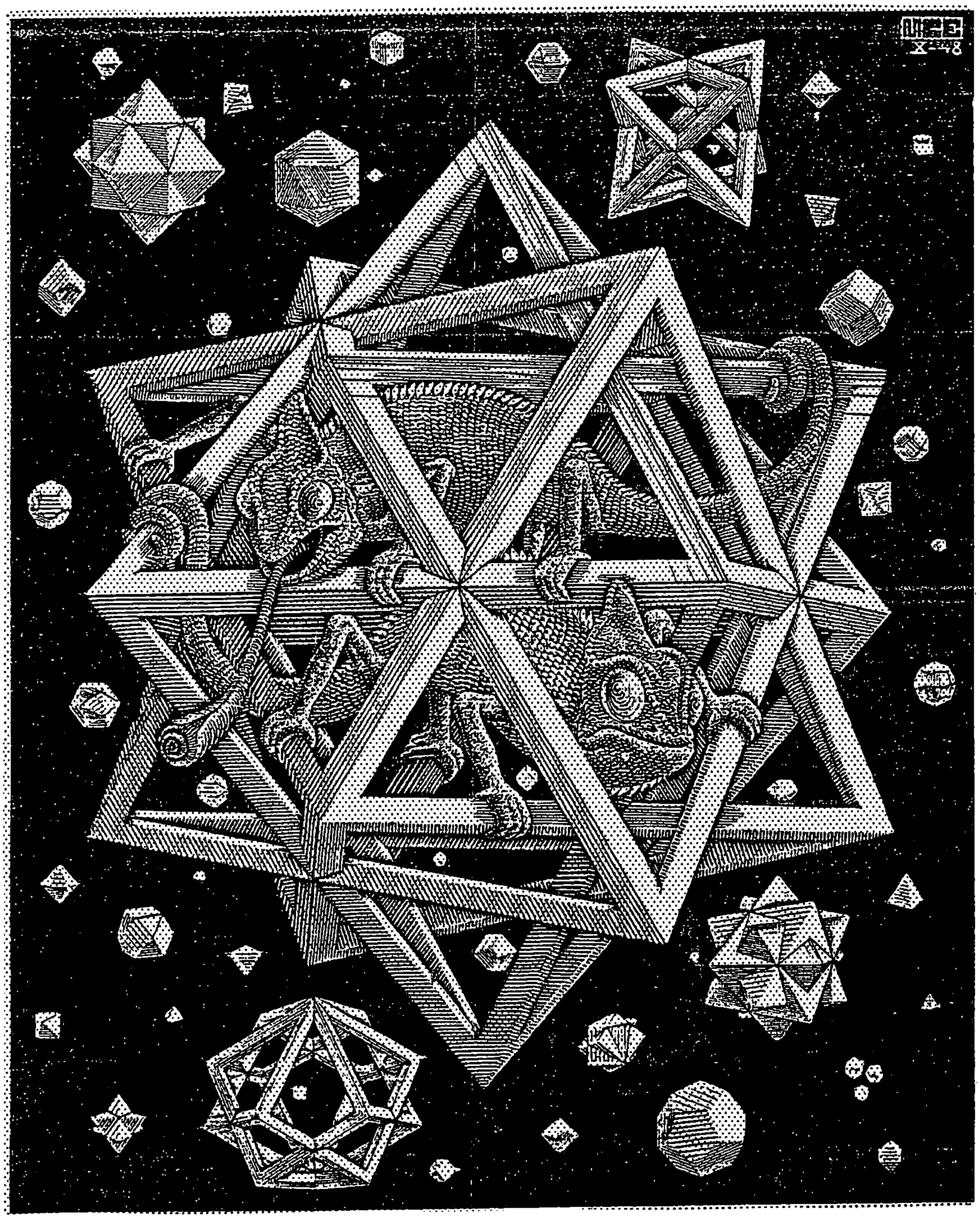
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס' 18

תשרי תשנ"א - אוקטובר 1990



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון וייצמן למדע
רחובות

תוכן העניינים

אתגר - גליונות מתמטיקה ISBN = 0334-201
מוצא לאור ע"י הפקולטות למתמטיקה במכון וייצמן ובטכניון.

המערכת:
פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שימושית, מכון וייצמן.
פרופ' א. ברמן וד"ר צ. הראל, הפקולטה למתמטיקה בטכניון.

מען המערכת: היחידה לפעולות נוער, מכון ויצמן למדע, רחובות, 76150, טל. 08-48297

עיבוד תמלילים והדפסה: קתדרה - הוצאה לאור טל. 08-411690.

דבר המערכת

עם גליון זה עוברת עריכת "אתגר-גליונות מתמטיקה" חזרה לרחובות. אנו תקווה שבתקופה בה נישא באחריות זו, נצליח להגיע לרמת עריכה ולתדירות הופעת העיתון כמו זו שציינה את התקופה בה היה העיתון באחריות הטכניון.

בגליון הקודם (17) דווח על תחרות דו-לאומית, ישראל-הונגריה שהתקיימה באפריל השנה ברחובות. לפי התכנית אמורה תחרות הגומלין להתקיים באביב 1991 בהונגריה. מפאת חוסר מקום לא התאפשר לנו להביא בגליון זה את הפתרונות לבעיות שהיו בתחרות הדו-לאומית הראשונה, נשתדל להציגם בגליון הבא.

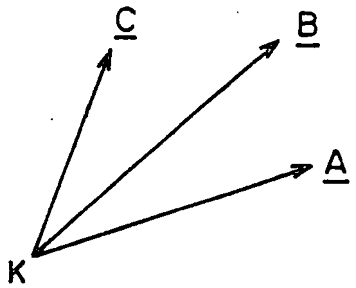
האולימפיאדה הבינלאומית במתמטיקה היתה השנה בפקינג (בייג'ין), סין, ובקיץ 1991 היא תהיה בשוודיה. תלמידים האוהבים לעסוק בפתרון בעיות (ובמתמטיקה בכלל), המעוניינים להשתתף בתחרויות כאלה יוכלו לקבל פרטים נוספים וגם ייעוץ והדרכה אם ייפנו לאחת מהכתובות הבאות:

פרופ' י. גיליס, מכון וייצמן למדע, רחובות

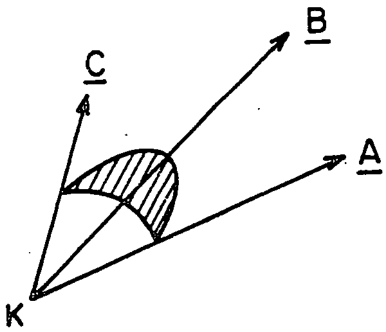
שי גרון, הפקולטה למתמטיקה, הטכניון, חיפה.

סינוס של זוית מרחבית

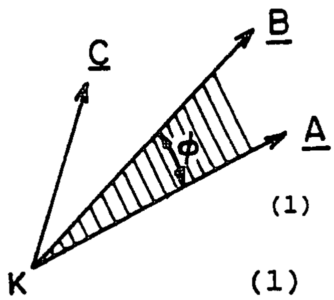
י. נהיר (ירושלים)



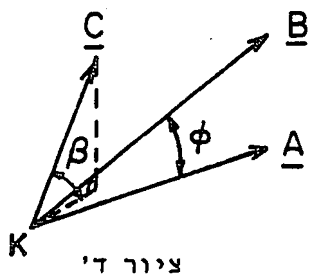
ציור א'



ציור ב'



ציור ג'



ציור ד'

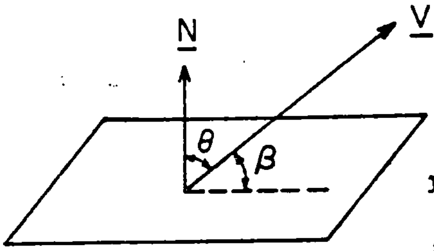
נניח שנתונים שלושה ווקטורים $\underline{A}$, $\underline{B}$ ו-$\underline{C}$; היוצאים מנקודה משותפת K (ציור א'). מגדירים את הזוית המרחבית שביניהן באופן הבא: מקיפים את נקודת המוצא K בכדור שמחוגו 1, ומתבוננים בכיפה המשולשת התחומה בין שלושת הווקטורים (ציור ב'). שטחה של כיפה זו נקרא "הזוית המרחבית" הנוצרת ע"י שלושת הווקטורים. נהוג לסמן זוית מרחבית ע"י האות Ω. הסינוס של הזוית המרחבית Ω יסומן ב-$\sin\Omega$ ויוגדר באופן הבא: נתבונן במישור AB הנוצר ע"י הווקטורים $\underline{A}$ ו-$\underline{B}$, ונסמן ב-ϕ את הזוית (הרגילה) שבינהן (ציור ג').
כמו כן תהיה β הזוית שבין הווקטור $\underline{C}$ והמישור AB (ציור ד').

נגדיר:

$$\boxed{\sin\Omega = \sin\phi \cdot \sin\beta} \qquad (1)$$

נעיר כי בדרך כלל נהוג לציין את ההתייחסות של ווקטור $\underline{V}$ למישור כלשהו ע"י ציון הזוית θ שבין ווקטור $\underline{N}$ הניצב למישור לבין הווקטור $\underline{V}$ שאת התייחסותו למישור רוצים לציין (ציור ה'). בכל זאת השתמשנו כאן בזוית β שבין המישור עצמו לווקטור $\underline{C}$,

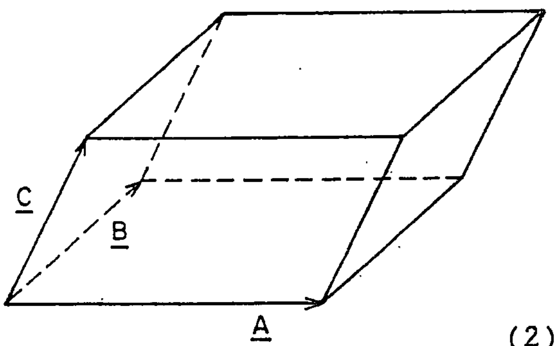
כלומר, הזוית בין ווקטור $\underline{C}$ להיטלו על המישור.
מובן כי שתי הזויות β ו-θ משלימות זו את זו ל-$90°$.



ציור ה'

הגדרה זו אינה תלויה בבחירת זוג הוקטורים הראשונים הקובעים את הזוית המישורית ϕ. זאת אומרת, שאפשר, למשל, לקבוע קודם את הזוית הרגילה בין $\underline{B}$ ל- $\underline{C}$ והיא תיקרא ϕ, ואחר-כך לקבוע את הזוית בין $\underline{A}$ למישור BC. ולקרוא לה β.

בכל מקרה נקבל אותו ערך מספרי ל- $\sin\Omega$. זאת נוכל לראות מהשיקול הבא:



ציור ו'

נבנה את המקבילון הנוצר ע"י שלושת הווקטורים $\underline{A}$ $\underline{B}$ ו-$\underline{C}$ (ציור ו'). אם נסמן את נפח המקבילון ב- V ונחשב אותו נמצא כי:

$$\boxed{V = ABC\sin\Omega} \qquad (2)$$

כאשר A, מסמן את אורך הווקטור $\underline{A}$ וכן ל-$\underline{B}$ ו-$\underline{C}$.

ואמנם שווה שטח המקבילון לשטח בסיסו כפול גבהו.
שטח הבסיס הוא $AB\sin\phi$ והגובה הוא $C\sin\beta$. ולכן הנפח הינו:

$$V = AB\sin\phi \cdot C\sin\beta = ABC\sin\Omega$$

מכיון שנפח המקבילון בלתי תלוי בדרך חישובו, הוא אכן מגדיר היטב את $\sin\Omega$.
ניתן עתה להפוך את סדר הדברים ולחלץ את $\sin\Omega$ מהנוסחה (2) ולקבל:

$$\boxed{\sin\Omega = \frac{V}{A \cdot B \cdot C}} \qquad (3)$$

נוסחה זו יכולה לשמש כהגדרה אחרת ל- $\sin\Omega$, הזוית המרחבית הנוצרת ע"י שלושה ווקטורים $\underline{A}$ $\underline{B}$ ו- $\underline{C}$. מובן כי הגדרה זו מתלכדת עם ההגדרה הקודמת ל- $\sin\Omega$, ועשויה לשמש לחישוב $\sin\Omega$. בכל אופן, ההגדרה בדרך זו, היא הרחבה של מושג הסינוס הרגיל. תהי זוית α ושוקיה קטעים a ו-b. נדמיין לנו את שטח המקבילית המתקבלת ע"י השלמת הזוית למקבילית. נסמן את שטח המקבילית ב- S, ונגדיר $\sin\alpha = S/ab$. ההגדרה מתאימה למקובל, שהרי כידוע, $S = ab \cdot \sin\alpha$.

<u>חישוב $\sin\Omega$ בהינתן הווקטורים לפי רכיביהם:</u>

נניח שנתונים הווקטורים

$$\underline{A} = (A_x,\ A_y,\ A_z)$$

$$\underline{B} = (B_x,\ B_y,\ B_z)$$

$$\underline{C} = (C_x,\ C_y,\ C_z)$$

מחשבון ווקטורים ידוע כי נפח המקבילון הנוצר ע"י הווקטורים $\underline{A}$ $\underline{B}$ ו-$\underline{C}$ ניתן ע" הדטרמיננטה

$$\text{נפח המקבילון} = \text{abs} \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

הדטרמיננטה. (abs הוא קיצור של המילה absolute = מוחלט).
בהתאם ל- (3) נקבל את הביטוי הבא עבור $\sin\Omega$ לפי רכיבי הווקטורים:

$$\sin\Omega = \frac{1}{ABC}\,\mathrm{abs}\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{4}$$

כאשר -

$A = \sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$ אורך של $\underline{A}$

$B = \sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}$ אורך של $\underline{B}$

$C = \sqrt{C_x^2+C_y^2+C_z^2}$ אורך של $\underline{C}$

לעיתים נשתמש בווקטורי יחידה, כלומר, בווקטורים שאורכם 1, נסמן אותם ב- $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ וכו'.

כמובן,

$$\underline{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z)$$

$$\underline{b} = (b_x,\ b_y,\ b_z)$$

$$\underline{c} = (c_x,\ c_y,\ c_z)$$

וכן

$a = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ אורך של a וכן ל- b ול-c,

לכן

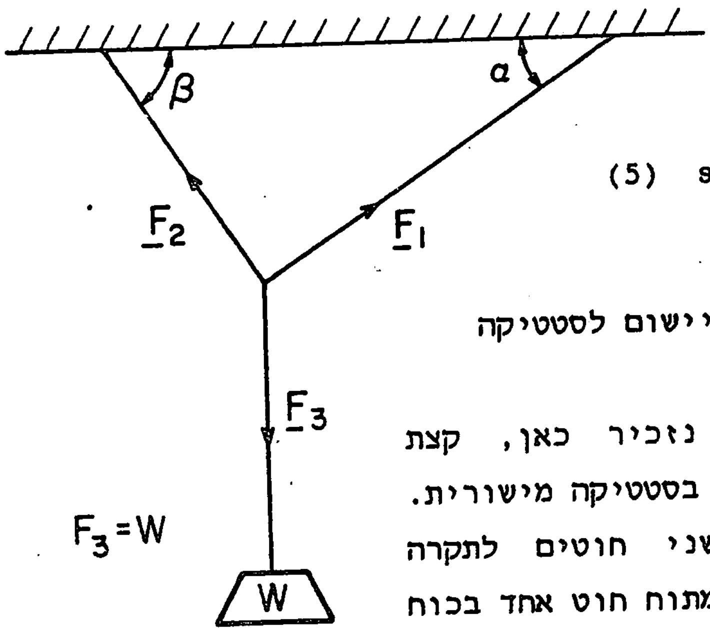
$$\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} = 1$$

ובדומה

$$\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2} = 1$$

$$\sqrt{c_x^2+c_y^2+c_z^2} = 1$$

לכן בהינתן שלושה ווקטורי יחידה יתקבל אפוא $\sin\Omega$ ע"י הביטוי הפשוט יותר:



ציור ז'

$$\sin\Omega = \mathrm{abs}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (5)$$

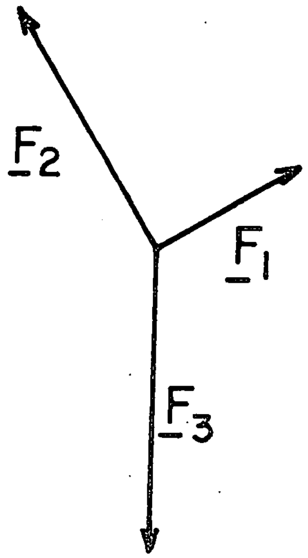
יישום לסטטיקה

למען הקל על הבנת ההמשך נזכיר כאן, קצת בפרוטרוט, בעיה מסוימת בסטטיקה מישורית. נניח שמשקולת W קשורה בשני חוטים לתקרה (ציור ז') במצב הנ"ל מתוח חוט אחד בכוח שגדלו F_1 והחוט השני בכוח שגדלו F_2. מטרתנו לחשב את הכוחות F_1 ו- F_2 כאשר נתונה משקולת שמשקלה W ונתונות הזויות בין החוטים לבין התקרה. תנאי שיווי המשקל אומר שסכום רכיבי הכוחות בכל כיוון שווה לאפס. מזה מתקבל:

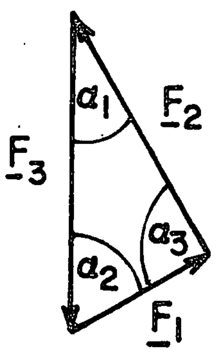
$$F_1\cos\alpha - F_2\cos\beta = 0 \qquad \text{(6)}$$
סכום רכיבי הכוחות בכיוון x

$$F_1\sin\alpha + F_2\sin\beta = W$$
סכום רכיבי הכוחות בכיוון y

קיבלנו אפוא שתי משוואות בשני הנעלמים F_1 ו- F_2. פתרון המשוואות נותן את גודל הכוחות F_1 ו- F_2.
כדאי לשים לב לכך שהזויות α,β נקבעות ע"י אורכי שני החוטים מן הקשר ועד לנקודת חיבורם אל התקרה, וגם ע"י המרחק בין נקודות החיבור הללו.
דרך אחרת לפתרון בעיה כזאת של שיווי משקל בין שלושה כוחות היא ע"י שימוש במשפט הסינוסים, כדלקמן.
יהיו שלושה כוחות, המיוצגים ע"י שלושה וקטורים $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$ ו- $\underline{F}_3$ היוצאים מנקודה אחת ונמצאים בשיווי משקל (ציור ח'). נזיז את הווקטורים המייצגים את הכוחות עד שיווצר משולש (ציור ט'). מכיון שנתון כי הכוחות נמצאים בשיווי משקל, הרי יוצא שסכום הווקטורים המייצגים את הכוחות שווה לאפס. מכאן שמשולש הווקטורים המייצגים את הכוחות יהיה משולש סגור.
מתוך נתוני הבעיה אפשר למצוא את הזויות שבין הכוחות, ואז מקבלים לפי משפט הסינוסים כי:



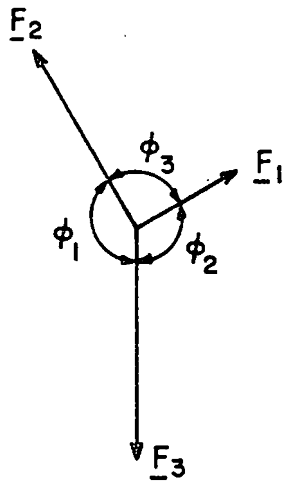
ציור ח'



ציור ט'

$$\frac{F_1}{\sin\alpha_1} = \frac{F_2}{\sin\alpha_2} = \frac{F_3}{\sin\alpha_3} \qquad (7)$$

כאשר F_i הוא אורך הווקטור $\underline{F}_i$; $i=1,2,3$.
מכאן שאם ידוע אחד הכוחות, ונתונות הזויות, נוכל לקבל בקלות את הכוחות האחרים.



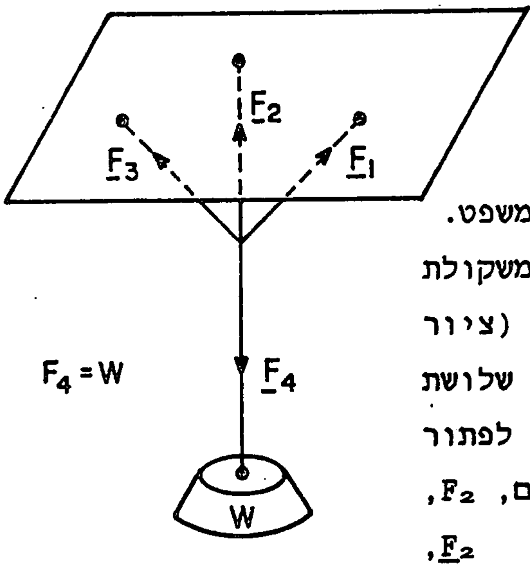
ציור י'

קיימת דרך שלישית לפתרון הבעיה. והיא מופיעה רק לעתים נדירות בספרים והיא כדלקמן:
נתבונן בשלושת הווקטורים היוצאים מנקודה אחת מבלי להזיזם ממקומם ונסמן את הזויות בין הווקטורים באופן כזה ש -

ϕ_1 תהיה בין $\underline{F}_2$ ל- $\underline{F}_3$, כלומר, מול $\underline{F}_1$.
ϕ_2 תהיה בין $\underline{F}_1$ ל- $\underline{F}_3$, כלומר, מול $\underline{F}_2$.
ϕ_3 תהיה בין $\underline{F}_1$ ל- $\underline{F}_2$, כלומר, מול $\underline{F}_3$.

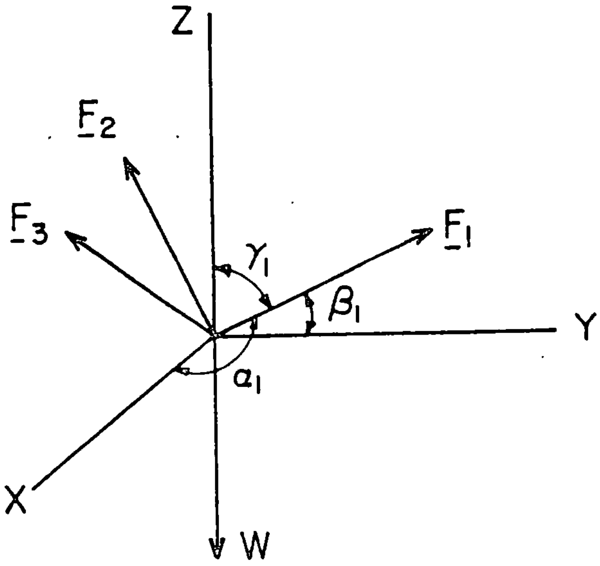
(ראה ציור י') ואז מתקיים

$$\frac{F_1}{\sin\phi_1}=\frac{F_2}{\sin\phi_2}=\frac{F_3}{\sin\phi_3} \qquad (8)$$



ציור יא'

זה דומה למשפט הסינוסים בטריגונומטריה ואכן ההוכחה מתבססת על אותו משפט.
נעבור למקרה התלת ממדי, דהיינו, משקולת התלויה בשלושה חוטים הקשורים לתקרה (ציור י"א), ושוב נניח כי נתונים אורכי שלושת החוטים ונקודות חיבורם לתקרה. ניתן לפתור את בעית חישוב המתיחויות בחוטים, F_2, F_1 ו- F_3, ע"י פירוק הכוחות $\underline{F}_2$, $\underline{F}_1$ ו- $\underline{F}_3$ לרכיבים ורישום תנאי שיווי המשקל בדומה למקרה הדו-ממדי (מערכת משוואות (6)) לעיל - בדרך הראשונה.



ציור יב'

זה יתבטא בעריכת 3 משוואות בשלושת הנעלמים F_1, F_2 ו- F_3. נראה זאת הלכה למעשה: נניח שאנו מציבים מערכת צירים X,Y,Z עם הראשית בנקודת החיבור של כל הכוחות (ציור י"ב). מתוך נתוני הבעיה נמצא את הזויות - α_1, β_1 ו-γ_1. בין הווקטור $\underline{F}_1$ ובין הצירים Y,X ו-Z בהתאמה. כמו כן נמצא ונסמן ב- α_2, β_2 ו-γ_2 את הזויות בין הכוח $\underline{F}_2$ והצירים, וכן יהיו α_3, β_3, ו-γ_3 עבור $\underline{F}_3$. בציור י"ב מסומנים למען הבהירות רק הזויות α_1, β_1 ו-γ_1.

תנאי שיווי המשקל הם:

ביחס לציר X
$$F_1\cos\alpha_1 + F_2\cos\alpha_2 + F_3\cos\alpha_3 = 0$$

ביחס לציר Y
$$F_1\cos\beta_1 + F_2\cos\beta_2 + F_3\cos\beta_3 = 0 \tag{9}$$

ביחס לציר Z
$$F_1\cos\gamma_1 + F_2\cos\gamma_2 + F_3\cos\gamma_3 - W = 0$$

לכן כאשר נתונות הזויות והמשקל W אפשר לפתור את שלוש המשוואות הללו בשלושת הנעלמים F_1, F_2 ו- F_3 ובכך נפתרה הבעיה.

נראה עתה כי בניסוח מתאים אפשר לפתור את הבעיה באופן דומה לדרך השלישית שהראינו לעיל במקרה המישורי. כלומר, ניתן לנסח מעין משפט סינוסים של ווקטורים במרחב, או במלים אחרות, אפשר להרחיב את המשוואה (8) למקרה התלת ממדי.

לפי כתיב זה ירשם תנאי שיווי המשקל (11) באופן הבא:

$$(12)\quad F_1\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + F_2\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + F_3\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} + F_4\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} = 0$$

כאשר כתבנו את וקטורי היחידה בצורת עמודות.

נרשום את משוואה (12) בצורה מפורשת, ונקבל מערכת של 3 משוואות בארבעת הנעלמים, F_1, F_2, F_3 ו- F_4.

$$(13)\quad \begin{aligned} F_1a_x + F_2b_x + F_3c_x + F_4d_x &= 0 \\ F_1a_y + F_2b_y + F_3c_y + F_4d_y &= 0 \\ F_1a_z + F_2b_z + F_3c_z + F_4d_z &= 0 \end{aligned}$$

כידוע, יש למערכת משוואות כזאת אינסוף פתרונות. אולם אם נתון אחד הנעלמים, אפשר בדרך כלל לבטא את שאר הנעלמים בעזרת הנעלם הנתון בצורה חד-ערכית. נניח אפוא ללא הגבלת הכלליות כי נתון F_4, ונפתור לפיו את F_1, F_2 ו- F_3. לשם כך נעביר את האברים עם F_4 לאגף ימין ונקבל:

$$(14)\quad \begin{aligned} F_1a_x + F_2b_x + F_3c_x &= -F_4d_x \\ F_1a_y + F_2b_y + F_3c_y &= -F_4d_y \\ F_1a_z + F_2b_z + F_3c_z &= -F_4d_z \end{aligned}$$

פתרון המשוואות ניתן ע"י הדטרמיננטות

$$(15)\quad F_1 = \frac{-\begin{vmatrix} d_x & b_x & c_x \\ d_y & b_y & c_y \\ d_z & b_z & c_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}} F_4, \quad F_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_x & d_x & c_x \\ a_y & d_y & c_y \\ a_z & d_z & c_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}} F_4, \quad F_3 = \frac{-\begin{vmatrix} a_x & b_x & d_x \\ a_y & b_y & d_y \\ a_z & b_z & d_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}} F_4$$

נשקף את הדטרמיננטות שקיבלנו ביחס לאלכסון הראשי, כלומר, נחליף את השורות בעמודות (כידוע, אין השיקוף משנה את ערכי הדטרמיננטות). מאידך אנו מעוניינים רק בערך המוחלט של גודל הכוחות F_1, F_2, F_3 ו- F_4 (כי כיוון הכוחות ידוע מנתוני הבעיה). נוכל לסדר את השורות בדטרמיננטות בסדר נוח לנו, ונציין abs לפני כל דטרמיננטה.

אם נחלק כל משוואה דלעיל בדטרמיננטה שבמונה נקבל במקום מערכת המשוואות האחרונה (15) את השוויונות הבאים:

$$\frac{F_1}{\text{abs}\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{vmatrix}} = \frac{F_2}{\text{abs}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{vmatrix}} =$$

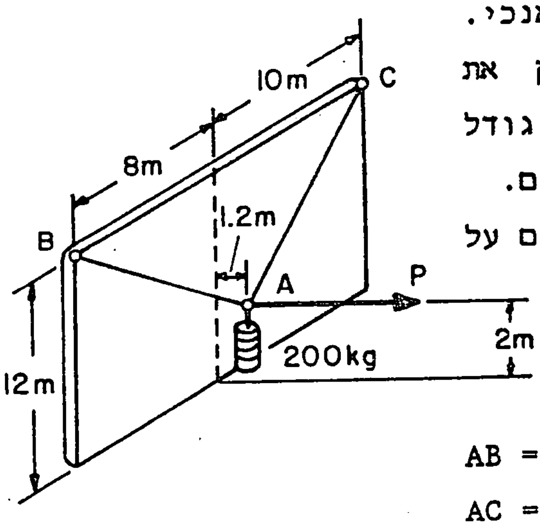
$$= \frac{F_3}{\text{abs}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ d_x & d_y & d_z \end{vmatrix}} = \frac{F_4}{\text{abs}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}} \qquad (16)$$

השורות בדטרמיננטות הללו הן בעצם ווקטורי יחידה בכיוון הכוחות, ולכן מייצגות הדטרמיננטות את ה $\sin\Omega$ המתאים (ראה (5) לעיל). לכן נוכל לכתוב את המשוואה האחרונה (16) בצורה:

$$\frac{F_1}{\sin\Omega_1} = \frac{F_2}{\sin\Omega_2} = \frac{F_3}{\sin\Omega_3} = \frac{F_4}{\sin\Omega_4}$$

הוכחנו אפוא את (10).

דוגמא: משקולת בת 200 ק"ג תלויה בשני כבלים AB ו-AC המחוברים לראש קיר אנכי. כוח אופקי P הניצב לקיר, מחזיק את המשקולת במצב שבציור ט"ו. קבע את גודל הכוח P ואת המתיחויות בכל אחד מהכבלים.



ציור ט"ו

נרשום ווקטורים בכיוון הכוחות הפועלים על A באורך כלשהו (ציור ט"ז).

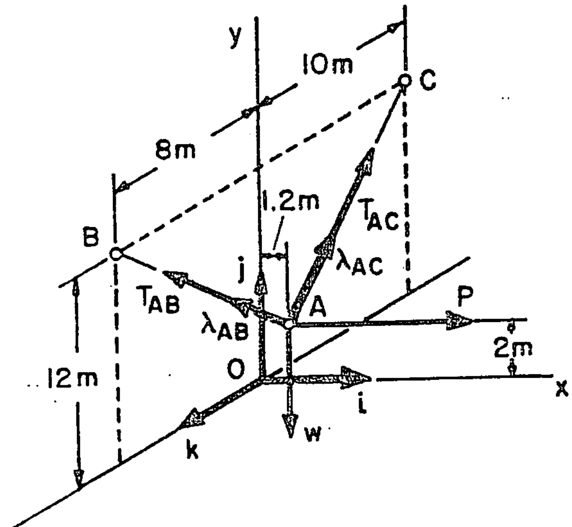
$$AB = (-1.2\ ;\ 10\ ;\ 8)$$

$$AC = (-1.2\ ;\ 10\ ;\ -10)$$

$$AP = (\ 1\ ;\ 0\ ;0)$$

$$AW = (\ 0\ ;\ -1\ ;\ 0)$$

נרשום שוב כל ווקטור כסקלר מוכפל בווקטור יחידה מתאים:



ציור ט"ז

$$\underline{T_{AB}} = T_{AB}\frac{(-1.2\ ;\ 10\ ;\ 8)}{\sqrt{1.2^2+10^2+8^2}} =$$

$$= T_{AB}(-0.0933\ ;\ 0.777\ ;\ 0.622)$$

$$\underline{T_{AC}} = T_{AC}\frac{(-1.2\ ;\ 10\ ;\ -10)}{\sqrt{1.2^2+10^2+10^2}} =$$

$$= T_{AC}(-0.0845\ ;\ 0.705\ ;\ -0.705) \qquad (17)$$

$$\underline{P} = P\ (\ 1\ ;\ 0\ ;0)$$

$$\underline{W} = 1962\ (\ 0\ ;\ -1\ ;\ 0)$$

את המשקל בן 200 הק"ג רשמנו בניוטון:
1962 ניוטון = 200x9.81.

תנאי שיווי המשקל הינו כי סכום רכיבי הכוחות בכל כיוון הוא אפס. מכאן מקבלים:

$$-0.0933\ T_{AB} - 0.0845\ T_{AC} + P = 0$$

$$0.777\ T_{AB} + 0.705\ T_{AC} = 1962 \qquad (18)$$

$$0.622\ T_{AB} - 0.705\ T_{AC} = 0$$

והרי שלוש משוואות בנעלמים T_{AB}, T_{AC} ו- P, שפתרונם:
$T_{AB} = 1402.9$, $T_{AC} = 1237.9$, $P = 235.40$.
עתה נפתור את הבעיה בעזרת (10).

$$\frac{1962}{\text{abs}\begin{vmatrix} -1.2 & 10 & 8 \\ -1.2 & 10 & -10 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1.2^2+10^2+8^2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1.2^2+10^2+10^2}}} =$$

$$= \frac{P}{\text{abs}\begin{vmatrix} -1.2 & 10 & 8 \\ -1.2 & 10 & -10 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1.2^2+10^2+8^2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1.2^2+10^2+10^2}}} =$$

(19)

$$= \frac{T_{AB}}{\text{abs}\begin{vmatrix} -1.2 & 10 & -10 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1.2^2+10^2+10^2}}} =$$

$$= \frac{T_{AC}}{\text{abs}\begin{vmatrix} -1.2 & 10 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1.2^2+10^2+8^2}}}$$

את ה- $\sin\Omega$ המופיעים בחישובים רשמנו ע"י הצבת הווקטורים המקוריים בדטרמיננטות, וחילוק בארכי הווקטורים מחוץ לדטרמיננטות. הדבר מאפשר צמצומים התורמים לדיוק התוצאות.

התוצאות בחישוב כאן היו:

$.T_{AB} = 1402.0 \; , \; T_{AC} = 1237.6 \; , \; P = 235.44$

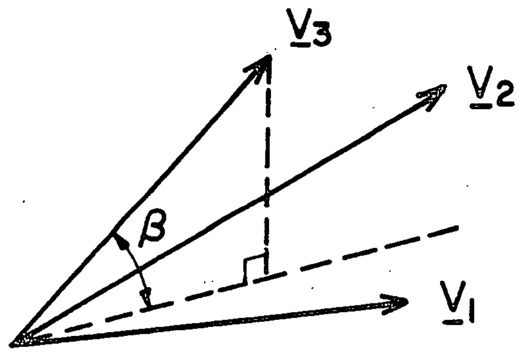
<u>בעיה לדוגמא:</u>

לשימוש שלהלן נזכיר כי בהינתן שני ווקטורי יחידה

$\underline{V}_1 = (a_x, \; a_y, \; a_z)$

$\underline{V}_2 = (b_x, \; b_y, \; b_z)$

הרי ϕ, הזוית שביניהם, קשורה לווקטורים ע"י הנוסחאות:



ציור יז'

$$\cos\phi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\sin\phi = \sqrt{1 - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2}$$

נניח עתה כי נתונים שלושה ווקטורים $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$ ונחשב את הזוית β שבין הווקטור $\underline{V}_3$ לבין המישור הנקבע ע"י שני הווקטורים $\underline{V}_1, \underline{V}_2$ (ציור י"ז).

לשם פשטות נניח כי הווקטורים הם ווקטורי יחידה (אחרת נחלק תחילה כל ווקטור באורכו). נטפל אפוא בשלושת הווקטורים:

$\underline{V}_1 = (a_x, \; a_y, \; a_z)$

$\underline{V}_2 = (b_x, \; b_y, \; b_z)$

$\underline{V}_3 = (c_x, \; c_y, \; c_z)$

עלינו למצוא את הזוית β שבין $\underline{V}_3$ לבין המישור של $\underline{V}_1$ עם $\underline{V}_2$. אפשר לפתור בעייה זו ע"י הנדסת המרחב, או טוב יותר, ע"י חשבון ווקטורים בעזרת מכפלה ווקטורית. אולם בשימוש ב-$\sin\Omega$ התשובה מיידית:

$$\sin\beta = \frac{\sin\Omega}{\sin\phi} = \frac{\mathrm{abs}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}}{\sqrt{1 - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2}} \qquad (20)$$

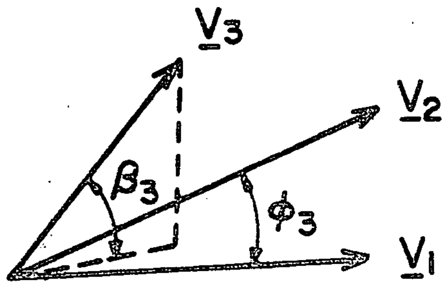
<u>משפט הסינוסים הכפלי</u>

נתבונן בשלושת הווקטורים $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$ ו-$\underline{V}_3$, (ציור י"ח) ונסמן את הזויות הפשוטות הנוצרות בין כל זוג ווקטורים באופן הבא:

בין $\underline{V}_1$ ל- $\underline{V}_2$ תסומן הזוית ב-ϕ_3.

בין $\underline{V}_2$ ל- $\underline{V}_3$ תסומן הזוית ב-ϕ_1.

בין $\underline{V}_3$ ל- $\underline{V}_1$ תסומן הזוית ב-ϕ_2.



ציור יח'

כמו כן נסמן את הזוית בין $\underline{V}_3$ למישור $\underline{V}_2\underline{V}_1$ ב-β_3.

" " נסמן את הזוית בין $\underline{V}_2$ למישור $\underline{V}_3\underline{V}_1$ ב-β_2.

" " נסמן את הזוית בין $\underline{V}_1$ למישור $\underline{V}_3\underline{V}_2$ ב-β_1.

(בציור י"ח סימנו לשם בהירות רק את ϕ_3 ו- β_3)

נזכיר את שהבאנו בתחילה, עם הגדרת $\sin\Omega$. שם אמרנו כי אין ההגדרה תלויה בזוג הווקטורים אותו בחרנו כדי לייצג את הזוית המישורית ϕ, ואז תסומן ב- β הזוית שבין המישור של אותו זוג ווקטורים לווקטור השלישי, ולפי שתי זויות אלה יוגדר $\sin\Omega$.

נחשב, אפוא, את $\sin\Omega$ בשלוש הדרכים האפשריות, והשוואת התוצאות תיתן את מה שנקרא לו "משפט הסינוסים הכפלי".

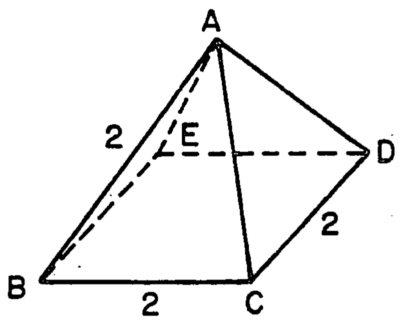
$$(21)\quad \sin\phi_1 \cdot \sin\beta_1 = \sin\phi_1 \cdot \sin\beta_1 = \sin\phi_1 \cdot \sin\beta_1 = \sin\Omega$$

התוספת "כפלי" באה להבדילו ממשפט הסינוסים הרגיל בטריגונומטריה. ההוכחה נתונה כבר בכך שהראינו (ראה דיון לפני משוואה (10)), כי הגדרת $\sin\Omega$ היא טובה ואינה תלויה בדרך בה חושבה.

<u>שאלה:</u>

נניח שיש לנו פירמידה מרובעת ישרה, אשר כל מקצועותיה הן 2 ס"מ, ובסיס הפירמידה ריבוע. יש לקבוע את הזוית בין מקצוע הבסיס BC לבין המישור (הפאה) ABE (ציור י"ט).

רמז: יש למצוא קודם את גובה הפירמידה.



ציור יט'

בהזדמנות זו ברצוני להודות לפרופ' מתי רובין, לפרופ' מרים כהן, לפרופ' ס. שניידר, לפרופ' מ. לין על התענייינותם ועידודם בעבודתי.

בפרט נעים לי להודות לפרופ' דני ברנד ולפרופ' תדי אייזנברג שקראו את כתב היד והעירו הערות מועילות, כולם חברי למחלקה למתמטיקה באוניברסיטת בן-גוריון בנגב.

האולימפיאדה הבינלאומית למתמטיקה (1990)

י. גיליס (רחובות)

האולימפיאדה הבינלאומית למתמטיקה נערכת מדי שנה כבר מאז שנת 1959 (פרט לשנת 1980 אשר אז מסיבות שונות לא ניתן היה לקיימה). השנה (1990) הוזמנו המדינות המשתתפות לשלוח את נבחרותיהן לפקינג, סין.

למעשה אין כמעט שום ארגון מפקח או אפילו תקנון קבוע לתחרות, ולמדינה המארחת (שהיא גם אחראית לכל ההוצאות המרובות הקשורות בדבר) יש סמכות רחבה לקבוע את רוב הפרטים והניהול המעשי. מאידך התפתחו עם הזמן כמה נהלים שהפכו למעין מסורת, והנה כמה מהם:

1. אם כי המדינה המארחת מוסמכת לקבוע אלו מדינות היא רוצה להזמין, קיימת מגבלה מסורתית (שאינה מחייבת לגמרי) להזמין את כל המדינות שהשתתפו אי-פעם בעבר. מובן שמותר להזמין גם מדינות נוספות לפי הרצון.

   למעשה הופר כלל זה רק פעמיים, כאשר ישראל לא הוזמנה לצ'כיה ב-1984 ולקובה ב- 1987, ושני מקרים אלה השאירו רושם כה שלילי עד שעכשיו ישנה נטיה בכלל לא לקבל הצעת אירוח מאף מדינה ללא הבטחה מראש להזמין את כל המדינות החברות, ללא יוצא מן הכלל.

2. המארחים מוסמכים לקבוע את המספר המרבי של מתחרים מכל מדינה. בשנים האחרונות היה מקובל שכל מדינה יכולה לשלוח עד 6 תלמידים. אבל עם הגידול המתמיד של מספר המדינות המשתתפות מתפתחת נטיה לצמצם את המספר הזה וייתכן כי בשנה הבאה (1991), כאשר תתקיים התחרות בשוודיה, יוגבל המספר ל-4. יש לצפות, על סמך שיקולים סטטיסטיים, שצמצום זה יחליש את היתרון הגדול שיש עכשיו למדינות גדולות מרובות אוכלוסין.

השאלונים

להלן השאלות שהוצגו בפני המתחרים:

1. שני מיתרים AB, CD של מעגל נפגשים בנקודה E בפנים המעגל. M היא נקודה פנימית של הקטע EB. המשיק ב-E למעגל העובר דרך D, E, M חותך את AC, BC בנקודות G, F בהתאמה. אם

$$AM/AB = t$$

בטא את $\frac{EG}{EF}$ כפונקציה של t.

2. S היא קבוצה של $2n-1$ נקודות על מעגל. תת-קבוצה A של S נקראת "טובה" אם יש בה לפחות שתי נקודות P, Q, כך שבאחת הקשתות PQ של המעגל נמצאות בדיוק $n-1$ נקודות של S חוץ מ-P, Q עצמם.

מהו הערך הקטן ביותר של k שנוכל לומר עליו כי כל תת-קבוצה בעלת k נקודות או יותר תהיה בהכרח "טובה"?

3. עבור אלו ערכים שלמים של n יהיה

$$\frac{2^n+1}{n^2}$$

מספר שלם? נמקו!

4. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת על Q^+ (הרציונאליים החיוביים) וגם ערכי $f(x)$ שייכים ל- Q^+. נתון כי לכל x, y של Q^+ קיים $f(xf(y)) = f(x)/y$

בנה את הפונקציה $f(x)$.

5. קובעים מספר טבעי x_0 ואז שני שחקנים A,B מפתחים את הסדרה $x_1,x_2,x_3,\dots$ כדלקמן:

(i) בהינתן x_{2k} בוחר A במספר טבעי x_{2k+1} כך ש-

$$x_{2k} \le x_{2k+1} \le x_{2k}^2$$

(ii) בהינתן x_{2k+1} בוחר B במספר x_{2k+2} כך ש-

$$x_{2k+1}/x_{2k+2}$$

שווה לחזקה חיובית של מספר ראשוני. המשחק מסתיים בניצחון של A אם הוא מצליח לבחור $x_{2k+1}=1990$ ובניצחון של B אם הוא בוחר $x_{2k+2} = 1$.

S_A היא קבוצת המספרים, כך שאם ייבחר x_0 מביניהם אזי יכול A להבטיח לעצמו ניצחון. כמו כן, S_B היא קבוצת הערכים של x_0 שיאפשרו ל-B להבטיח לעצמו ניצחון. מצא את S_A ואת S_B.

6. הוכח שאפשר לבנות מצולע קמור בעל 1990 צלעות אשר כל זויותיו הפנימיות שוות ואילו אורכי צלעותיו הם המספרים $1^2,2^2,\dots,1990^2$, לאו דוקא בסדר זה.

<u>על שתי תבניות "דומות" מתורת המספרים</u>

דוד רימר, רחובות

1. ידוע כי שני מספרים טבעיים כלשהם x ו-a נקראים זרים יחסית אם ורק אם המחלק המשותף הגדול ביותר שלהם הוא - 1, כלומר $(x,a) = 1$.

ברור כי אם x מספר ראשוני, מספר המספרים הטבעיים a המקיימים שני תנאים: (1) $a<x$, (2) $(x,a) = 1$ הוא בדיוק $x-1$. לדוגמא - עבור $x=5$ קבוצת המספרים המקיימים את התנאים (1) ו-(2) היא $\{1,2,3,4\}$ אשר מספר איבריה הוא בדיוק 4 דהיינו, $5-1$.

אבל אם המספר פריק, קיימים בהחלט מספרים טבעיים המקיימים תנאי (1) אבל אינם מקיימים את תנאי (2) מפני שיש להם גורם משותף עם x. לכן מספר המספרים המקיימים את התנאים (1) ו-(2) גם יחד הוא קטן מ-x. דוגמא: עבור $x=12$ קבוצת המספרים המקיימים את שני התנאים (1) ו-(2) היא $\{1,5,7,11\}$ ומספר איבריה הוא 4.

נוצר הצורך לבטא מספר זה באופן מסוים כלומר, את מספר המספרים הטבעיים הקטנים מ-x וזרים לו יחסית. זאת עשה המתמטיקאי השוויצרי הדגול אוילר[1]. הוא סימן ב-$\varphi(x)$ (קרי, פי של x) את מספר המספרים הטבעיים הקטנים מ-x וזרים לו, ז"א המקיימים את התנאים (1) ו-(2) גם יחד.

<u>הערה</u>: הפונקציה $\varphi(x)$ מתייחסת למספר המספרים המקיימים את התנאים (1) ו-(2) ולא לקבוצות אותם המספרים. דוגמא: בשביל $x=4$ ו-$x=6$ הקבוצות המתאימות הן $\{1,3\}$ ו-$\{1,5\}$. ברור כי הקבוצות אינן שוות, אבל מספרי איבריהן שווים. דהיינו

2 ולכן $\varphi(4)=\varphi(6)=2$. כתרגיל לשימוש בפונקציה זו נחשב את

על שתי תבניות "דומות" מתורת המספרים

דוד רימר, רחובות

1. ידוע כי שני מספרים טבעיים כלשהם x ו-a נקראים זרים יחסית אם ורק אם המחלק המשותף הגדול ביותר שלהם הוא - 1, כלומר $(x,a) = 1$.

ברור כי אם x מספר ראשוני, מספר המספרים הטבעיים a המקיימים שני תנאים: (1) $a<x$, (2) $(x,a) = 1$ הוא בדיוק $x-1$. לדוגמא - עבור $x=5$ קבוצת המספרים המקיימים את התנאים (1) ו-(2) היא $\{1,2,3,4\}$ אשר מספר איבריה הוא בדיוק 4 דהיינו, 5-1.

אבל אם המספר פריק, קיימים בהחלט מספרים טבעיים המקיימים תנאי (1) אבל אינם מקיימים את תנאי (2) מפני שיש להם גורם משותף עם x. לכן מספר המספרים המקיימים את התנאים (1) ו-(2) גם יחד הוא קטן מ-x. דוגמא: עבור $x=12$ קבוצת המספרים המקיימים את שני התנאים (1) ו-(2) היא $\{1,5,7,11\}$ ומספר איבריה הוא 4.

נוצר הצורך לבטא מספר זה באופן מסוים כלומר, את מספר המספרים הטבעיים הקטנים מ-x וזרים לו יחסית. זאת עשה המתמטיקאי השוויצרי הדגול אוילר[1]. הוא סימן ב-$\varphi(x)$ (קרי, פי של x) את מספר המספרים הטבעיים הקטנים מ-x וזרים לו, ז"א המקיימים את התנאים (1) ו-(2) גם יחד.

<u>הערה</u>: הפונקציה $\varphi(x)$ מתייחסת למספר המספרים המקיימים את התנאים (1) ו-(2) ולא לקבוצות אותם המספרים. דוגמא: בשביל $x=4$ ו-$x=6$ הקבוצות המתאימות הן $\{1,3\}$ ו-$\{1,5\}$. ברור כי הקבוצות אינן שוות, אבל מספרי איבריהן שווים. דהיינו

2 ולכן $\varphi(4)=\varphi(6)=2$. כתרגיל לשימוש בפונקציה זו נחשב את

$\varphi(p^2)$ כאשר p מספר ראשוני. מספר המספרים הטבעיים הקטנים מ-p^2 הוא p^2-1, אבל $(p-1)$ המספרים $p,2p,\ldots(p-1)p$ הם כולם קטנים מ-p^2, ולכל אחד יש גורם משותף עם p^2. יוצא כי

$$\varphi(p^2) = (p^2-1)-(p-1) = p^2-p$$

ברור כי אפשר להכליל את הרעיון הזה וכי עבור כל p ראשוני וכל α טבעי

$$\varphi(p^\alpha) = (p^\alpha-1)-(p^{\alpha-1}-1) = (p^\alpha-p^{\alpha-1})$$

2. המתמטיקאי הצרפתי פרמה[2] המציא והוכיח משפט, שבעזרת הפונקציה של אוילר $\varphi(x)$ נרשם כך:
אם p מספר ראשוני, x מספר טבעי, ו- $(x,p) = 1$. אזי $x^{\varphi(p)}-1$ מתחלק ללא שארית ב-p. במלים אחרות, קיים מספר טבעי a כך ש-

$$\frac{x^{\varphi(p)}-1}{p} = a$$

דוגמא: עבור $p=3$ ו-$x=10$ מתקבל $\varphi(3)=2$ ו- $\frac{10^2-1}{3} = 33$
ז.א. $a=33$

<u>הערה</u>: ההגבלה $(x,p)=1$ אינה מיותרת, כי למשל, ללא תנאי זה אם ניקח $p=3$ ו-$x=6$ נקבל $(6^2-1)/3 = 35/3$ ו- $35/3$ איננו מספר טבעי.

3. אוילר הרחיב את משפט פרמה והוכיח כי אם m מספר טבעי כלשהו (ראשוני או פריק כאחד) ו-x מספר טבעי זר יחסית ל-m אז $x^{\varphi(m)}-1$ מתחלק ב-m ללא שארית. כלומר, קיים b טבעי

כך ש-

$$\frac{x^{\varphi(m)}-1}{m} = b.$$

דוגמא: $m=6$, $x=5$. אז $\varphi(6)=2$ ו- $\frac{5^2-1}{6} = 4$ כלומר, $b=4$.

4. נעסוק עתה בשתי תבניות "דומות":

$$b = \frac{10^{\varphi(p^2)}-1}{p^2} \qquad a = \frac{10^{\varphi(p)}-1}{p}$$

כאשר p מספר ראשוני שונה מ- 2 ומ- 5. (הערה: תנאי זה $p\neq2$, $p\neq5$) מבטיח כי p^2 אינו מכיל אף אחד מהגורמים של 10 ולכן $(10,p^2) = 1$, ואז b מספר טבעי, לפי משפט אוילר). ברור כי גם a מספר טבעי מפני ש-
$\varphi(p) = p-1$, ולפי משפט פרמה, $a\in N$. נשאלת שאלה טבעית:
מאחר שהתבניות של a ו- b כל כך דומות, האם נוכל לבטא את b בעזרת a בלבד? התשובה חיובית והיא:

$$b=a\ [a\|2a\|3a\|\ldots\|(p-2)a\|(p-1)a+1]$$

כאשר $\|$ הוא סימון להצמדת מספרים כמו: $35\|4\|73=35473$.

<u>הוכחה:</u> מאחר ש $a = \frac{10^{p-1}-1}{p}$, נובע כי

$$10^{p-1} = ap+1$$

כמו כן $\varphi(p^2) = p^2-p$ ולכן $b = \frac{10^{p^2-p}-1}{p^2}$.

בעיבוד אלגברי קל מתקבל:

$$b = \frac{(10^{p-1})^p-1}{p^2} = \frac{(10^{p-1}-1)\sum_{k=0}^{p-1}(10^{p-1})^k}{p^2}$$

היות ש - $a = \frac{10^{p-1}-1}{p}$

אם נסמן - $M = 1/p\sum_{k=0}^{p-1}(10^{p-1})^k$ נקבל $b = a\cdot M$

מ- [1] נובע מיד כי:

$$\frac{n\cdot 10^{p-1}+1}{p} = \frac{p(na)+(n+1)}{p} = na+\frac{n+1}{p} = \begin{cases} na,(n+1 \text{ שארית}) & n < p-1 \text{ כאשר} \\ na+1,(\text{ללא שארית}) & n = p-1 \text{ כאשר} \end{cases}$$

נשתמש בתוצאה האחרונה ונחשב את M ב- (p-1) שלבים כאשר נחלק ב-p זו אחר זו, את התבניות

$(10^{p-1}+1),(2\cdot 10^{p-1}+1)\ldots\ [(p-1)\cdot 10^{p-1}+1]$

שארית	מנה	מחולק	שלב
2	a	$1\cdot 10^{p-1}+1$	1
3	$2a$	$2\cdot 10^{p-1}+1$	2
...	....	...	...
$p-1$	$(p-2)a$	$(p-2)\cdot 10^{p-1}+1$	$p-2$
0	$(p-1)a+1$	$(p-1)\cdot 10^{p-1}+1$	$p-1$

לכן המנה היא $[a\|2a\|3a\|\ldots\|(p-2)a\|(p-1)a+1]$ מכאן נובע כי

$$b = a[a\|2a\|3a\|\ldots\|(p-2)a\|(p-1)a+1]$$

דוגמאות:

1) $p=3$ אז $a=33$ ו- $b=33\cdot 3367$, מספר בן שש ספרות.

2) $p=7$ אז $a=142857$ ו- $b=a[a\|2a\|3a\|4a\|5a\|(6a+1)]$ מספר בן 42 ספרות.

3) $p=11$ אז $a=09$ ו- $b=09(09182736455463728191)$ מספר בן 20 ספרות.

נכון כי לא קשה לקבל את b גם בעזרת מחשב, אבל ברור כי התוצאה שלנו מביאה הקלה גדולה בעניין זה, בנוסף לצורה האסתטית של b.

<u>תרגיל</u>: הוכח כי עבור כל n!, $n \in N$ וכל מספר ראשוני p (פרט ל-2 ו-5)

המספר $\frac{10^{\varphi(p^{\alpha})}-1}{p^{\alpha}}$ מתחלק ללא שאריות ב- $\frac{10^{\varphi(p)}-1}{p}$

1) Leonhard Euler (1707-1783) חי בשוויצריה, ברוסיה ובגרמניה. עזבונו מכיל מעל 1200 מאמרים בתחומים שונים של המתמטיקה, המכניקה והאסטרונומיה.

2) Pierre Fermat (1601-1665) מתמטיקאי צרפתי חובב, (מקצועו היה משפטן). תרומתו בתורת המספרים, גאומטריה אנאליטית והסתברות גדולה וחשובה.

בעיה חדשה.

הבעיה היחידה דלהלן מוקדשת לעיר רחובות במלאות לה מאה שנה.

ר

ר ח ר

ר ח ו ח ר

ר ח ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ב ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ב ת ב ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ב ת מ ת ב ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ב ת מ א מ ת ב ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ב ת מ א ה א מ ת ב ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ב ת מ א מ ת ב ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ב ת מ ת ב ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ב ת ב ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ב ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ת ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ב ו ח ר

ר ח ו ב ו ח ר

ר ח ו ח ר

ר ח ר

ר

בציור זה, אם מחברים כל שתי אותיות שכנות בקטע אנכי או אופקי, ניתן לקרוא n פעמים את הביטוי "רחובות בת מאה". מהו n המרבי? (ד. רימר, רחובות).