אברהם פרנקל

# האכסיומות של תורת הקבוצים

# האכסיומות[א] של תורת הקבוצים[*].

אברהם (אדולף) פרנקל, מרבורג.

תרגם בנימין אמירה, תל־אביב.

---

הבנין של תורת הקבוצים, אשר בנה גאורג קנטור מתוך אינטואיציה של יוצר, בתתו בפעם הראשונה באור ברור ובבסיס חוקי למושג „האין־סוף הגדול המהלט" ב) (יחד עם זאת גם למושגים אחרים ובתוכם למושג ה„קונטינואום"), מושג, אשר חכמי הפילוסופיה והמתמטיקה התוכחו עליו במשך דורות רבים, — כאלו נזדעזע ביסודו אחרי הוכחותיהם של ב. רסל, א. צרמלו, ק. בורלי־פורטי, י. רישרד (B. Russell, E. Zermelo, C. Burali-Forti, J. Richard) ואחרים, אשר הראו שבנין זה, כמו תורת ההגיון הצרופה, משמש מקום לסתירות הגיוניות ידועות (פרדוכסים). הואיל ולא עלה עדיין הדבר לתת במקום הגדרתו של קנטור ג) הגדרה אחרת נעדרת סתירות ומאחר שגם הבסוס החריף של ב. רסל וא. נ. ויטהיד (A. W. Whitehead)[1] לא הצליח להרחיק כל התנגדות (עיין Axiom of reducibility שלהם), הנה מוכרחה איפוא תורת הקבוצים להכנע להגבלות היסודיות של ל. א. י. בראואר וה. ויל (L. E. J. Brouwer, H. Weyl)[2] המשאירות מעט מאד

---

*) הערות שבתרגום העברי הנוספות על אלו שבמקור, מסומנות באותיות עבריות. — המחבר והמתרגם.

א) הננו משתמשים כאן במונח „אכסיומה" לא במובן של „אמתה" או „משפט המובן מאליו ושאיננו דורש הוכחה", כי אם (בהתאמה לתורת המונחים של המתמטיקה החדשה, ביחוד תחת השפעת הלברט מיסד האכסיומטיקה המתמטית) הננו מצינים במונח זה את אחת הדרישות המקדמות אשר הונחו ביסוד איזו תורה ואשר מהן נבנית תורה זו באפן דדוקטיבי.

ב) המושג „אין־סוף גדול מהלט" או „אקטואלי" בא בנגוד למושג „אין סוף גדול פוטנציאלי". במושג האחרון הננו פוגשים, למשל, במשפט: אם גדל המספר $n$ עד אין סוף, אז שואף $\frac{1}{n}$ אל הגבול 0. במשפט זה גדל המספר $n$ יהיה יותר גדול מכל מספר קבוע אשר יכול להנתן מראש, אבל בכל אחד ממצבי השתנותו הנהו נשאר סופי. לעומת זאת הנה המושג „אין־סוף גדול מהלט" הבא בתורת הקבוצים איננו גדל משתנה כי אם גדל קבוע הגדול מכל מספר סופי.

ג) הגדרתו של קנטור אומרת: קבוץ הוא אסף (בתור דבר אחד שלם) של עצמים מחשיים או מפשטים קבועים הנבדלים היטב זה מזה. העצמים האלה נקראים בשם אברי הקבוץ.

1) Principia Mathematica. I—III (Oxford 1910—13).

2) עיין: Verband d. Kon. Akad. v. Wetenschappen te Amsterdam (Eerste Sektie) Deel XII, 1918 u. 1919 וגם Math. Zeitschrift, Bd. 10 (1921), p. 39.

מבנינה, או לותר על בסוס קונסטרוקטיבי גמור ולהתבסס במקומו על שיטת אכסיומות, שהיא רחבה למדי בכדי לתת מקום לדרכים החוקיות של תורת הקבוצים, ויחד עם זאת צרה במדה הדרושה להרחקת הפרדוכסים.

בכוון האכסיומטי הזה הורה א. צרמלו במחקרו משנת 1908[1]) דרך חדשה. בתתו יסוד לתורת הקבוצים, אשר עליו נבנה כבר חלק גדול מדרכי התורה הזאת ודרכים אחרות יכולות עוד להבנות עליו. חוץ משאלות אי־התלויות[2]) של האכסיומות אחת ברעותיה וחסר הסתירה[3]) שבינידהן, אשר עליהן לא באה תשובה במחקר הנ"ל, לקתה החקירה ההיא בעוד חסרון עקרי, והוא שבמקום חשוב אחד הובא מושג אשר הגדרתו איננה מדויקת די צרכה, הוא מושג „התכונה המגדרת" (Definite Eigenschaft), ולכן יש לחשוש שוב לדברים בלתי ברורים ולסכנה בבחינה ההגיונית. לפני זמן מה הראיתי (במאמרי [A]) עוד חסרונות אחדים פחות יסודיים אשר לאותה החקירה האכסיומטית. אחרי אשר עלה בידי[4]) להרחיק גם את מושג ה„מגדר" ולהביא במקומו מושגים מתמטיים מדויקים, יש ביכלתי לתת כאן שיטת אכסיומות חדשה. אשר עליה נוכל לבנות באופן דדוקטיבי את תורת הקבוצים לעת עתה בהקף הדומה לזה של צרמלו. על בנין זה אראה בהמשך הדברים רק ברמזים, וחקירה מפורטת אשאיר למאמר אחר.

שיטת האכסיומות הבאה כאן מתאמת בגבול היכלת (גם בבטויה) לשיטת צרמלו. בכדי להקל את השואתן זו לזו; היא מקבלת בלי שנוי את האכסיומות IV — VI אשר במאמר [Z]. והנה נמוקי לשנויים אשר הכנסתי ביתר האכסיומות.

לאכסיומה I. הויות ומטעמים פרינציפיוניים איני נותן מקום בתוך התחום $\mathfrak{B}$ אלא לקבוצים (ובתוכם גם לקבוץ־האפס). מה שאינו קבוץ אינו יכול איפוא להיות גם אבר של קבוץ (ראה [A] עמ' 233). לכן יהיה כל עצם אשר בתוך התחום $\mathfrak{B}$ קבוע לגמרי ע"י אבריו, ובפרט יהיה כל עצם אשר אינו מכיל שום אברים אידנטי עם קבוץ־האפס. ערך האכסיומה I (אשר רק למראית עין תשאר בלי שנוי) שונה איפוא בעקרו מזה של האכסיומה של [Z], כי בצמצומה של זו האחרונה על קבוצים טבועה הגבלה עיקרית.

לאכסיומה II. חוץ מהמושג „הויות מוכל" ($\varepsilon$) הנני מוצא לנכון להשאיר גם את מושג האידנטיות (=) בתור מושג יסודי בלתי מגדר ולא להגדירו ע"י הראשון (בעזרת האכסיומות II ו־III), הויות ומושג האידנטיות נמצא כבר implicite בתוך המושגים של קבוץ בעל אבר אחד וקבוץ בעל שני אברים. וע"י כך אפשר יהיה, בקשר עם האכסיומה III, לותר על הדרישה לקבוצים יסודיים בעלי אבר יחיד. חוץ מזאת, אפשר לותר גם על הדרישה לקבוץ־האפס, אם נדרש שאין התחום $\mathfrak{B}$ יכול להיות ריק בכללו, דרישה הנכללת באכסיומה VII (ראה להלן עמ' 6).

לאכסיומה III. על תכן האכסיומה הזאת, האפיית לשיטת האכסיומות החדשה, עיין המאמר [B] והמשלים הבאים להלן.

על האכסיומות VII ו־VIII עיין שני הסעיפים האחרונים של מאמר זה.

---

1) Untersuchungen üb. d. Grundlagen der Mengenlehre I; Math. Annalen, Bd. 65 (1908) p. 261 (להבא אביא את דברי המאמר הזה בסימן [Z]). עיין גם ספרי Einleitung in die Mengenlehre Berlin, 1919 (הוצאה חדשה 1923).

2) על פתרון שאלה זו ראה את החקירה של א. פרנקל Math. Annalen, Bd. 86 (1922), p. 230; Sitzungsberichte der Preuss. Akademie d. Wissensch. Berlin, Math.-Phys. Klasse, 1922, p. 253 (להבא אביא את דברי המאמרים האלה בסימנים [A] ו[B]).

3) בשאלה הקשה הזאת יש לחכות לידיעות חדשות מתוך התקדמות בחקירות של ד. הלברט; ראה Abhandl. a. d. Math. Seminar d. Hamburgischen Universität Bd. 1 (1922), p. 157; גם את המאמר של פ. ברניס Jahresbericht d. Deutschen Mathematikervereinigung XXXI Jahrg. (1922), p. 10.

4) עיין: מבוא ל[B] והרצאתי בכתבי Naturforscherversammlung in Leipzig 1922.

תורת הקבוצים עוסקת ב„עצמים" הנמצאים בתוך תחום $\mathfrak{B}$. ה„עצמים" האלה יקראו בשם „קבוצים". הננו אומרים על קבוץ ידוע, שהוא „מצוי", אם הוא נמצא בתוך התחום.

בין הקבוצים $a$, $b$, $m$, $n$, וכו' יכולים להתקים יחסים יסודיים בצורת $a = b$ או $m \varepsilon n$. את היחס $a = b$ הננו מבטאים „$a$ אידנטי עם $b$", „$a$ שוה ל$b$", ו$a$ ו$b$ מציינים את אותו הקבוץ; ליחס הזה ישנן התכונות הרגילות של הזהות (אידנטיות)[1]. בהתקים היחס $m \varepsilon n$, הננו אומרים „$m$ הוא אבר של $n$", „$n$ מכיל את האבר $m$" וכו'. בכדי להביע, שהיחסים $a = b$ או $m \varepsilon n$ אינם מתקימים, הננו כותבים $a \neq b$ („$a$ שונה מ$b$") או $m \bar{\varepsilon} n$ („$m$ איננו אבר של $n$" וכו').

**הגדרה א'.** אם $a$, $b$, $m$ הם קבוצים כאלה, ש־$a \neq b$, וש־$a$ ו$b$, אבל לא קבוץ אחר השונה מהם, אברים של $m$ הם, אז יקרא $m$ בשם „קבוץ־זוגי" של $a$ ו$b$ (ועל פי האכסיומה I — בשם „קבוץ־הזוג")[ד].

**הגדרה ב'.** אם $m$ ו$n$ הם קבוצים כאלה, שכל אבר של $m$ הוא גם אבר של $n$, אז יקרא $m$ „קבוץ חלקי" של $n$.

**הגדרה ג'.** אם $m$ ו$u$ הם קבוצים כאלה, ש$u$ מכיל בתור אברים את כל הקבוצים החלקיים של $m$ ורק אותם, אז יקרא $u$ בשם „קבוץ־חזקה" של $m$ (ועפ"י האכסיומה I: קבוץ־החזקה) (ציונו: $u = \mathfrak{U}m$)[2].

**הגדרה ד'.** אם $m$ ו$s$ הם קבוצים כאלה, ש$s$ מכיל בתור אברים את כל אברי האברים של $m$ ורק אותם, אז יקרא $s$ בשם „קבוץ שֶׁבִּצְבִירָה" של $m$ (ועפ"י האכסיומה I: הקבוץ שבצבירה) (ציונו: $s = \mathfrak{S}m$).

**הגדרה ה'.** אם $m$ הוא קבוץ של אברים „חסרי אברים משותפים" (ז. א. שום אבר של אבר אחד של $m$ אינו בא בתור אבר גם באיזה אבר אחר של $m$) ואם $s_0$ הוא קבוץ אשר לו אבר אחד משותף עם כל אבר של $m$, ואברים אחרים אין ל$s_0$, אז יקרא $s_0$ בשם „קבוץ שבבחירה" של $m$.

כל קבוץ שבבחירה של $m$ מכיל איפוא אבר אחד מכל אחד מאברי $m$, אבל אינו מכיל שום אבר אשר איננו אבר של אחד מאברי $m$, קבוץ שבבחירה הוא לפיכך קבוץ חלקי של הקבוץ שבצבירה $\mathfrak{S}m$, אם האחרון מצוי. ברור הדבר, שלאיזה קבוץ $m$ יכול להיות קבוץ שבבחירה רק במקרה שכל אבר של $m$ מכיל אברים, ובמקרה זה לא: דוקא קבוץ שבבחירה אחד. לכן בדברנו להבא בקשר עם איזה קבוץ $m$ על „הקבוץ שבבחירה שלו", כונתנו היא לאיזה שהוא מהקבוצים שבבחירה של $m$. בעצם הדבר אין מושג הקבוץ שבבחירה דורש את ההגבלה לקבוץ $m$ בעל אברים חסרי אברים משותפים; להגבלה זו נתן מקום בהגדרה בעקר בהתאמה ל[Z]; ולכן בדברנו על הקבוץ שבבחירה של הקבוץ $m$, יהי סותח שאברי $m$ הנם חסרי אברים משותפים.

הננו באים עכשו לבאור מושג הפונקציה. בהשאר איזה קבוץ $x$ בלתי קבוע („משתנה")[3],

---

1) תמיד יהא איפוא $a = a$; מתוך $a = b$ יצא תמיד $b = a$, ומתוך $a = b$ ו$b = c$ יצא $a = c$, וגם מתוך $m \varepsilon n$, $m = a$, $n = b$ יצא תמיד $a \varepsilon b$.

ד) כאן ובהגדרות הבאות מצינת הדהידיעה, שהקבוץ קבוע ע"י אבריו באפן הד־ערכי.

2) כאן חשובה העובדה שמציאות האברים הבודדים של $\mathfrak{U}m$ (ז. א. אופי הקבוץ אשר לקבוצים החלקיים צריכה להיות קבועה מקודם עפ"י הגדרה ב', ולא כמו אצל קנטור, שכל אוסף („Zusammenfassung") אברים של $m$ הוא אבר של $\mathfrak{U}m$.

3) למעשה עובר המשתנה $x$ תמיד דרך כל אברי קבוץ ידוע.

יהיו בדרך כלל גם קבוץ החזקה, הקבוץ שבצבירה והקבוץ שבבחירה שלו בלתי קבועים, כמו כן גם קבוץ־הזוג שלו עם קבוץ אחר. הקבוצים האלה התלויים ב $x$ — ובכללם גם המקרה הקצוני של קבוץ קבוע („קונסטנטי") — נחשבים לפונקציות של $x$. כמו כן תקרא גם פונקציה של פונקציה של $x$ בשם פונקציה של $x$. בכדי לציין את הפונקציות משתמשים בציונים $\varphi$, $\psi$ וכו', ובשעת הצרך — בהוספת המשתנה הבלתי תלוי $x$ בצורת $\varphi(x)$, $\psi(x)$ וכו'; $\varphi$ הוא איפוא החק המראה, באיזה סדר יש להפיק על $x$ (ואולי גם מפני בנין קבוצי־זוג, על קבוצים קבועים אחרים) פעולות הבנין של קבוצי־הזוג, קבוצי חזקה, קבוצים שבצבירה, קבוצים שבבחירה (וקבוצים שבברירה עפ"י ההגדרה ו' הבאה להלן) — בהתאם להגדרה, מספר פעמים סופי כמובן. ועכשו נשלים ע"י ההגדרה ו' את בנין מושג הפונקציה המובא כאן.

הגדרה ו'. אם $\varphi$ ו$\psi$ הן פונקציות, $R$ אחד היחסים היסודיים $=$, $\neq$, $\varepsilon$, $\not\varepsilon$; $m$ ו $m_0$ קבוצים כאלה ש$m_0$ מכיל בתור אברים את כל האברים ורק את האברים $y$ של $m$ אשר בהם מתקים היחס $\varphi(y)\, R\, \psi(y)$, אז יקרא הקבוץ $m_0$ בשם קבוץ שבברירה של $m$ הנקבע ע"י היחס $\varphi\, R\, \psi$ (ועפ"י האכסיומה I: הקבוץ שבברירה) (וציונו: $m_{\varphi R \psi} = m_0$). אם ימצא ב $m$, $\varphi$ או $\psi$ גדל בלתי קבוע $x$ (חוץ מ„המשתנה העוזר" $y$), אז יקרא גם $m_0$ בשם פונקציה של $x$.

ההגדרה הזאת מפקיעה את מושג „התכונה המגדרת", אשר לו ערך מכריע ב [Z] בברירת הקבוצים החלקיים $m_0$, ובמקומו היא נתנת בתור קריטריון לזאת, שאברים ידועים $y$ של $m$ ורק הם יכולים להאסף לקבוץ חלקי $m_0$, את התנאי שבשביל אלה ה$y$ יהא הקבוץ $\varphi(y)$ אבר של הקבוץ $\psi(y)$. וכאן מצינים $\varphi$ ו$\psi$ פונקציות נתונות. ליחסים $\not\varepsilon$, $=$, $\neq$ יש כאן ערך השוה לערכו של היחס $\varepsilon$, „היות אבר", בהתאמה לתפקיד שהם, יחד עם $\varepsilon$, ממלאים בתור „יחסים יסודיים של שיטת האכסיומות"; היחס $=$ אין צרך בו אלא פעם אחת, בשעת בנין קבוצים בעלי אבר אחד (עמוד 5), ואח"כ נוכל תמיד להציג במקומו את היחסים $\varepsilon$, $\not\varepsilon$ (ובכלל יהיה היחס $=$ מיותר אם נקבל לתוך האכסיומה II עוד את הדרישה לקבוץ בעל אבר יחידי הנמצאת באכסיומה II אצל [Z], ז. א. אם נרחיק משם ומהגדרה א' את ההגבלה $a \neq b$; ראה לעיל עמוד 3). היחס $\neq$ אינו דרוש בכלל בהגדרה ו' והבאנו אותו רק לשם סימטריה.

כי ההגדרה ו' אינה יוצרת קשרים הדדיים אסורים בין מושגי הפונקציה והקבוץ שבברירה (דבר הקשה לבחינה ב[Z] בין המושג „מגדר" והאכסיומות), נראה מתוך זה שבשעת בנית הפונקציה הננו מפיקים בהתאם להגדרה מספר פעולות סופי. שאלה סתומה היא עדיין, אם אי אפשר להצר עוד יותר את מושג הפונקציה, באופן שנוכל להוציא את בנית הקבוץ שבבחירה מכלל הפעולות המשמשות לבנין הפונקציות; רק בשעה שנבוא להוציא משיטת האכסיומות את כל המסקנות כולן, יתברר הדבר אם תוכל הגבלה כזאת להעשות[1]. כמו כן תוכיח רק חקירה זו, שמושג הקבוץ שבברירה על פי ההגדרה ו' הנו רחב למדי בכדי לאפשר את בנית כל הקבוצים הבאים בתורת הקבוצים החוקית. משלים אחדים לכך ינתנו בסוף המאמר.

לבסוס תורת הקבוצים הכללית משמשות איפוא שש האכסיומות המנויות להלן, לשם הקלת ההשואה, בסדר השוה לזה של [Z], ולא בסדר ההגדרות המנויות לעיל. בו בזמן שהאכסיומה הראשונה באה בעיקר לשם קביעתו המדויקת של היחס היסודי $\varepsilon$, בדרשה

1) במקרה שמתירים להשתמש בבנית קבוץ שבבחירה בשעת בנית הפונקציה, הרי יהא דבר זה מותר רק עד כמה שהתוצאה לא תהיה תלויה ברב־ערכיות הפרוצס של בנית הקבוץ שבבחירה; מטעמים אשר הבאתי לעיל הנני פטור כאן מבאור יותר מפורט של ענין זה.

שכל קבוץ יהא קבוע על פי כלל אבריו, הנה דורשות במדה שוה חמש האכסיומות האחרות על יסוד מציאותו המונחה מראש של קבוץ ידוע את מציאותו של קבוץ אחר התלוי בראשון.

אכסיומה I. אם $m$ קבוץ חלקי של $n$, ו$n$ קבוץ חלקי של $m$ כאחד (ז. א. שכל אבר של הקבוץ $m$ הוא גם אבר של הקבוץ $n$, ולהפך), אז $m = n$. (אכסיומת הקביעות).

אכסיומה II. אם $a$ ו$b$ קבוצים שונים זה מזה, אז מצוי קבוץ־הזוג של $a$ ו$b$ (אכסיומת הזווג).

אכסיומה III. אם $m$ קבוץ, $R$—אחד היחסים היסודיים $\epsilon$, $\not\epsilon$, $=$, $\neq$, ותהיינה $\varphi$ ו$\psi$ פונקציות, אז מצוי (בין הקבוצים החלקיים של $m$) הקבוץ שבברירה $m_{\varphi R \psi}$. (אכסיומת הברירה).

אכסיומה IV. אם $m$ קבוץ, אז מצוי קבוץ־החזקה שלו $\mathfrak{U}m$. (האכסיומה של קבוץ־החזקה).

אכסיומה V. אם $m$ קבוץ, אז מצוי הקבוץ שבצבירה שלו $\mathfrak{S}m$. (אכסיומת הצבירה).

אכסיומה VI. בהיות $m$ קבוץ של אברים הסרי אברים משותפים וכל אחד מהם מכיל אברים[1]), אז מצוי (בין הקבוצים החלקיים של $\mathfrak{S}m$) לכל הפחות קבוץ שבבחירה אחד של $m$. (אכסיומת הבחירה).

בהתאם לאכסיומה I אפשר לרשום או לציין לשם קצור את הקבוץ בעל האברים $a$, $b$, $c$, ..., והמכיל רק את האברים האלה, בצורת $\{a, b, c, \dots\}$.

לבסוף אוסיף לשיטת־אכסיומות חדשה זו תאור קצר של הדרך המובילה ממנה אל תורת הקבוצים של קנטור, וקודם כל אל תאוריו של צרמלו. בהיות $m$ קבוץ[2]), ונקח בהתאם להגדרה ו' בתור R את היחס היסודי $\not\epsilon$, בתור $\varphi$ ו$\psi$ נקח בהתאמה את הפונקציה $y$ ואת הקבוץ הקבוע $m$, אז ישנו על סמך האכסיומה III הקבוץ שבברירה $N = m_{y \not\epsilon m}$, המכיל את כל האברים $y$ ורק אותם אשר אינם אברים של $m$. לפיכך אין הקבוץ $N$ מכיל שום אבר; על סמך ההגדרה ב' יהיה איפוא $N$ קבוץ חלקי של כל קבוץ. על סמך האכסיומה I יהיה $N$ הקבוץ היחידי שאינו מכיל שום אבר; קבוץ זה נציין כרגיל בתור קבוץ־האפס (וציונו: 0).

אם מצוי בכלל קבוץ $m$[2]), אז מצויים תמיד שני קבוצים שונים, למשל $m$ ו־0 או, במקרה $m = 0$, הקבוץ 0 וקבוץ ההזקה $\mathfrak{U}0$ השונה כמובן מ0 (מפני היחס $0 \epsilon \mathfrak{U}0$). בהיות איפוא $m$ ו$n$ שני קבוצים שונים זה מזה ; $p = \{m, n\}$ קבוץ־הזוג שלהם המצוי על סמך האכסיומה II, אז מצוי על סמך האכסיומה III הקבוץ שבברירה $p_{y = m}$ המכיל בתור אברים את כל אלה האברים של $p$ ורק את אלה השוים ל$m$; קבוץ שבברירה זה אפשר לרשום בצורת $\{m\}$. יחד עם כל קבוץ נתון $m$ מצוי איפוא הקבוץ $\{m\}$ המכיל בתור אבר את הקבוץ $m$ ושום קבוץ זולתו. ועי' כך הרי לפנינו ההתאמה לאכסיומה II של [Z] (האכסיומה של הקבוצים היסודיים)[3]).

דרוש אם כן להוכיח קודם כל. שאפשר וכיצד אפשר להוציא על יסוד האכסיומה III את המסקנות ולבנות את המושגים ההכרחיים בתורת הקבוצים החזקית. ענין זה אשאיר למאמר

---

1) על ההכרח שבתנאי הזה עיין לעיל ההערה בקשר עם ההגדרה ה'.

2) להלן (עמ' 6) יבואר אם מותר לעשות הנחה זו, ז. א. אם מותר בכלל להניח את מציאותו של איזה קבוץ.

3) כאן הוא המקרה היחידי, אשר בו דרוש להשתמש בתוך ההגדרה ו' ביחסים היסודיים $=$, $\neq$; כי על סמך התוצאה שקבלנו כאן נוכל בכלל לכתב $a \epsilon \{b\}$ במקום $b = a$ וגם $a \not\epsilon \{b\}$ במקום $b \neq a$.

יותר מפורט. כאן אביא בכוון זה רק משל אחד פשוט, אבל בלתי מובן מאליו, אשר יראה ביחוד כיצד בונים משתמשים בפונקציות על יסוד ההגדרה ה׳, ולשם השואה ננהג במשל זה בהתאמה ל[Z] (עמ׳ 264).

יהי $\{m, n, r, \ldots\} = t$ קבוץ; ויהי עלינו לבנות על יסוד האכסיומות את קבוץ האברים המשותפים $[m, n, r, \ldots] = d$ של האברים של $t$. למטרה זו נבנת על יסוד ההגדרה ד׳ (והאכסיומה III) את הפונקציה $t_{x \varepsilon y} = X$, ($x$ יציין גדל בלתי קבוע), המכילה את כל האברים ורק את האברים $y$ של $t$ (ז. א. את כל הקבוצים ורק אותם הקבוצים $m, n, r, \ldots$) אשר בהם בא בתור אבר הגדל הבלתי קבוע $x$; $X$ תלוי בבלתי קבוע $x$ ורק בו. יציין נא $m$ איזה אבר שהוא של $t$ ונשוה לנגד עינינו את הקבוץ החלקי $d$ של $m$ המכיל את כל האברים ורק את האברים $x$ של $m$ אשר גורמים לשוין $t = X$ או, במלים אחרות, $X \varepsilon \{t\}$; לפי הציונים של ההגדרה ו׳ נכתב $m_{x \varepsilon \{t\}} = d$, והכונה היא ש $x$ יציין את „המשתנה העוזר"; הבלתי קבוע של הפונקציה $X$ צריך איפוא לעבר על פני כל האברים של הקבוץ $m$. לפיכך יכיל $d$ את כל אלה האברים של $m$ ורק את אלה הבאים בתור אברים בזמן אחד בכל האברים $m, n, r, \ldots$ של $t$; $d$ הוא איפוא קבוץ האברים המשותפים.

משלים דומים לזה אפשר לבנות בלי קשי מיוחד. כדאי לציין את העובדא שדרך זו מספיקה גם להוכחת המשפט של קנטור $\overline{\overline{m}} < \overline{\overline{\mathfrak{U}m}}$; פרוצס הבניה של קבוצים חלקיים עפ"י ההגדרה ד׳ והאכסיומה III הנהו איפוא כללי למדי בכדי לאפשר את המעבר מאיזו עצמה אין־סופית שהיא אל עצמה יותר גדולה בעזרת „שיטת הקרנזל" כמו בתורת הקבוצים הרגילה.

ע"י שיטת האכסיומות המובאה כאן נתן יסוד לתורת הקבוצים הכללית. אך אין עדיין להסיק ממנה מסקנה שקבוצים מצויים בכלל. זאת אומרת שהתחום $\mathfrak{B}$ איננו ריק. מצד אחר אין הדרישה למציאות קבוצים גרידה מבטיחה מציאות קבוצים אין־סופיים. לבסוף הנה גם „האכסיומה של האין־סופי" של צרמלו (אכסיומה VII ב[Z]) איננה מרחיקה לכת במדה הדרושה להבטחת המציאות של קבוצים רחבים למדי, למשל קבוצים אשר עצמתם היא א עם סימן טרנספיניטי (ראה [A] עמ׳ 230 וכו׳). כאן דרושה יותר בתור אכסיומה מוחלטה מציאות האכסיומה VII אשר אחרי הרחבת מושג הפונקציה הנזכר לעיל תהיה להכללה רחבה של „אכסיומת האין־סופי" של צרמלו[1].

לבסוף אין התחום $\mathfrak{B}$ עדיין קבוע בשלמותו על ידי שבע האכסיומות האלו; הן נותנות עוד מקום לקבוצים, אשר מציאותם אינה באה כתוצאת האכסיומות ואשר לגבי תורת הקבוצים החוקית הנם בכל אפן מיותרים, ואולי אפילו מעוררים חשש, כך, למשל, ל ensembles extraordinaires אשר עסק בהם ד. מירימנוב[2]. הצרת התחום הרצויה לפי זה תושג ע"י אכסיומה אחרונה האכסיומה VIII („אכסיומת ההגבלה"), הקובעת בעקר את $\mathfrak{B}$ בתור התחום הכי צר המתאים לשבע האכסיומות; על ערך האכסיומה הזאת ונסוחה עיין דברי במאמר אחר[3]. על ידי שמונה האכסיומות האלה, כפי שעלי עוד להוכיח, נתנה לתורת הקבוצים שיטת אכסיומות שלמה ובלתי תלויה.

מרבורג ענ"ל, כ"ו תשרי תרפ"ג.

1) בעקר דרוש להציג באכסיומה ההיא קבוץ כל שהוא במקום קבוץ־האפס ופונקציה כל שהיא במקום הפונקציה $\{x\}$. פרטים בענין זה הבאתי בהרצאתי בליפציג 1922.

2) עיין: L'Enseignement Mathématique, XIXe Année (1917), p. 42

3) [B] עמ׳ 233 וכו׳. על הנסוח עיין גם השמוש באותו פרינציפ במאמרי: Axiomat. Begründung der transfiniten Kardinalzahlen, Math. Zeitschrift, Bd. 13 (1922), p. 163.