EDMUND LANDAU

ÜBER DIOPHANTISCHE APPROXIMATIONEN

Über diophantische Approximationen.

Von

Edmund Landau, Göttingen.

1. Man verdankt KRONECKER den

Satz: *$\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$ seien reell; bei ganzzahligen n_ν sei $\sum_1^m n_\nu \vartheta_\nu$ nur dann ganz, wenn alle $n_\nu = 0$ sind. $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ seien reell. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem reellen τ ein ganzes $t \geqq \tau$ und ganze x_ν, so daß*

$$(1) \qquad |t\vartheta_\nu - \alpha_\nu - x_\nu| < \varepsilon \qquad (\nu = 1, \ldots, m)$$

ist.

Die Herren HARDY und LITTLEWOOD haben zu Beginn ihrer Arbeit *Some problems of Diophantine Approximation* [Acta Mathematica, Bd. XXXVII (1914), S. 155—239] eine Reihe von Beweisen besprochen; der einfachste ist noch so kompliziert, daß sie ihn bloß für $m \leqq 3$ darstellen und den analogen Schluß von m auf $m + 1$ dem Leser überlassen. Inzwischen hat Herr WEYL in seiner Arbeit *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins* [Mathematische Annalen, Bd. LXXVII (1916), S. 313—352] eine neue Beweismethode für obigen und allgemeinere Sätze geschaffen. Hat man nur den genannten Satz im Auge, so läßt sich, wesentlich unter Benutzung des WEYL'schen Grundgedankens, der folgende überraschend kurze Beweis erbringen.

Es darf $\tau = 1$ angenommen werden (sonst ersetze man α_ν durch $\alpha_\nu - [\tau]\vartheta_\nu$, t durch $t - [\tau]$), ferner $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

$f(y)$ bezeichne die gerade Funktion, welche die Punkte $(0, \varepsilon)$, $(\varepsilon, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ geradlinig verbindet und die Periode 1 hat. $f(y)$ ist in eine Cosinusreihe

$$f(y) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,A_n \cos 2\pi n y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{2\pi n y i} \qquad (A_0 > 0,\ A_{-n} = A_n)$$

entwickelbar, und hierbei konvergiert

$$\text{(2)} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n|.$$

(Auf die genauen Werte $A_0 = \varepsilon^2$, $A_n = \frac{1-\cos 2\pi n\varepsilon}{2\pi^2 n^2}$ für $n > 0$ kommt es hier nicht an.) Die Behauptung lautet offenbar: Es gibt ein ganzes $t \geqq 1$ mit

$$\text{(3)} \qquad \prod_{\nu=1}^{m} f(t\vartheta_\nu - \alpha_\nu) \neq 0.$$

Für ganzes $\omega \geqq 1$ ist wegen der Konvergenz von (2)

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{\omega}\sum_{t=1}^{\omega}\prod_{1}^{m} f(t\vartheta_\nu - \alpha_\nu) = \sum_{\substack{n_\nu=-\infty \\ \nu=1,\ldots,m}}^{\infty} \prod_{1}^{m} A_{n_\nu}\, e^{-2\pi i \sum_{1}^{m} n_\nu \alpha_\nu}\, \frac{1}{\omega}\sum_{t=1}^{\omega} e^{t\cdot 2\pi i \sum_{1}^{m} n_\nu \vartheta_\nu},$$

wo die Summe rechts absolut und in ω gleichmäßig konvergiert; ihr allgemeines Glied ist ja absolut $\leqq \prod_{1}^{m} |A_{n_\nu}|$. Das Glied mit $n_1 = \ldots = n_m = 0$ ist A_0^m; jedes andere Glied strebt bei $\omega \to \infty$ gegen 0 wegen

$$\left|\sum_{t=1}^{\omega} e^{t\cdot 2\pi i \sum_1^m n_\nu \vartheta_\nu}\right| \leqq \frac{2}{\left|e^{2\pi i \sum_1^m n_\nu \vartheta_\nu} - 1\right|}.$$

Die rechte Seite von (4) strebt also gegen das positive A_0^m. Also existiert ein ω, so daß die linke Seite von (4) nicht 0 ist, d. h. ein ganzes $t \geqq 1$ mit (3).

2. Zugleich erhält man so eine obere Abschätzung des t als Funktion von ε und den ϑ_ν, womit eines der Desiderata auf S. 172 der HARDY-LITTLEWOOD'schen Arbeit erfüllt ist. Nicht zu verwundern ist, daß hierbei die Funktion

$$\mu_k = \operatorname*{Max.}_{\substack{|n_\nu| \leqq k \\ \sum_1^m n_\nu^2 > 0}} \frac{1}{\left|e^{2\pi i \sum_1^m n_\nu \vartheta_\nu} - 1\right|} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

auftritt, deren Verhalten bei wachsendem k ein Maß der linearen Unabhängigkeit der ϑ_ν angibt. Wegen

$$A_0 = \varepsilon^2,\ 0 \leqq A_n \leqq \frac{1}{\pi^2 n^2}\ (n > 0),\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n = f(0) = \varepsilon$$

ist, Verfügung über k vorbehalten, der Ausdruck (4)

$$\geqq \varepsilon^{2m} - \sum{}' \prod_1^m A_{n_\nu} \frac{2\mu_k}{\omega} - \sum{}'' \prod_1^m A_{n_\nu},$$

wo Σ' sich auf $|n_\nu| \leqq k$ exkl. $n_1 = \ldots = n_m = 0$, Σ'' auf alle Systeme exkl. $|n_\nu| \leqq k$ bezieht. Hierin ist

$$\sum{}' \leqq \frac{2\mu_k}{\omega}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\right)^m = \frac{2\varepsilon^m \mu_k}{\omega},$$

$$\sum{}'' = \left(\sum_{n=-k}^{k} A_n + 2\sum_{n=k+1}^{\infty} A_n\right)^m - \left(\sum_{n=-k}^{k} A_n\right)^m \leqq m \cdot 2\sum_{n=k+1}^{\infty} A_n \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\right)^{m-1} \leqq \frac{2m\varepsilon^{m-1}}{\pi^2}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \frac{2m\varepsilon^{m-1}}{\pi^2 k}.$$

Hierin setze ich

$$k = [m\varepsilon^{-m-1}] + 1, \quad \omega = [4\varepsilon^{-m}\mu_k] + 1.$$

Dann ist

$$\sum{}' < \frac{2\varepsilon^m \mu_k}{4\varepsilon^{-m}\mu_k} = \frac{\varepsilon^{2m}}{2}, \qquad \sum{}'' < \frac{2m\varepsilon^{m-1}}{\pi^2 m \varepsilon^{-m-1}} < \frac{\varepsilon^{2m}}{2},$$

$$\frac{1}{\omega}\sum_{t=1}^{\omega}\prod_{1}^{m} f(t\vartheta_\nu - \alpha_\nu) > \varepsilon^{2m} - \frac{\varepsilon^{2m}}{2} - \frac{\varepsilon^{2m}}{2} = 0.$$

Das kleinste $t \geqq 1$, das für $\varepsilon < \frac{1}{2}$ die Ungleichungen (1) bei passenden x_ν erfüllt, ist also höchstens gleich dem obigen $\omega = \omega(\varepsilon, \vartheta_\nu)$.

Berlin, 28. XII. 21.