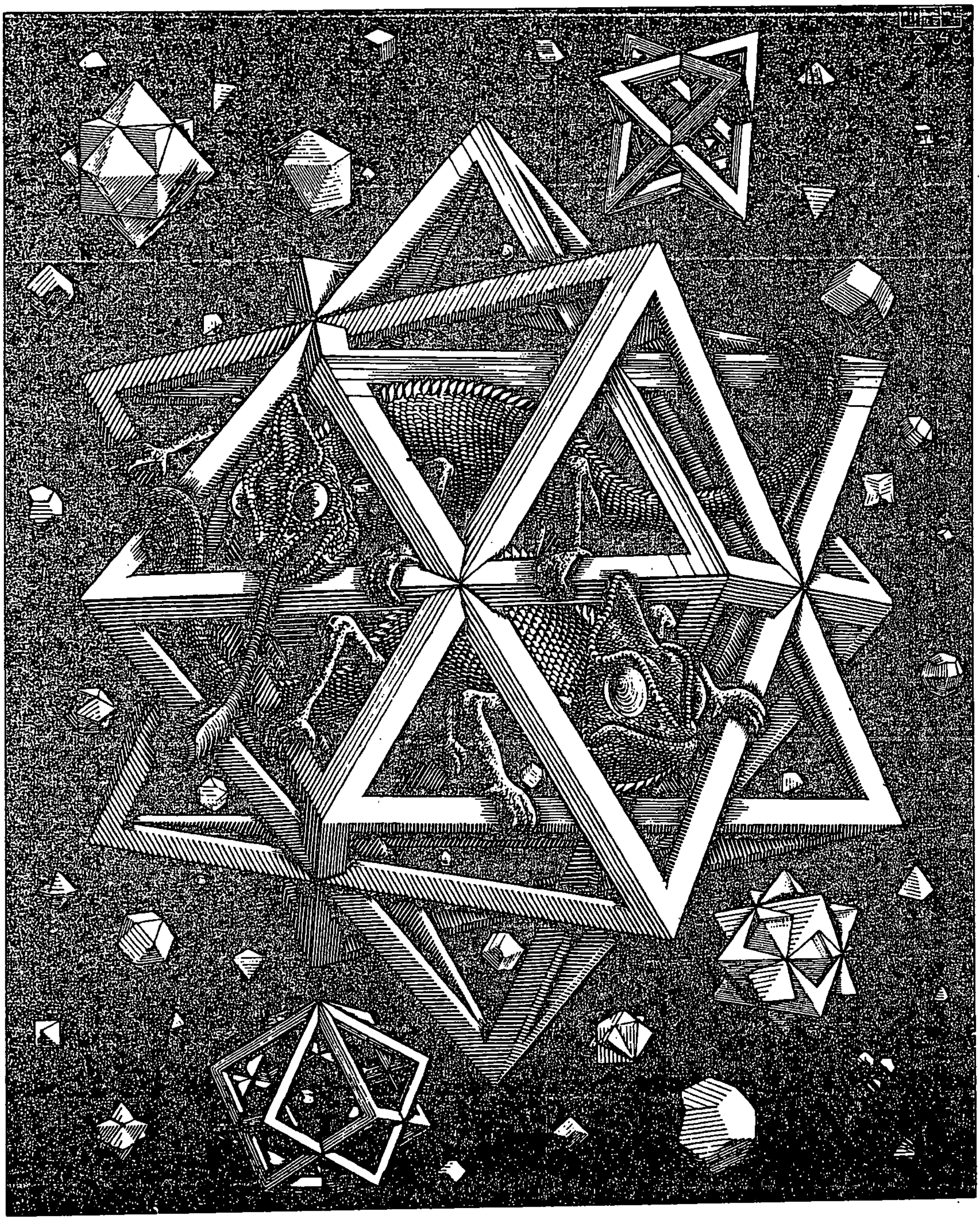
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס' 17

סיון תש"ן - יוני 1990



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון ויצמן
רחובות

תוכן העניינים עמוד

* * * *

אתגר - גליונות מתמטיקה

מוצא לאור ע"י הפקולטה למתמטיקה בטכניון ומכון וייצמן.

מען המערכת: הפקולטה למתמטיקה, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל,
חיפה 32000, טל' (04)294272

דבר המערכת

כבעבר אנו שמחים לפרסם מאמרים מפרי עטם של קוראי העיתון. הפעם אנו פותחים את הגיליון במאמרו של עלי עותמאן, דוקטורנט באוניברסיטת חיפה, המציע שיטה לחישוב השורשים הממשיים של משוואה קובית בעזרת פונקציית ההיפרבוליות. המחבר ביקש להקדיש את המאמר לבנותיו ואנו מקווים שבקרוב תצטרפנה לחוג קוראי העיתון.

בל"ג-בעומר התקיימה בטכניון האולימפיאדה ה-31 ע"ש פרופ' ירמיהו גרוסמן. הקוראים מוזמנים לזהות את עצמם ואת חבריהם בתמונות המובאות בסוף החוברת. בפרס הראשון זכה יצחק פאר מפ"ת (ביה"ס להנדסאים רמת-אביב). בפרס השני זכה גיא מירז מחיפה (ביה"ס ע"ש ליאו-בק). בפרס השלישי זכה אורי בדר מקיבוץ גבעת חיים מאוחד. ציונים לשבח קיבלו אביגדור אלדר, גם הוא מקיבוץ גבעת חיים מאוחד ויצחק גלנדר מקיבוץ מזרע.

הפרסים הוענקו ב"מועדון מתמטי" מיוחד שהתקיים בטכניון ב-10 ביוני. בהזדמנות זו הוענקו פרסים, על עבודה נאה בפתרון בעיית תחרות הערים לרן ירושינסקי מחיפה, לדן מנגובי מקרית ים, לאריאל שוורץ מירושלים ולאנדריי אורבוך שעלה ארצה בתחילת מאי.

נחזור לאולימפיאדה ע"ש גרוסמן. שאלות התחרות מובאות לאחר המאמר על חישוב השורשים והפתרונות להן מובאים בסוף הגיליון. בין הבעיות והפתרונות מובאות שאלות שהופיעו בתחרות מתמטית בין נבחרות צעירים מהונגריה וישראל, שהתקיימה באפריל במכון וייצמן. הקוראים מוזמנים לנסות את כוחם גם בפתרון שאלות אלה.

מסיבות טכניות התעכבה הדפסת הגיליון והוא יגיע לקוראים בתקופת הבחינות. נסיים, לכן, בברכת הצלחה בבחינות וקיץ נעים.

חישוב השורשים הממשיים של משוואה קובית

עלי עותמאן - סחנין

במאמר הזה אציג שיטה כללית לחישוב השורשים הממשיים של כל משוואה מהצורה:

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ כאשר a, b, c ממשיים.

1. חקירת הפונקציה: $f(x) = x^3 + px + q$

אני מניח שהקוראים יודעים לפתור את המשוואות: $x^3 + q = 0$, $x^3 + px = 0$

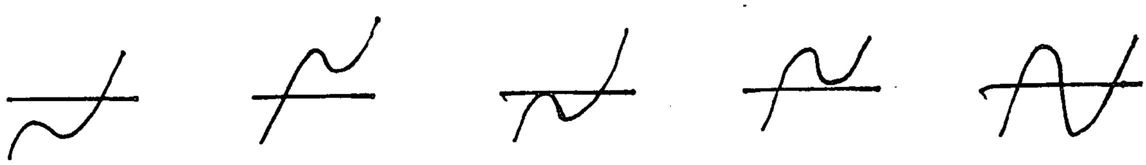
ולכן אחקור את הפונקציה במקרה ו- $p \neq 0$ וגם $q \neq 0$.

א. אם $p > 0$, אז $f'(x) = 3x^2 + p$ גדול מ-0 לכל x. ולכן $f(x)$ עולה תמיד.

מאחר והפונקציה מקיימת $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ אז הגרף של הפונקציה חותך את ציר x ומאחר והפונקציה עולה אז הגרף של הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר x רק בנקודה אחת. ולכן:

מסקנה 1: אם $p > o$ אז למשוואה: $x^3 + px + q = 0$ יש שורש ממשי אחד ויחיד.

ב. אם $p < 0$ אז $f'(x) = 0$ אם ורק אם $3x^2 = -p$ כלומר, אם ורק אם: $x = \sqrt{-p/3}$, או $x = -\sqrt{-p/3}$. קל להראות שהנקודה $-\sqrt{-p/3}$ היא נקודת מקסימום מקומי וכי הנקודה $\sqrt{-p/3}$ היא נקודת מינימום מקומי, ולכן הגרף של הפונקציה דומה לאות $\mathcal{N}$. ולכן מצבו של גרף הפונקציה ביחס לציר x יכול להיות אחד מבין חמשת המצבים האפשריים הבאים:



(a) (b) (c) (d) (e)

גרף הפונקציה הוא במצב (a) אם ורק אם $f(-\sqrt{-p/3})>0$ וגם $f(+\sqrt{-p/3})<0$ וזה שקול לתנאי:

$$-2\left(\frac{-p}{3}\right)\sqrt{-p/3} < q < 2(-p/3)\sqrt{-p/3}$$

וזה שקול לתנאי $-1 < C < 1$ כאשר מסמנים:

$$C = \frac{3\sqrt{3}\,q}{2\,|p|\sqrt{|p|}}.$$

נקרא ל-C "המאפיין" ונשים לב כי כש-$p<0$, $|p| = -p$.

במקרה הזה הגרף של הפונקציה חותך את ציר x בשלוש נקודות שונות. ולכן למשוואה $x^3 + px + q = 0$ יש במקרה הזה שלושה שורשים ממשיים שונים.

מסקנה 2: אם $p < 0$ ו- $|C| < 1$ אז למשוואה $x^3 + px + q = 0$ יהיו שלושה שורשים ממשיים שונים ולהפך.

הגרף של הפונקציה הוא במצב (b) אם ורק אם $f(\sqrt{-p/3})=0$ וזה שקול ל- $C=1$. הגרף הוא במצב (c) אם ורק אם $f(-\sqrt{-p/3})=0$ וזה שקול ל- $C=-1$.

אזכיר שתי עובדות ידועות:

1) סכום שורשיו של פולינום ממעלה n שווה למינוס המקדם של x^{n-1} חלקי המקדם של x^n, ולכן סכום שורשי המשוואה $x^3+px+q=0$ שווה ל-0 כי המקדם של x^2 הוא 0 (הכוונה כאן לשורשים הממשיים והמרוכבים כולל ריבוי כך שסה"כ מסכמים n מספרים).

2) אם $P(x)$ הוא פולינום, $P(x_1)=0$ וגם $P'(x_1)=0$ אז x_1 הוא שורש כפול של הפולינום $P(x)$.

כלומר במקרה ש-$|C| = 1$ יהיו למשוואה שלושה שורשים ממשיים, כששניים מהם שווים.

גרף הפונקציה הוא במצב (d) או- (e) אם ורק אם $|C| > 1$ ובמקרה הזה יהיה למשוואה $x^3+px+q=0$ רק שורש ממשי אחד.

נסכם:

P	C	מס' השורשים הממשיים השונים של $x^3+px+q=0$
חיובי	כלשהו	1
שלילי	$\|C\|<1$	3
שלילי	$\|C\|=1$	2
שלילי	$\|C\|>1$	1

2. השיטה לפתרון המשוואה: $x^3 + px + q = 0$ כאשר $p > 0$.

א. נלמד תחילה איך לפתור משוואה מהצורה $4x^3 + 3x + c = 0$ (c פרמטר)

נגדיר את הפונקציה $\sinh(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ הפונקציה הזו נקראת

פונקציית סינוס היפרבולי.

ניתן לחשב את ערכי הפונקציה הזו בעזרת מחשב כיס מדגם:

C או casio fx-82 B לפי הסדר:

$\boxed{\text{sin}}$ $\boxed{\text{Hyp}}$ t משמאל לימין.

נציב $\dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = x$ במשוואה. נקבל את המשוואה $4\left(\dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^3 + 3\left(\dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right)+c=0$

ולאחר פתיחת סוגריים וכינוס איברים נקבל: $\dfrac{e^{3t} - e^{-3t}}{2} + c = 0$, כלומר:

$$\sinh (3t) = -c$$

לכן: $3t = \sinh^{-1}(-c)$, כלומר: $t = \frac{1}{3}\sinh^{-1}(-c)$ לכן:

$x = \sinh\left(\dfrac{1}{3}\sinh^{-1}(-c)\right)$. ניתן לקבל את הפתרון בעזרת מחשב הכיס

לפי הפעולות:

$\boxed{\text{sin}}$ $\boxed{\text{Hyp}}$ $\boxed{=}$ 3 $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{sin}}$ $\boxed{\text{Hyp}}$ $\boxed{\text{Inv}}$ (-c)

משמאל לימין.

ב. ניגש עכשיו להתרת המשוואה $x^3+px+q=0$ (כאשר $p>0$).

נציב: $x = 2\sqrt{p/3}\, y$ במשוואה ונקבל:

$$(2\sqrt{p/3}\, y)^3 + p.2.\sqrt{p/3}\, y+q=0$$

$$8\frac{p}{3}\sqrt{p/3}y^3 + 2p\sqrt{p/3}\, y+q=0$$

נכפיל ב-3 ונחלק ב- $2p\sqrt{p/3}$. נקבל:

$$4y^3 + 3y + \frac{3q}{2p\sqrt{p/3}} = 0$$

בסימון הנ"ל: $4y^3 + 3y + C = 0$

לכן לפי (א): $y = \sinh[\frac{1}{3}\sinh^{-1}(-C)]$

ולכן $x = 2\sqrt{p/3}\ .\ \sinh(\frac{1}{3}\sinh^{-1}(-C))$ (1)

<u>דוגמה</u>: פתור את המשוואה: $x^3+5x+18=0$

פתרון: $p=5$, $q=18$. לכן: $C = \frac{54\sqrt{3}}{2\ 5\sqrt{5}}$,

$$x = 2\sqrt{\frac{5}{3}}\ \sinh(\frac{1}{3}\sinh^{-1}(-\frac{54\sqrt{3}}{10\sqrt{5}})) = -2$$

3. שיטת פתרון המשוואה $x^3+px+q=0$ כאשר $p<0$ ו- $|C| \le 1$

א. נפתור תחילה את המשוואה: $4x^3 - 3x + c = 0$ כאשר $-1\le c\le 1$.

נציב: $x=\sin\alpha$ ונקבל את המשוואה הטריגונומטרית:

$$4\sin^3\alpha-3\sin\alpha+c=0$$

ידועה הזהות הטריגונומטרית: $\sin3\alpha=\sin\alpha-4\sin^3\alpha$. לכן המשוואה שקיבלנו שקולה למשוואה: $\sin3\alpha=c$.

לכן: $3\alpha=\sin^{-1}(c)$. כיוון שהפונקציה sin מחזורית אז

$3\alpha=\sin^{-1}(c)$, $3\alpha=\sin^{-1}(c)+360^\circ$, $3\alpha = \sin^{-1}(c)+720^\circ$,

הם פתרונות למשוואה $\sin3\alpha=c$ (יש אינסוף פתרונות, אבל נסתפק בשלושה מהם, כי למשוואה הקובית יש רק שלושה שורשים). לכן:

$$\alpha_1=\frac{1}{3}\sin^{-1}(c)\quad,\quad \alpha_2=\frac{1}{3}\sin^{-1}(c)+120^\circ\quad,\quad \alpha_3=\frac{1}{3}\sin^{-1}(c)+240^\circ$$

והשורשים של המשוואה $4x^3-3x+c=0$ הם:

$$x_1=\sin[\frac{1}{3}\sin^{-1}(c)],\quad x_2=\sin[\frac{1}{3}\sin^{-1}(c)+120^\circ],$$

$$x_3=\sin(\frac{1}{3}\sin^{-1}(c)+240^\circ)$$

$$x_{1,2,3}=\sin[\frac{1}{3}\sin^{-1}(c)+120^\circ k];\ k=0,1,2 \qquad (2)$$

ב. נעבור עכשיו להתרת המשוואה: $x^3+px+q=0$ כאשר $p<0$ ו- $|C|\leq 1$.

נציב: $x=2\sqrt{-p/3}\,y$ ונקבל:

$$\frac{-8p}{3}\sqrt{-p/3}\,y^3+2p\sqrt{-p/3}\,y+q=0$$

נכפיל ב-3 ונחלק ב- $-2p\sqrt{-p/3}$. נקבל את המשוואה:

$4y^3-3y+C=0$ (כש $p<0$, $|p|=-p$)

לפי נוסחה 2: $y_{1,2,3}=\sin[\frac{1}{3}\sin^{-1}(C)+120^\circ k];\ k=0,1,2$,

ולכן השורשים של המשוואה $x^3+px+q=0$ הם:

$$x_{1,2,3}=2\sqrt{-p/3}.\sin[\frac{1}{3}\sin^{-1}(C)+120^\circ k];\ k=0,1,2. \qquad (3)$$

הערה: כאשר $C=1$ אז $\sin^{-1}(C)=90^\circ$. אבל $\sin30^\circ=\sin150^\circ$ לכן: $x_1=x_2$.

כאשר $C=-1$ אז $\sin^{-1}(C)=-90^\circ$. אבל $\sin(-30^\circ)=\sin210^\circ$ לכן: $x_1=x_3$.

4. שיטת הפתרון של המשוואה $x^3+px+q=0$ כאשר $p<0$ ו- $|C|>1$.

א) נפתור תחילה את המשוואה $4x^3-3x+c=0$ כאשר: $|c|>1$.

נציב: $$x=\cosh t=\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}$$

[$\cosh(t)$ נקראת פונקצית הקוסינוס ההיפרבולי].

אחרי ההצבה וכינוס איברים נקבל: $\frac{e^{3t}+e^{-3t}}{2}+c=0$ כלומר:

$$\cosh(3t)=-c$$

לכן $3t=\cosh^{-1}(-c)$, $t=\frac{1}{3}\cosh^{-1}(-c)$

$$x=\cosh\left[\frac{1}{3}\cosh^{-1}(-c)\right] \qquad (4)$$

הערה: שים לב כי התנאי $c<-1$ הכרחי כי הטווח של cosh הוא כל המספרים הגדולים או שווים ל-1.

כאשר $c>1$ נציב $x=-y$, נקבל $-4y^3+3y+c=0$ או $4y^3-3y-c=0$ ופתרונה לפי נוסחה (4) הוא:

$$y=\cosh\left(\frac{1}{3}\cosh^{-1}(c)\right) \quad \text{לכן} \quad x=-\cosh\left(\frac{1}{3}\cosh^{-1}(c)\right) \qquad (5)$$

ניתן לאחד את שתי הנוסחאות (4) ו- (5) על-ידי:

$$x=-\mathrm{sgn}(c)\ \cosh\left(\frac{1}{3}\cosh^{-1}(|c|)\right) \qquad (6)$$

$$\mathrm{sgn}(c)=\begin{cases} 1 & \text{אם } c>0 \\ -1 & \text{אם } c<0 \end{cases}$$

ב. נפתור עכשיו את המשוואה $x^3+px+q=0$ כאשר $p<0$ ו- $|C|>1$.

נציב: $x=2\sqrt{-p/3}.y$. נקבל את המשוואה: $4y^3-3y+C=0$

לפי נוסחה (6): $y=-\mathrm{sgn}(C).\cosh\left(\frac{1}{3}\cosh^{-1}(|C|)\right)$. אבל הסימן של C שווה לסימן של q. לכן הפתרון של המשוואה $x^3+px+q=0$ כאשר $p<0$ ו- $|C|>1$ הוא:

$$x=-\mathrm{sgn}(q).2\sqrt{-p/3}.\cosh\left(\frac{1}{3}\cosh^{-1}(|C|)\right) \qquad (7)$$

5. התרת המשוואה הקובית הכללית: $g(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$.

נציב $x = y - \frac{a}{3}$ ונקבל את המשוואה:

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

אחרי פתיחת סוגריים וכינוס איברים נקבל:

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$$

אפשר לכתוב את המשוואה בצורה הבאה:

$$y^3 + g'\left(-\frac{a}{3}\right)y + g\left(-\frac{a}{3}\right) = 0 \qquad (A)$$

המשוואה A היא מהצורה $y^3+py+q=0$ כאשר:

$p=g'\left(-\frac{a}{3}\right)$ ו- $q = g\left(-\frac{a}{3}\right)$.

וברור שניתן לפתור אותה לפי הנוסחאות הקודמות.

כאשר אם y_1 הוא הפתרון של המשוואה (A) אז $x_1 = y_1 - \frac{a}{3}$ הוא פתרון

של משוואה $x^3+px^2+bx+c=0$

<u>דוגמה</u>: פתור: את המשוואה $g(x)=x^3-6x^2+9x-1=0$.

<u>פתרון</u>: $g'(x)=3x^2-12x+g$, $g(2)=1$, $g'(2)=-3$.

המשוואה (A) היא: $y^3-3y+1=0$ $C = 1/2 < 1$. לפי נוסחה (3):

$$y_{1,2,3} = 2\sin\left[\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 120^\circ k\right];\ k=0,1.2$$

ולכן: $x_3 = 0.12$, $x_2 = 3.532$, $x_1 = 2.347$.

TECHNION – ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
32000 Haifa, Israel

הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למתמטיקה
חיפה 32000

חיפה , ל"ג בעומר, י"ח באייר תש"ן
13 במאי 1990

האולימפיאדה המתימטית השלושים ואחת ע"ש
פרופסור ירמיהו גרוסמן (1884-1964)

התחל כל בעיה בעמוד חדש.
אין להשתמש בחומר עזר ובמחשבי כיס.
בהירות הפתרון והאלגנטיות שלו עשויים להשפיע על הניקוד.
רשום על גבי מחברת הבחינה את שמך המלא, כתובתך, ושם בית ספרך.
משך הבחינה : שעתיים וחצי.
נמק את תשובותיך.

**** בהצלחה ****

---

1. יהיו $x=0.991$, $y=x^x$, $z=x^y$ ו $w=y^x$. סדר את ארבעת המספרים לפי גודלם.

---

2. הוכח כי עבור כל שני מספרים טבעיים m ו n מתקיים :

$$\left| \sqrt{1990} - m/n \right| > 1/(100n^2)$$

---

3. במעגל חסום מצולע בעל 1990 צלעות. מנקודה M על המעגל מורידים אנכים שאורכיהם $h_1, h_2, \ldots, h_{1990}$, על צלעות המצולע. הוכח כי :

$$h_1 h_3 \cdots h_{1989} = h_2 h_4 \cdots h_{1990}$$

---

4. האם הפולינום $(x+1)^{1990}+x^{1990}+1$ מתחלק בפולינום x^2+x+1 ?

---

5. נתונים 1990 מספרים ממשיים $a_1, a_2, \ldots, a_{1990}$. הוכח כי קיים מספר שלם m , $0 \le m \le 1990$, כך ש -

$$\left| \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=m+1}^{1990} a_k \right| \le \operatorname{Max}_{1 \le k \le 1990} |a_k|$$

(עבור $m=0$ ועבור $m=1990$ הבטוי באגף שמאל שווה ל $\left| \sum_{k=1}^{1990} a_k \right|$)

---

6. א. מה המספר הגדול ביותר של נקודות שבהן יכולים להחתך מצולע מישורי בעל 1990 צלעות ומצולע קמור בעל 100 צלעות הנמצא באותו מישור , אם למצולעים אין אף קטע משותף ?

ב. מהי התשובה ל (א) ללא דרישת הקמירות ?

פקסמיליה : Fax.: 972-4-221581   טלקס : Telex: 46406 TECON IL   טלפון : Telephone: (04)294272, (04)223071

תחרות דו-לאומית, ישראל-הונגריה

בתחילת חודש אפריל השנה התקיימה במכון וייצמן תחרות במתמטיקה בין צעירים מהונגריה ומישראל.

התחרות אורגנה ע"י היחידה לפעולות נוער במכון וייצמן. מצד ישראל השתתפו ארבעה צעירים שנבחרו מתוך שני חוגים למתמטיקה, האחד מנוהל ע"י פרופ' י. גיליס (מכון וייצמן) והשני ע"י שי גירון (הטכניון), ואלה התמודדו נגד ארבעה הונגרים שהובאו ארצה ע"י ד"ר יאנוש פטקי (בודפשט).

מבנה התחרות היה שונה במקצת מהמקובל. ביום הראשון קיבלו המשתתפים שאלון מורכב מארבע שאלות והוטל עליהם לפתור אותן כאשר כל מתחרה התמודד עם שאלון זה כיחיד. ביום השני הוצגה שאלה אחת, ארוכה ומקיפה, והוטל על כל אחת משתי הנבחרות לטפל בשאלה זו בצוותא.

שני הציונים הגבוהים ביותר ביום הראשון היו:

1. ארז לפיד (ישראל) 23
2. בלוג יוזף (הונגריה) 22

אשר ליום השני קשה היה לקבוע ציונים מדויקים. שתי הנבחרות פתרו את הבעיה במלואה ולשביעות רצון הבוחנים. מאידך היה שוני לגבי הסעיף האחרון של השאלה. בשאלה זו נתבקשו הפותרים לתת אלגוריתם לפתרון בעיה מסוימת וההערכה הכללית הייתה שהאלגוריתם שהגישו האורחים ההונגרים היה יותר יעיל מהישראלי.

כפי שרואים היה זה הישראלי, ארז לפיד, שזכה לציון האישי הגבוה ביותר ביום הראשון. מאידך הציון הכולל של הנבחרת ההונגרית עלה על זה של הישראלים. להלן שני השאלונים:

תחרות מתמטית ראשונה, ישראל-הונגריה

היום הראשון - (תחרות אישית)

הזמן המוקצב: 4.5 שעות

1. (6 נקודות)

הוכח כי לא קיימים מספרים טבעיים x, y כך שגם

$$x^2 + y + 2$$

וגם

$$y^2 + 4x$$

הם ריבועים שלמים.

2. (6 נקודות)

ABC הוא משולש ו-$\sphericalangle ABC=90^\circ$. D הוא האמצע של BC ואילו E, F הן נקודות על AC כך ש- CF=FE=EA; CG הוא הגובה מ-C ליתר AB; H הוא מרכז המעגל AEG; הוכח כי המשולשים ABC, HDF דומים.

3. (7 נקודות)

הוכח כי -

$$\frac{1989}{2}-\frac{1988}{3}+\frac{1987}{4}-\ldots-\frac{2}{1989}+\frac{1}{1990}$$

$$=\frac{1}{996}+\frac{3}{997}+\frac{5}{998}+\ldots+\frac{1989}{1990}$$

4. (8 נקודות)

נתון דף מלבני של נייר משובץ. על כל נקודת סריג בדף הזה משרטטים חץ בכיוון המקביל לאחת מצלעות הדף (מובן שהחצים הנמצאים בשולי הדף לא יוכלו להיות מכוונים אל מחוץ לדף).

הוכח כי קיים לפחות זוג אחד של נקודות שכנות (אופקית, אנכית, או אלכסונית) כך שהחצים המשורטטים בהם פונים לכיוונים מנוגדים.

<u>היום השני (תחרות קבוצתית)</u>

(I) יהיה x מספר רציונלי חיובי: הוכח כי קיים אינטרבל פתוח I, המכיל את x, כך שעבור כל מספר רציונלי - r שנמצא ב-I, המכנה של r גדול מזה של x.

(II) עבור כל x רציונלי נתון, מגדירים I_x שהוא האינטרבל הגדול ביותר שיש לו התכונה הנ"ל. קבע את I_x במקרה ש- x=19/90.

(III) יהיו a, b מספרים ממשיים המקיימים o<a<b<a+1.

הוכח כי קיים מספר רציונלי x כך ש- a>x>b ו- I_x ⊇ (a,b)

כלומר, שעבור כל מספר רציונלי y המקיים a<y<b יהיה המכנה של y גדול מזה של x.

(IV) עבור a,b נתונים יסמן $f(a,b)$ את המספר x אשר את קיומו הוכחת בסעיף (III). חשב את:

$$f\left(\frac{27}{177},\frac{70}{86}\right) \text{ ואת } f(\sqrt{(1991},\ \sqrt{1990})$$

(V) בנה אלגוריתם יעיל לקבוע את $f(a,b)$ באופן כללי.

* * *

* *

האולימפיאדה ע"ש פרופ' גרוסמן - פתרונות

שאלה 1

מתוך

$$0 < x < 1 \qquad (1)$$

נובע $\ell ogx<0$, ולכן, ע"י כפל (1) ב-ℓogx,

$$0>x\ell ogx>\ell ogx$$

או $0>\ell og\ y > \ell og\ x$

כלומר

$$0<x<y<1 \qquad (2)$$

נכפול גם את (2) ב-ℓogx, ונקבל

$$0>x\ell ogx>y\ell ogx>\ell x$$

כלומר

$$0 > \ell ogy > \ell ogz > \ell ogx$$

או

$$0<x<z<y<1 \qquad (3)$$

לבסוף, מתוך $x^2<x$ מקבלים ע"י כפל ב-$\ell og\ x$,

$$x^2\ell ogx>x\ell ogx$$

או

$$\ell og\ w > \ell og\ y$$

כלומר $y<w$, ויחד עם (3), $0<x<z<y<w<1$.

שאלה מס' 2

נניח, בשלילה, כי קיים זוג מספרים טבעיים m, n עבורם:

$$-\frac{1}{100n^2} < \sqrt{1990}\ \frac{m}{n} < \frac{1}{100n^2}$$

אזי בבירור

$$\frac{m}{n} < \sqrt{1990} + \frac{1}{100n^2} < 45 \qquad (\text{א})$$

(כי $2024 = 45^2 - 1 < 45^2 - \frac{2}{100} < (45 - \frac{1}{100})^2$).

וכן $\frac{m}{n} > \sqrt{1990} - \frac{1}{100n^2} > 44$ (ב)

לפי (ב)

שני האגפים באי השוויון $\frac{m}{n} - \frac{1}{100n^2} < \sqrt{1990} < \frac{1}{100n^2} + \frac{m}{n}$

חיוביים ואפשר להעלות בריבוע

מתוך (א) $\frac{m^2}{n^2} - \frac{1}{50}\frac{m}{n^3} + \frac{1}{10{,}000n^4} < 1990 < \frac{m^2}{n^2} + \frac{1}{50}\frac{m}{n^3} + \frac{1}{10{,}000n^4}$

$$m^2 - 1 < m^2 - \frac{45}{50n^2} + \frac{1}{10{,}000n^4} < 1990n^2 < m^2 + \frac{45}{50n^2} + \frac{1}{10{,}000n^4} < m^2 + 1$$

ולכן $1990n^2 = m^2$

או $1990 = (\frac{m}{n})^2$

בניגוד לעובדה ש $\sqrt{1990}$ אי-רציונלי.

<u>שאלה 3</u>

יהיו קודקודי המצולע $P_1, \dots, P_{1990}$, כאשר h_i הוא האנך לצלע $P_{i-1}P_i$ (ו- $P_0 \equiv P_{1990}$).

אזי לפי משפט הסינוסים

$$h_i = \overline{MP}_i \sin \angle MP_{i-1}P_i = \frac{\overline{MP}_{i-1}\,\overline{MP}_i}{2R}$$

כאשר R רדיוס המעגל הנתון. לכן

$$h_1 h_3 \dots h_{1989} = \frac{1}{(2R)^{1990/2}} \prod_{i=1}^{1990} \overline{MP}_i = h_2 h_4 \dots h_{1990}$$

<u>שאלה 4</u>

התשובה חיובית. יהיו w ו- $\bar{w}$ השורשים המרוכבים הצמודים של הפולינום x^2+x+1.

לפי משפט השארית, די להראות שהפולינום

$$P(x) = (x+1)^{1990} + x^{1990} + 1$$

מתאפס ב- w וב- $\bar{w}$ ואמנם

$$P(w) = (w+1)^{1990} + w^{1990} + 1 = (-w^2)^{1990} + w^{1990} + 1 = w^{3980} + w^{1990} + 1.$$

$1990 \equiv 1 (\mathrm{mod} 3)$ ולכן

$$P(w) = w^2 + w + 1 = 0$$

כמו-כן

$$P(\bar{w}) = \overline{P(w)} = 0$$

<u>**שאלה 5**</u>

נסמן

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=m+1}^{1990} a_k$$

נניח, בשלילה, כי לכל $0 \le m \le 1990$,

$$|S_m| > \max_{1 \le k \le 1990} |a_k|$$

אזי לכל $0 \le m \le 1990$ ו $1 \le k \le 1990$, $|S_m| \ge |a_k|$.(*)

ברור כי אם מתקיים (*), לא ייתכן $S_0 = 0$, לכן נניח, ללא הגבלת הכלליות, כי

$S_0 < 0$ ואז $S_{1990} = -S_0 > 0$. יהי j האינדקס הקטן ביותר עבורו $S_j > 0$. אזי

$S_{j-1} \le 0$ ולכן (בדוק!)

$$|S_j| + |S_{j-1}| = S_j - S_{j-1} = 2a_j$$

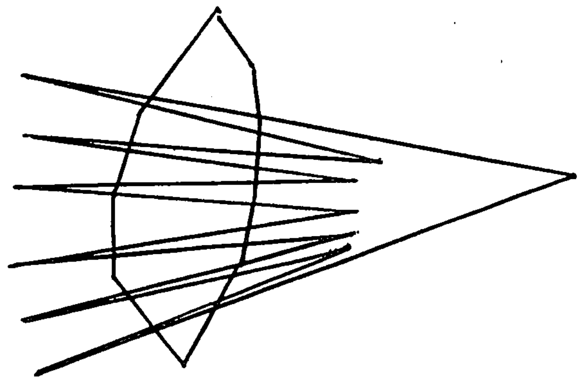
וזה סותר את (*).

<u>**שאלה 6**</u>

א. למצולע קמור יש תכונה שכל ישר במישור יכול לחתוך אותו בשתי נקודות לכל היותר.

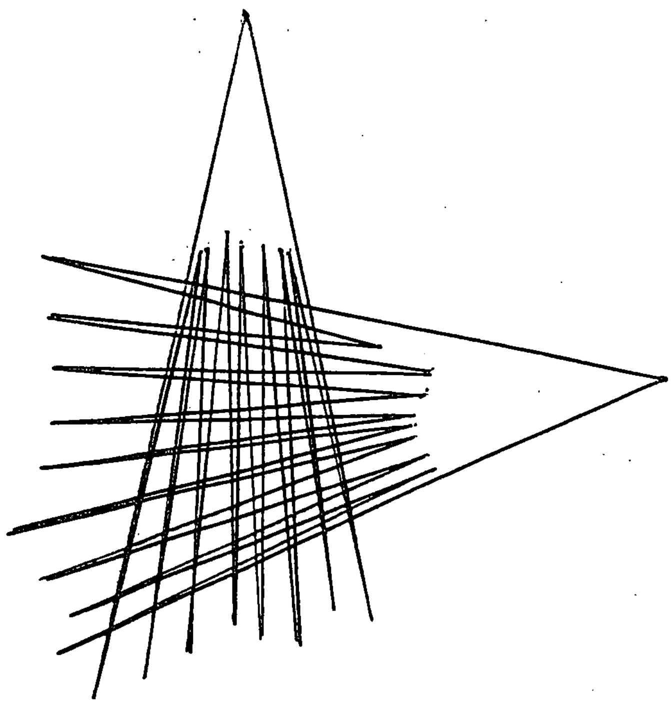
לכן, כל צלע של המצולע בעל 1990 הצלעות, יכולה להחתך במצולע בעל 100 הצלעות פעמיים לכל היותר, כך שמספר נקודות החיתוך הוא 3980 לכל היותר.

כדוגמה לשני מצולעים הנחתכים ב-3980 נקודות נבחר מצולע קמור כלשהו בעל 100 צלעות ונרכיב עליו "מסרק" בעל 1990 צלעות כבשרטוט שבעמוד הבא:



ב. אם המצולעים אינם חייבים להיות קמורים ניתן לקבל 199000 = 1990 X 100

נקודות חיתוך על-ידי חיתוך שני "מסרקים" כבשרטוט הבא:



ברור שמספר זה הוא מספר נקודות החיתוך המירבי האפשרי.

נעיר, שאם שני המצולעים קמורים, מספר נקודות החיתוך המירבי הוא 200. מהי הבנייה המתאימה? מה קורה כאשר מספרי הצלעות במצולעים אינם זוגיים?