את ההוכחה. יש מקרה פרטי חשוב אשר בו מתקיים תמיד התנאי (**), והוא כשכל בחור מכיר אותו מספר בחורות, נגיד p, וכל בחורה מכירה p בחורים בדיוק. נוכיח כי במקרה זה מתמלא התנאי (**) ולכן יכול השדכן לגשת לעבודתו. נוכיח למעשה כי אם ניקח איזו תת-קבוצה של k בחורים, נגיד $B_1 , B_2 ...B_k$, אזי יכירו לפחות k בחורות. נייצג את הבחורים ע"י שורה של k נקודות B_k .... B_1 ואת הבחורות שהם מכירים ע"י שורה שניה של נקודות, נגיד G_l .... G_1 , G_2. עלינו להוכיח כי $l \geq k$.

$$B_1 , B_2 \ldots\ldots\ldots B_k$$

$$G_1 , G_2 \ldots\ldots\ldots G_l$$

אם הבחור B_i מכיר את הבחורה G_j נחבר את הנקודות B_i , G_j ע"י קו. אזי, לפי ההנחה, יהיו kp קווים היוצאים מהנקודות B_k ...... B_1 וכולם מגיעים עד אחת הנקודות G_l ...... G_1 , G_2.

עכשיו כל בחורה מהחוג הזה מקבלת בדיוק p קווים, וגם אין צורך שיהיו כולם מבחורי הקבוצה $\{B_1 ,\ldots\ldots B_k\}$. יוצא איפוא כי $pk \geq pl$, ולכן $l \geq k$.

III. __בחזרה לריבועים לאטיניים__

נניח איפוא כי הטורים המקוריים מקיימים את התנאי (*). ראשית נוכיח כי במקרה זה אפשר תמיד (כל עוד $s < n$) להוסיף שורה אחת, ז"א תמורה נוספת של $\{1 , 2 , \ldots\ldots, n\}$ כך שהתנאי (*) ימשיך להתקיים. ולכן אפשר להמשיך ולהוסיף שורות עד שנגיע לריבוע שלם. האפשרות להוסיף שורה נובעת מהמשפט שהוכחנו לגבי בעית השדכן. לשם זה נראה את המספרים מ- 1 עד n כ"בחורים" ואת הטורים החלקיים בעלי אורך s כ"בחורות". נגיד כי הבחור p "מכיר" את הבחורה q אם אין המספר p מופיע בטור החלקי q. קל לאשר כי במקרה זה "מכיר" כל בחור

$n - s$ בחורות בדיוק, ואילו כל בחורה מכירה אותו מספר בחורים. פירוש הדבר כי התנאי (*) מתקיים, וזה מבטיח את האפשרות להוסיף שורה, כל עוד $n - s > 0$, ז"א $n > s$.

__הערה:__ עלי החובה הנעימה להודות ליעקב קופיץ אשר עוד בהיותו תלמיד תיכון לפני למעלה מ- 20 שנה הפנה לראשונה את תשומת לבי לקשר בין בעית השדכן לבין הריבועים הלאטיניים.

האולימפיאדה לנוער במתמטיקה , תשנ"א

האולימפיאדה השנתית הישראלית למתמטיקה היתה אמורה להתקיים בינואר 1991 אבל נאלצנו לדחות אותה בגלל מצב החירום ששרר אז בעקבות המלחמה במפרץ הפרסי. אחרי כמה דחיות הצלחנו לקיים אותה במכון ויצמן ביום 12.3.1991. ההשתתפות היתה יותר מכל מה שידענו עד כה, בעיקר בגלל הצטרפותם של עולים מרוסיה, שהיו כשליש מבין 150 המתחרים. דאגנו מראש להכין תרגום רוסי של השאלון ורבים מבין העולים החדשים גם כתבו את הפתרונות ברוסית, ונאלצנו למצוא דוברי רוסית שיעזרו בבדיקת המחברות האלה.

להלן השאלון:

1. (10 נק')

כמה מספרים שלמים בני 5 ספרות שונות בבסיס 10, קיימים אשר הספרה האמצעית בהם היא 5 ואילו ההפרש בין הספרה הראשונה והאחרונה הוא, בערכו המוחלט 3?

2. (10 נק')

מצא את כל הזוגות (x, y) של מספרים שלמים המקיימים

$$x(5y-7) = y^2 + 2$$

3. (10 נק')

X היא קבוצה של 6 נקודות כלשהן במישור. D הוא המרחק המירבי בין כל זוג נקודות של X ו-d המרחק המזערי.

הוכח כי:

$$D \geq \sqrt{3} \cdot d$$

האם יתכן שוויון, ואם כן, באילו תנאים?

4. (10 נק')

l_3 , l_2 , l_1 הם שלושה ישרים במישור העוברים דרך נקודה אחת; נתונה נקודה A על l_1 . הראה איך למצוא נקודות B על l_2 ו-C על l_3 כך ש- l_3 , l_2 , l_1 יהיו חוצי הזויות הפנימיות של המשולש ABC.

5. (20 נק')

הפתקציה $f(x)$ מוגדרת עבור כל x רציונלי. נתון כי

(i) $f(1) = 3$;

(ii) עבור כל a , b רציונליים

$$f(a+b) + f(a-b) = 2[f(a) + f(b)]$$

מצא את $f(x)$.

6. (20 נק')

פתור את מערכת המשוואות:

$$\frac{3(x^2+1)}{x} = \frac{4(y^2+1)}{y} = \frac{5(z^2+1)}{z}$$

$$yz + zx + xy = 1$$

7. (20 נק')

עבור כל שתי נקודות x , y במישור אנחנו מגדירים $z = F_y(x)$ כדלקמן:

(i) מתקדמים מ- x ל- y ושם מסתובבים בזוית של 90° נגד כיוון מחוגי השעון;

(ii) מתקדמים מ- y בכיוון החדש עד שמגיעים ל- z , כאשר $|yz| = |xy|$.

A,B,C,D הן ארבע נקודות במישור. עבור נקודה P_0 מסוימת הגדרנו

$$P_1 = F_A(P_0)$$
$$P_2 = F_B(P_1)$$
$$P_3 = F_C(P_2)$$
$$P_4 = F_D(P_3)$$

ומצאנו כי P_0 ו- P_4 מתלכדות.

הוכח כי:

(i) AC מאונך ל- BD ושווה לו.

(ii) עבור כל בחירה אחרת של הנקודה P_0, היינו גם כן מקבלים

$$P_4 \equiv P_0$$

תוצאות התחרות

התוצאות היו כדלקמן:

פרס ראשון:	אלכסנדר ברוורמן	בי״ס תיכון אחד העם פתח-תקוה	כתה י״א
פרס שני:	עדי אבידור	בי״ס תיכון חשמונאים בת-ים	כתה י״א
	דן גליק	תיכון ליד האוניברסיטה י-ם	כתה י׳
ציונים לשבח:	ספי לדקני	תיכון ליד האוניברסיטה י-ם	כתה י״ב
	אלכס גורמן	תיכון גלילי כפר-סבא	כתה י״א
	אלכסנדר גמינטרן	מכינה בטכניון	
	אליק צאודר	בי״ס להנדסאים ת״א	כתה י״ב
	אמיר קלקס	בי״ס בליך ר״ג	כתה י״א

הפתרונות בעמ׳ 17.

תחרות דו-לאומית ישראל - הונגריה

בחודש אפריל ש״ז התקיימה בבודפסט תחרות מתמטיקה בין צעירים מהונגריה ומישראל. זוהי השנה השניה ברציפות בה נערכת תחרות זו. התחרות הראשונה התקיימה אשתקד במכון ויצמן. שתי הקבוצות מנו ארבעה מתחרים שנבחרו בתחרויות מוקדמות, כל אחד בארצו. המפגש בהונגריה ארך שבוע ימים ומתוכו הוקדשו יומיים לתחרות עצמה. התחרות התחלקה לשני חלקים. ביום התחרויות הראשון חולק לשמונת המשתתפים שאלון בן 4 שאלות והתחרות היתה אישית כאשר מספר הנקודות המירבי שניתן היה לצבור ב- 4 שאלות אלה היה 28. בסיכום הנקודות של ארבעת משתתפי התחרות, בכל נבחרת, הובילה הקבוצה ההונגרית: 76 נקודות לעומת 73 נקודות. במקום הראשון בתחרות האישית זכה המתחרה ההונגרי אנדראני שצבר 22 נקודות, ואחריו הגיע המתחרה הישראלי אלכסנדר ברוורמן שצבר 20 נקודות. המקומות השלישי והרביעי התחלקו בין שני משתתפים שצברו מספר זהה של נקודות (19) אך דורגו כשלישי (ההונגרי זולטן) והרביעי (הישראלי ספי לדקני) ע״י השופטים.

ביום התחרויות השני חולק שאלון קבוצתי לשתי הקבוצות, ובו מספר בעיות קשות יותר. על חברי שתי הנבחרות היה לשתף פעולה ולהגיע לפתרון בכוחות משותפים. שתי הקבוצות פתרו את מרבית השאלות (למעט 5b).

הקבוצה ההונגרית נתנה מספר הכללות נאות לשאלות מספר 2, ואילו בשאלה 5a היתה תשובתה של הקבוצה הישראלית מלאה יותר. לסיכום החליטו השופטים להכריז על הקבוצה הישראלית כמנצחת בתחרות הקבוצתית.

הכנת השאלונים, השיפוט, וארגון התחרות היו בידי ד״ר יאנוש פטקי מהונגריה וד״ר שי גירון מהטכניון.

להלן נוסחי שני השאלונים. רמזים לפתרון בעיות היום הראשון מובאים בעמוד 22. הפתרונות המלאים יפורסמו בגליון מאוחר יותר.

נסב את תשומת לב הקוראים לשאלות הקשות יותר. לשאלה 4 מתחרות היום הראשון לא נתן אף אחד מהמשתתפים פתרון מלא. את שאלה 5b מהשאלון השני לא פתרה אף אחת מהנבחרות. הקוראים מוזמנים לנסות את כוחם.

תחרות מתמטית שניה, ישראל - הונגריה

יום תחרות ראשון - 25.3.91 - תחרות אישית

1. $f(x)$ הוא פולינום בעל מקדמים שלמים תתון כי

$$f(0) = 11,\ \ f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = \ldots\ldots = f(x_n) = 2002$$

כאשר x_n ...... x_1 , x_2 שלמים, ושונים זה מזה.

מצא את ערכו המקסימלי של n.

2. דף נייר ריבועי $ABCD$ מקופל באופן שהנקודה D מועתקת לנקודה כלשהי D' על הצלע BC. מקומה של A לאחר הקיפול מסומן ב- A'. E היא נקודת החיתוך של AB ו- $A'D'$. נסמן ב- r את רדיוס המעגל החסום במשולש ABD'. הוכח כי $r = A'E$.

3. תהי H_n קבוצת המספרים מהצורה $2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \ldots \pm \sqrt{2}}}$

כאשר מספר סימני השורש הוא n.

(a) הוכח כי כל אברי H_n הם ממשיים.

(b) חשב את מכפלת אברי H_n.

(c) אם נסדר את אברי H_{11} בסדר עולה, מצא את מקומו הסידורי של האיבר המתאים לקומבינציה הבאה של סימני $\pm$: $+ + + + + - + + - + - -$

4. מצא את כל ערכי λ עבורם למערכת המשוואות:

1) $x + y + z + v = 0$

2) $(xy + yz + zv) + \lambda\,(xz + xv + yv) = 0$

יש פתרון (ממשי) יחיד.

בהצלחה!

רמזים לפתרונות בעמ' 22

תחרות מתמטית שניה, ישראל - הונגריה

יום תחרות שני - 26.3.91 - תחרות קבוצתית

בכל השאלות הבאות מציינים הפרמטרים a, b, c מספרים שלמים בלבד.

(1) נתון פולינום ריבועי $f(x) = x^2 + bx + c$, הראה כי אם $f(x)$ מקבל ערכים שהם ריבועים שלמים עבור מספר אינסופי של ערכים שלמים שונים של x, אזי הוא ריבוע של פולינום מדרגה ראשונה.

(2) הוכח כי קיים פולינום $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ שאיננו ריבוע שלם (של פולינום לינארי), המקבל מספר אינסופי של ערכים שהם ריבועים שלמים, עבור ערכים שלמים שונים של המשתנה x.

(3) $N > 0$ הוא מספר טבעי כלשהו. הוכח כי קיים פולינום $f(x) = x^2 + bx + c$ המקבל N פעמים ערכים שהם ריבועים שלמים, עבור N ערכים שלמים שונים של x, אבל $f(x)$ איננו ריבוע של פולינום לינארי.

(4) אם $f(x) = x^2 + bx + c$ איננו ריבוע שלם ומקבל ערכים שהם ריבועים שלמים עבור N ערכים <u>עוקבים</u> שלמים של x, אזי $f(x)$ נקרא פולינום N - ריבועי. נסמן את הדיסקרימיננטה שלו ב- $\Delta(f)$ $(\Delta(f) = b^2 - 4c)$.

(a) הראה כי אם $f(x)$ הוא פולינום N - ריבועי $(N > 2)$ אזי $64 \mid \Delta(f)$ (Δf כפולה שלמה של 64) (האם $N > 2$ כאי שיוון חריף, הכרחי?)

(b) הוכח כי הערכים הריבועיים אותם מקבל פולינום N - ריבועי הם זוגיים ואי-זוגיים לחילופין.

(5) (a) בנה פולינום 3 - ריבועי.

(b) בנה פולינום 4 - ריבועי.

בהצלחה!

האולימפיאדה לנוער במתמטיקה, תשנ"א

פתרונות

1. יהיה המספר abcde.

לפי הנתון $c = 5$ ו- $|a-e| = 3$. האפשרויות עבור (a,e) הן

(1,4) , (3,6) , (4,1) , (4, 7) , (6,3) , (6,9) , (7,4) , (9,6) , (3,0) דהיינו 9 אפשרויות. בכל אחת מאלה קיימות 7 אפשרויות עבור הספרות b,d. יוצא כי התשובה היא $9 \times 7 \times 6$, דהיינו 378.

2. מאחר ש- x, y הם שלמים ואילו

$$x = \frac{y^2 + 2}{5y - 7}$$

יוצא כי $5y - 7$ חייב להיות גורם של $y^2 + 2$.

אבל

$$(5y - 7)(5y + 7) = 25y^2 - 49$$
$$= 25(y^2 + 2) - 99$$

ולכן $5y - 7$ חייב להיות מחלק שלם גם של 99.

מזה נובע ש- $5y - 7$ צריך להיות אחד המספרים:

$$\pm 1 , \pm 3 , \pm 9 , \pm 11 , \pm 33 , \pm 99$$

אבל גם y שלם ולכן האפשרויות הן

$$5y - 7 = 3 \quad , \; y = 2$$

או

$$5y - 7 = 33 \quad , \; y = 8$$

בשני המקרים האלה יוצא $x = 2$. האפשרויות הן

$$(x , y) = (2,2)$$

או

$$(x , y) = (8.2)$$

3. נבחין בין שלוש אפשרויות:

א) שלוש מבין הנקודות נמצאות על קו ישר. יהיו A, B, C, בסדר זה 3 נקודות כאלה. אזי

$$D \geq |AC| = |AB| + |BC| \geq d + d = 2d > \sqrt{3} \cdot d$$

ב) שש הנקודות A, B, C, D, E, F יוצרות משושה קמור. מבין הזויות הפנימיות של המשושה תהיה לפחות אחת שאינה קטנה מ- $120°$. נגיד $\angle ABC \geq 120°$.

לפי משפט הקוסינוסים:

$$D^2 \geq AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos (\angle ABC)$$
$$\geq AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC \cos 60°$$
$$\geq d^2 + d^2 + 2d^2 \cdot \frac{1}{2}$$
$$= 3d^2$$

ג) אם אין א) ואף לא ב) מתקיימים, אזי קל לראות שיש לפחות נקודה אחת הנמצאת בפנים המשולש של שלוש נקודות אחרות. נניח כי D נמצאת בפנים המשולש ABC. מבין הזויות $\angle CDA$, $\angle BDC$, $\angle ADB$ תהיה לפחות אחת שאיננה קטנה מ- $120°$.

נניח $\angle ADB \geq 120°$. ההמשך הוא כמו במקרה ב).

4. מאחר ש- l_2 צריך להיות חוצה של הזוית $\angle ABC$, יוצא כי הישרים BA,BC יהיו סימטריים ביחס ל- l_2. מכאן שהשיקוף של A בישר l_2, נקרא לה נקודה A_2 נמצאת על BC. כמו כן אם A_3, היא השיקוף של A בישר l_3, תהיה גם היא על BC. יוצא שהישר המחבר את A_2, A_3 פוגש את l_3, l_2 בנקודות B,C בהתאמה.

5. נציב $b = 0$ ב- (ii) ונקבל

$$2f(a) = 2[f(a) + f(0)]$$

ולכן $f(0) = 0$.

נציב עכשיו $a = b$ ונקבל

$$f(2a) + f(0) = 4f(a)$$

דהיינו $f(2a) = 4f(a)$

מאידך אם נציב $b = -a$, נקבל

$$f(0) + f(2a) = 2\{f(a) + f(-a)\}$$

ומכאן

$$\begin{aligned} 2f(-a) &= f(2a) - 2f(a) \\ &= 2f(a) \end{aligned}$$

דהיינו $f(-a) = f(a)$

נציב $b = 2a$ ונקבל

$$f(3a) + f(-a) = 2\{f(a) + f(2a)\}$$

ז.א.

$$f(3a) = 9f(a)$$

נוכיח עכשיו, בדרך האינדוקציה כי, עבור כל n טבעי וכל a רציונלי,

$$f(na) = n^2 f(a)$$

נניח שזה נכון עבור $k < n$ ונציב $\{(k-1)a, a\}$ במקום (a,b).

נקבל

$$f(ka) + f[(k-2)a] = 2\{f(k-1)a) + f(a)\}$$

ז.א. , לפי הנחת האינדוקציה,

$$f(ka) + (k-2)^2 f(a) = 2\{(k-1)^2 + 1\} f(a)$$

ומכאן נובע אמנם כי

$$f(ka) = \{2(k-1)^2 + 2 - (k-2)^2\} f(a)$$

$$= k^2 f(a)$$

עכשיו יהיה $r = \frac{p}{q}$ כאשר q , p הם מספרים טבעיים.

ממה שהוכחנו נובע כי

$$q^2 f(r) = f(qr) = f(p) = p^2 f(1)$$

$$= 3p^2$$

ולכן, עבור כל r רציונלי,

$$f(r) = 3r^2$$

6. ברור כי (x , y , z) הם כולם בעלי אותו סימן ונוכל להניח, בלי להגביל את הכלליות, כי

כולם חיוביים. יוצא כי נוכל למצוא α , β , γ ממשיים כך ש-

$$x = \tan \alpha \ , \ y = \tan \beta \ , \ z = \tan \gamma \qquad \left(0 < \alpha ; \beta , \gamma < \frac{\pi}{2}\right)$$

נוכל להסיק כי

$$\tan (\alpha + \beta + \gamma) = \frac{(x + y + z) - x y z}{1 - (yz + zx + xy)} = \infty$$

ולכן

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

יוצא כי

2α , 2β , 2γ יכולים להיות זויות של משולש.

מאידך,

$$\frac{x^2+1}{x} = \tan\alpha + \cot\alpha$$

$$= 2/\sin 2\alpha$$

וכמו כן

$$\frac{y^2+1}{y} = 2/\sin 2\beta$$

$$\frac{z^2+1}{z} = 2/\sin 2\gamma$$

מזה מסיקים כי

$$\frac{3}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{\sin 2\beta} = \frac{5}{\sin 2\gamma}$$

ומכאן כי צלעות המשולש שהן פרופורציונליות לסינוסים של 2γ , 2β , 2α הן ביחס 5: 4: 3, ז.א. שהמשולש הוא ישר זוית. אבל אם $2\gamma = 90°$, אזי $\gamma = 45°$ ולכן

$$z = \tan\gamma = 1$$

מסיקים מיד כי

$$y = \frac{1}{2},\ x = \frac{1}{3}$$

7. אם נשתמש בשמה של כל נקודה גם כמיצג את המספר המרוכב במישור, נקבל עבור כל x , y, z

$$F_y(x) = y + i(y-x)$$

$$= (1+i)\,y - ix$$

מכאן יוצא

$$\begin{aligned} P_1 &= (1+i)A - iP_0 \\ P_2 &= (1+i)B - iP_1 \\ &= (1+i)B - i\{(1+i)A - iP_0\} \\ &= (1+i)B + (1-i)A - P_0 \end{aligned}$$

ובדרך דומה $P_4 = (1+i)D + (1+i)C - P_2$

$$\begin{aligned} &= (1+i)(D-B) + (1+i)(C-A) + P_0 \\ &= (1+i)\{(D-B) - i(C-A)\} + P_0 \end{aligned}$$

$$P_4 - P_0 = (1+i)\{(D-B) - i(C-A)\}$$

מזה נובע כי המספר המרוכב $P_4 - P_0$ אינו תלוי ב- P_0 אלא רק ב- D , C , B , A, ולכן אם הוא 0 עבור איזה P_0 שהוא הוא יהיה 0 עבור כל בחירה של P_0. התנאי לזה הוא

$$D - B = i(C - A)$$

ומכאן המסקנה.

<u>רמזים לשאלון היום הראשון של התחרות הדו-לאומית ישראל-הונגריה</u>

(1) הסתכל אל $2002 - f(x)$.

(2) אפשרי לקבל פתרון ע"י חישוב טריגונומטרי. אפשרי גם פתרון גאומטרי "טהור" (כלומר באמצעות הנדסה אלמנטרית). רמז: מצא את רדיוס המעגל החסום מבחוץ במשולש EBD'.

(3) (b) , (a) אפשר באינדוקציה. המכפלה היא 2. (c) המקום הסידורי הוא 1991.

(4) נסה לנחש בעזרת פתרון מצורה פשוטה עבור אילו ערכי λ יש פתרון לא טריוויאלי.

עלי״ה

עלי״ה דן בנושאים הקשורים לתוכנית המתמטיקה החדשה לחטיבה העליונה.
מתפרסמים בו, בין השאר:

* מאמרים על היבטים תיאורטיים, דידקטיים והסטוריים של פרקי לימוד שונים.
* הצעות לתרגילים נוספים ופתרונות של בעיות קשות
* דוגמאות של מבחנים (כולל בחינות בגרות)
* הצעות של מורים לשיפור ההוראה
* ממצאים של מחקרי הערכה.

מחיר של מינוי שנתי (שני גיליונות): -.24 ש״ח.

עלון למורה המתמטיקה

לכבוד
מערכת העלון למורי המתמטיקה
המרכז הישראלי להוראת המדעים
האוניברסיטה העברית, גבעת רם,
ירושלים 91904

אבקשכם לרשום אותי כמנוי על העלון למורי המתמטיקה לשנת תשנ״א.

שם ______________ **ביה״ס** ______________

כתובת פרטית ______________

אני מלמד(ת) לפי התוכנית החדשה: כן / לא.

מצ״ב המחאתי מס׳ ______________ **ע״ס -.24 ש״ח למינוי השנתי.**

ב ב ר כ ה,

____
חתימה