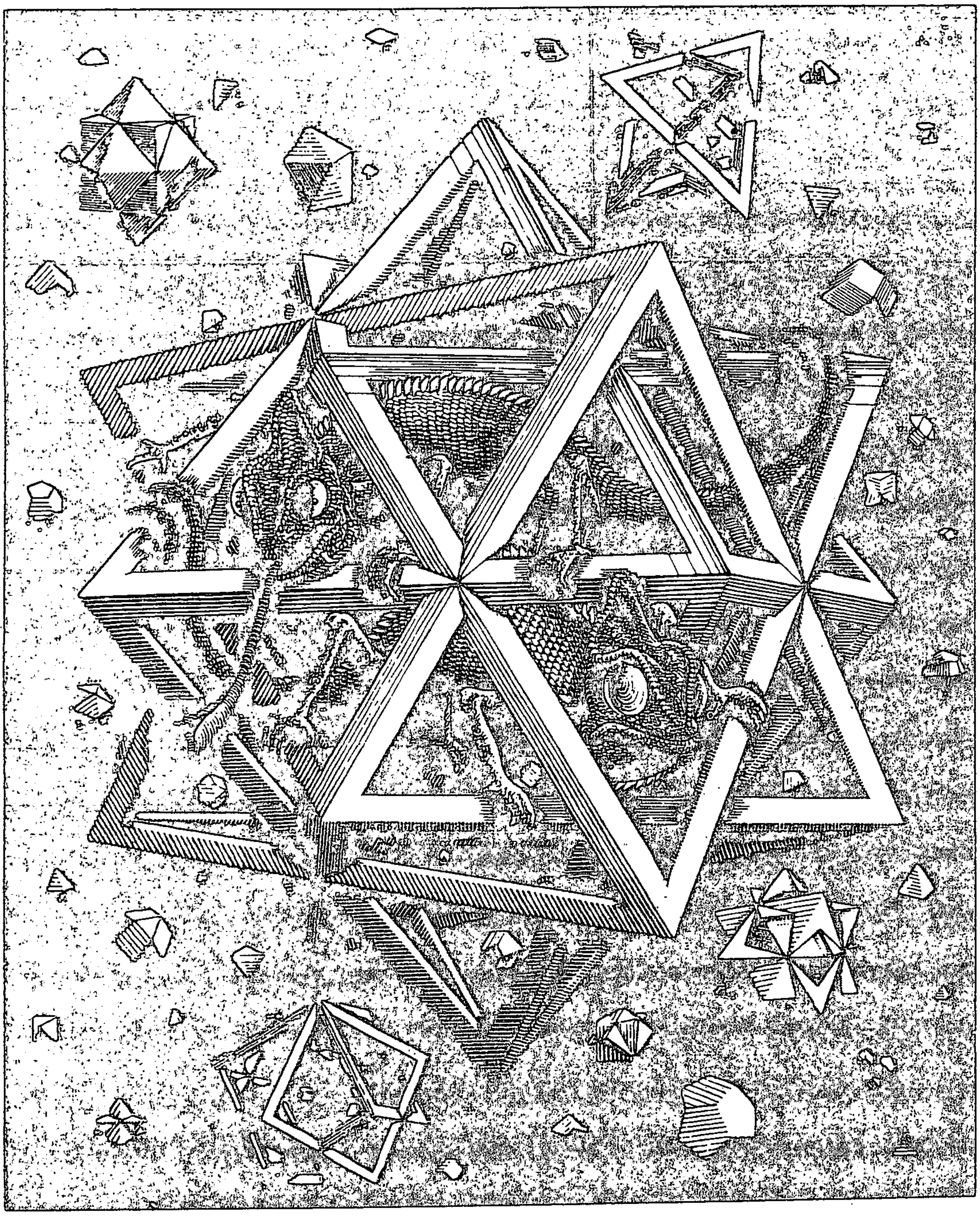
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס' 23/24 אלול תשנ"ב - ספטמבר 1992



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון ויצמן
רחובות

תוכן העניינים

אתגר - גליונות מתמטיקה ISBN = 0334-201

מוצא לאור ע"י הפקולטות למתמטיקה במכון וייצמן ובטכניון.

המערכת:

פרופ' א. ברמן, ד"ר צ. הראל, א. לוי, הפקולטה למתמטיקה בטכניון.

פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שימושית, מכון וייצמן.

מען המערכת: הפקולטה למתמטיקה, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

חיפה 32000, טל. 294279 - 04

דבר המערכת

עם פתיחת שנת הלימודים אנו מביאים בפניכם חוברת כפולה. בשנת תשנ"ג תהיה מערכת העיתון במכון ויצמן.

בחוברת זו אנו מחדשים את המדור "חדשות מעולם המתמטיקה" ובעקבותיו הבאנו מאמר המנסה לרמוז על נושאי עבודותיהם של שני הזוכים בפרס היוקרתי המוענק בישראל כל שנה - פרס וולף, שני מתמטיקאים מהשורה הראשונה בעולם. מאמרו של פרופ' ש. אביטל מספר על גורלן של חלק מהבעיות שהציג בתחילת המאה ה-20 גדול המתמטיקאים באותה תקופה. בחוברת שלשה מאמרים הקשורים לגיאומטריה: מאמרו של א.ב. סיגלר על מה שאפשר לקבל מ"משחק" בביטויים אלגבריים במשולש, מאמרו של י. נהיר על הכללת משפט הקוסינוסים למרחב ומאמר שמתאר שיטה יפה לפתרון בעיה במרחב שהציג לפני מספר שנים ד"ר א. אלטמן מהטכניון שכיום איננו עוד בין החיים. מאמרו של י. סימון בודק את הפתרונות שאפשר למצוא לבעיה במספרים תלת-ספרתיים. מאמרו של א. לוי "כיצד לנצח בשחמט" לא יעזור לכם להיות אלופי שחמט, אבל מציג משפט מפתיע מתורת המשחקים.

אנו מביאים בעיות חדשות בתחרות הבעיות (עמ' 38) וכן פתרונות לתחרות הבעיות מחוברת 21 ולבעיות האולימפידות למתמטיקה של מכון ויצמן ושל הטכניון ששאלוניהן הובאו בחוברת 22. לצערנו קבלנו רק מספר קטן מאוד של פתרונות מהקוראים. היינו שמחים לקבל יותר פתרונות ותגובות מכם.

אנו מאחלים לקוראים שנה טובה, הנאה מהגליון ושנת לימודים מעניינת ומוצלחת.

חדשות מעולם המתמטיקה - המספר הראשוני הגדול ביותר הידוע (עד עכשיו)

מספר ראשוני חדש, הגדול ביותר הידוע עד כה, התגלה בתחילת 1992. כמו כל חבריו - המספרים הראשוניים הענקיים שמתגלים מדי כמה שנים, מספר זה הוא מספר מרסן (Mersenne) כלומר מהצורה $M_p = 2^p-1$ כאשר p עצמו ראשוני. המספר שהתגלה הפעם הוא $2^{756839}-1$ והוא בעל 227,832 ספרות עשרוניות. הראשוני הגדול ביותר שהיה ידוע קודם היה $2^{216091}-1$ שהתגלה ב 1985.

קל להווכח שאם p פריק יהיה $M_p = 2^p-1$ פריק (נסו להוכיח זאת), אבל גם עבור רוב ה p -ים הראשוניים שנבדקים M_p פריק.[*] הסיבה שדווקא מספרי מרסן הם הראשוניים הגדולים ביותר הידועים, היא בכך שיש דרך לבחון אם מספר מהצורה $M_p = 2^p-1$ הוא ראשוני שהיא מהירה בהרבה מהדרכים הקיימות לגבי מספר רגיל מאותו סדר גודל. דרך זו (מבחן Lucas-Lehmer) היא כדלקמן: בנה את הסדרה U_n עבור $n = 0, 1, \ldots, p-2$ ע"י הכלל: $U_0 = 4$, $U_n = U_{n-1}^2-2$. M_p ראשוני אם ורק אם האיבר האחרון U_{p-2} מתחלק ב M_p . כמובן שאפשר לחשב את ה U_n -ים מודולו M_p וכך אין צורך לעבוד עם מספרים הגדולים מ M_p . הקורא מוזמן לנסות עבור p -ים קטנים (למרות שהמבחן פשוט, ההוכחה שהוא אכן עובד אינה כה פשוטה).

שיטה זו ידועה כבר 100 שנים, ובה משתמשים גם כיום. שבירת השיאים מדי כמה שנים היא תוצאה, מצד אחד של הגדלת כח המיחשוב ומצד שני של שיטות תיכנות המייעלות את החישובים. השיא החדש נמצא ע"י David Slowinski (שלזכותו רשומים גם שיאים קודמים) ו- Paul Gage. שעבדו עם על-מחשב Cray-2 במעבדת המחשבים Harwell באנגליה, וזהו מספר מרסן הראשוני ה-32 הידוע. עם זאת לא נבדקו כל ה p -ים לפי הסדר, אלא נוסו מספר מעריכים p בעלי סיכויים טובים עד שקלעו בול, כך שאין כל ביטחון שזה באמת מספר מרסן הראשוני ה-32 לפי סדר עולה. עבור p עד 139,000 בדקו את כולם, ויש 30 מספרי מרסן ראשוניים בתחום זה, שמתאימים לערכי p הבאים:

2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279
2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701,
23209, 44497, 86243, 110503, 132049

---

[*] למספרי מרסן הראשוניים יש קשר למושג המספרים המשוכללים (בו דן כבר אוקלידס בספרו "היסודות") - ראה אתגר-גליונות מתמטיקה מס' 2.

בנוסף לכך ידועים עוד שני מספרי מרסן הראשוניים שהוזכרו לעיל, המתאימים ל $p = 216091$ ו $p = 756839$ אבל, כאמור, לא ידוע אם אין עוד ביניהם. ואכן, מספר מרסן בעל $p = 110503$ נתגלה רק ב-1988, כמה שנים אחרי שכבר גילו את אלה עם $p = 132049$ ו $p = 216091$.

מעבדות מיחשוב מעוניינות בחיפושים כאלה (שנמשכים שעות רבות ועושים אותם בשעות שהעומס על המחשב קטן) גם כי הם מהווים מבחן טוב אם החומרה (hardware) ומערכת ההפעלה של מערכת מחשב חדשה הם ללא שגיאות. (ואפשר לשאול: אם אין אנו בטוחים שאין שגיאות במחשב - כיצד אפשר לסמוך על התוצאות לגבי מספרי מרסן ? ואכן כדי להיות בטוחים בוודאות גבוהה מאשרים את התוצאות במחשב אחר או מבצעים חישובי בדיקה. לפעמים מתגלות כך גם שגיאות במערכת המחשב !)

ולבסוף - כל זה אינו מקרב אותנו לפתרון השאלה אם קיימים אינסוף מספרי מרסן ראשוניים או רק מספר סופי. מצד שני לא ידוע אם יש מספר סופי או אינסופי של מספרי מרסן פריקים. דברים אלה מצריכים הוכחות תיאורטיות, שאין בידינו כיום.

<u>על הזוכים בפרס וולף למתמטיקה 1992</u>

כידוע, מדי שנה מחולק בישראל פרס קרן וולף למדענים ואמנים מצטיינים בעולם בשטחים שונים, גם במתימטיקה. השנה חולק הפרס למתימטיקה שווה בשווה בין פרופ' לנארט קארלסון (Lennart Carleson) מאוניברסיטת אופסלה, שוודיה ואוניברסיטת קליפורניה בלוס אנג'לס, ארה"ב ובין פרופ' ג'ון תומפסון (John G. Thompson) מאוניברסיטת קימבריג', בריטניה, שניהם מהשורה הראשונה של המתמטיקאים בעולם.

<u>לנארט קארלסון</u> נולד בשוודיה ב-1928. בגיל 22 כבר קיבל תואר דוקטור ובגיל 23 יצרה בשבילו הממשלה השוודית קתדרה מיוחדת של פרופסור מחקר באוניברסיטת אופסלה. בשנים 1979-1982 היה נשיא האיגוד העולמי למתמטיקה. שטח עבודתו של פרופ' קארלסון הוא האנליזה, שהיא הדיון בפונקציות, בקשר עם מושגים כמו גבולות, סכומים אינסופיים, נגזרות ואינטגרלים. הוא עבד בשטחים בהם יש קשר הדוק בין פונקציות ממשיות (כלומר מוגדרות על משתנים המקבלים ערכים במספרים ממשיים וגם ערכי הפונקציה ממשיים) לבין פונקציות קומפלכסיות (בהן באים המספרים

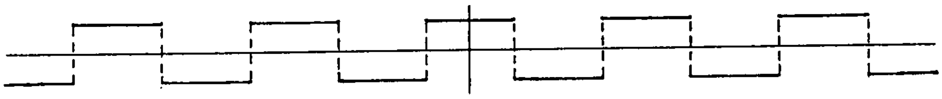
הקומפלכסיים (המרוכבים) במקום הממשיים). קארלסון נודע כבעל יכולת להתמודד בשיטות מקוריות עם בעיות באנליזה שאחרים ניסו לפתרן ולא הצליחו.

אחת הבעיות המפורסמות שפתר קארלסון קשורה לטורי פוריה: המושג הפיסיקלי הבסיסי של פירוק קול לצליליה בגבהים שונים, של אור לצבעי הספקטרום ושל גלי רדיו לתדרים שונים נובע מעובדה מתמטית, שאומרת בערך שפונקציה המוגדרת על מספרים ממשיים (למשל פונקציה של הזמן t) מתפרקת באופן יחיד לצירוף של תנודות טהורות, כלומר סינוסואידות מהצורה $C\sin(\omega t+\alpha)$ כאשר ω נקראת התדירות. במקרה של פונקציה מחזורית $f(t)$, ונבחר את יחידת המידה של t כך שהמחזור יהיה 2π, כלומר יתקיים $f(t+2\pi) = f(t)$ לכל t , יופיעו רק הסינוסואידות שהן עצמן בעלות מחזור זה, כלומר בעלות ω שלם, (ונסמן n במקום ω). אז הפירוק שלנו צריך לייצג את f בעזרת ביטוי מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} C_n\sin(nt+\alpha_n)$ או, מה שאקוויולנטי לכך,

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_n\cos(nt)+B_n\sin(nt)$$

ביטוי זה הוא טור אינסופי.

כבר במאה ה-18 הועלו מצד אחד נימוקים פיסיקליים לאפשרות של פירוק יחיד כזה, ומצד שני לא האמינו שאם f לא רציפה, למשל, אזי אפשר לפרק אותה לטור סינוסואידות. בתחילת המאה ה-19 הציע פוריה (Fourier) רעיון כיצד לבנות מכל פונקציה נתונה מערכת מקדמים A_n ו B_n שיתנו מועמד לפירוק יחיד כזה, ונתן דוגמאות מפתיעות שגם עבור פונקציות עם קפיצות, למשל פונקציית מדרגות כמו:



המועמד שלו "עובד". עבור פונקציה מחזורית, הטור (*) בו A_n ו B_n נבחרו לפי הכלל שהציע פוריה, נקרא "טור פוריה" של הפונקציה. אפשר להוכיח שבמובנים חשובים הוא נותן את ה"פירוק" המבוקש היחיד עבור פונקציות מחזוריות כלליות מאוד (אפילו לגמרי לא רציפות), אבל לגבי השאלה אם הפירוק לטור פוריה הוא גם במובן שסכום הטור שווה לפונקציה בכל t, המצב לא פשוט. (סכום טור אינסופי מוגדר כגבול, אם הוא קיים, של הסכומים החלקיים. יש לזכור שייתכן שלטור אינסופי לא יהיה סכום בכלל ושאם הטור תלוי ב t אזי קיום הסכום וערכו תלויים גם הם ב t).

כבר במאה ה-19 הוכיח דיריכלה (Dirichlet) שסכום טור פוריה של פונקציה מחזורית שווה אכן לפונקציה בכל t אם היא די "טובה" (למשל אם אפשר לחלק את המחזור למספר סופי של קטעים שבכל אחד מהם הפונקציה עולה או יורדת, ובנוסף לכך בכל נקודת אי-רציפות ערך הפונקציה הוא הממוצע בין הערכים להם היא שואפת כאשר שואפים לנקודה מימין ומשמאל - יש פונקציות, אפילו רציפות, שאינן כאלה !). בנוסף לכך מתקיים שאם t ערך בו יש לטור פוריה סכום ובנוסף לכך הפונקציה רציפה ב t אזי הסכום שווה ל $f(t)$. לכן עבור פונקציות רציפות הבעיה היא אם יש לטור בכלל סכום.

ניתנו דוגמאות לפונקציות רציפות שאין לטור פוריה שלהן סכום ב t -ים מסויימים (אפילו באינסוף t -ים עבור אותה פונקציה - כמובן שאלו פונקציות שלא מקיימות את תנאי דיריכלה), אבל באשר לשאלה עד כמה יכולה קבוצת t -ים "סוררים" כאלה להיות גדולה כאשר f רציפה היתה הבעיה קשה לפיצוח זמן רב. רק ב-1965 הוכיח קארלסון שאם f מחזורית ורציפה (ואפילו אם f מקיימת תנאים חלשים בהרבה מרציפות) יהיה סכום טור פוריה שלה שווה לערך הפונקציה עבור כל t פרט אולי ל t -ים בקבוצת יוצאים מהכלל (קבוצה שתלויה בפונקציה f שלקחנו) וקבוצה זו בעלת אורך 0 (קבוצה בעלת אורך 0 לא יכולה, כמובן, להכיל אף קטע, אפילו קטן ביותר, אבל יכולה להיות בעלת אינסוף איברים).

למעשה היה ידוע (כבר קודם) שאילו משפט זה, שהוכיח לבסוף קארלסון, לא היה נכון, היה נובע מכך שאפשר למצוא דוגמא של פונקציה מחזורית רציפה "משוגעת" שבאף נקודה t אין לטור פוריה שלה סכום !

בשנים האחרונות עוסק קארלסון, עם תלמידו בנדיקס (M. Benedicks) בנושא המערכות הדינמיות, נושא שזכה בשנים האחרונות לפופולריות רבה ושכולל את מושג הכאוס (Chaos). מערכת דינמית היא קבוצה S עם פונקציה f המוגדרת בכל איבר x של S כך שלכל x כזה גם $f(x)$ שייך ל S. השם "מערכת דינמית" בא מכך שבפיסיקה מופיעות מערכות כאלה בהן S היא קבוצת המצבים האפשריים של מערכת פיסיקלית ו f מתארת את השתנות המערכת ביחידת זמן: אם כעת המערכת במצב x, אזי אחרי יחידת זמן היא תהיה ב $x_1 = f(x)$, אחרי עוד יחידת זמן ב $x_2 = f(f(x))$, כעבור עוד יחידת זמן ב $x_3 = f(f(f(x)))$, וכן הלאה. בהתאם לכך, בכל מערכת דינמית מוגדר המסלול של x כסדרה האינסופית x_n בה $x_0 = x$, $x_{n+1} = f(x_n)$. התנהגות מסלול זה יכולה להיות מסובכת ומפתיעה גם עבור פונקציה פשוטה כמו $f(x) = x^2+c$ (c קבוע). ברור שקל לתכנת מחשב כך שיחשב מסלול כזה, ומאז שבשנות ה-70 החלו בחישובים כאלה, והמחשבים הראו את התוצאות גם בצורה גרפית, נתגלו תופעות מופלאות

והקוראים נתקלו בוודאי בתמונות בעלות היופי האסתטי המיוחד שיוצרים המחשבים, ושהודפסו גם בספרים ובפוסטרים (ראו גם גב חוברת זו). אבל תמונות אלו, שדיוקן הוא, כמובן, רק כמידת הדיוק של החישוב והגרפיקה של המחשב, אינן באות במקום הוכחה מדוייקת של משפט מתמטי על מערכות כאלה, ולכך תרמו ופרצו דרכים קארלסון ובנדיקס.

<u>ג'ון תומפסון</u> הוא אחד החוקרים המבריקים והמקוריים ביותר בתורת החבורות. מחקריו של פרופ' תומפסון הצעידו את תורת החבורות קדימה ואיפשרו תוצאות שנחשבו לבלתי ניתנות להשגה עד לפני כ-30 שנה. הוא נולד ב-1932 במדינת קנזס שבארצות הברית. בשנת 1951 החל בלימודי דת באוניברסיטת ייל, אבל לאחר זמן קצר החליף את נושא לימודיו למתמטיקה, ובשנת 1959 קיבל את תואר הדוקטור מאוניברסיטת שיקגו. מאז 1968 הוא נמצא באוניברסיטת קימבריג' באנגליה.

חבורה הינה קבוצה של איברים, G , עם פעולה בין אברי G הנותנת מכל שני איברים a ו b ב G איבר של G, והמקיימת את הדרישות: שיתקיים החוק האסוציאטיבי (חוק הקיבוץ); שיהיה ב G איבר ניטרלי (כלומר כזה שהפעלת הפעולה על איבר כלשהו a ועליו נותנת תמיד את a, למשל 0 לגבי חיבור או 1 לגבי כפל) ושעבור כל איבר a יהיה קיים ב G איבר a' כך שהפעלת הפעולה על a ו a' תיתן את האיבר הניטרלי (במקרה של חיבור $a'=-a$. במקרה של כפל $a'=1/a$).

לסוג זה של מיבנה יש חשיבות עצומה במתמטיקה ובשימושיה בפיסיקה ובכימיה. כדוגמא לחבורה אפשר להביא את המספרים השלמים עם פעולת החיבור. זו חבורה אינסופית (כלומר קבוצת איבריה אינסופית). דוגמא אחרת מהווים המספרים הממשיים החיוביים עם פעולת הכפל. (אבל כל המספרים הממשיים לגבי הכפל, או כל המספרים הטבעיים לגבי הכפל או לגבי החיבור אינן חבורות - למה ?). אם ניקח את קבוצת השאריות (השלמות) מודולו n עם פעולת החיבור מודולו n נקבל חבורה סופית (כלומר כך שיש בקבוצה מספר סופי של איברים). בכל הדוגמאות האלה הפעולה של החבורה מקיימת את החוק הקומוטטיבי (חוק החילוף), כלומר תוצאת הפעולה על שני איברים אינה תלויה בסדר בו לוקחים אותם. חבורה כזו נקראת קומוטטיבית. אבל חבורה יכולה לא להיות כזו, וכדוגמא אפשר להביא חבורות של תנועות במישור או במרחב לגבי פעולת הרכבת תנועות (ביצוע תנועה אחת ואחר כך השניה), למשל חבורת 8 הסיבובים והשיקופים המעתיקים לעצמו ריבוע נתון במישור (אחד מאיברי החבורה הוא תנועת הזהות שאינה עושה כלום). הקורא מוזמן למצא מהם 8 סיבובים ושיקופים אלה ולבדוק שזו חבורה לא קומוטטיבית.

מחקריו של תומפסון התרכזו בעיקר בחבורות הסופיות, שחקירתן ומיונן מהוות נושא שמציג בעיות קשות. חבורות סופיות מסויימות נקראות חבורות פשוטות והן מהוות את "אבני הבניין" של כל החבורות הסופיות. יש להן תפקיד דומה במקצת לתפקיד המספרים הראשוניים באריתמטיקה. ואכן, החבורות הסופיות הפשוטות הקומוטטיביות אינן אלא חבורות השאריות מודולו p (עם פעולת החיבור) עבור p ראשוני. עבודותיו של פרופ' תומפסון איפשרו ופיתחו את הדרך למציאתן של כל החבורות הסופיות הפשוטות הלא-קומוטטיביות, השג מרשים שהושג בערך ב-1980.

כבר בעבודת הדוקטור שלו גילה תומפסון שהוא מתמטיקאי מבריק ומקורי, כאשר הוכיח השערה בתורת החבורות הסופיות שלא הצליחו לפתור במשך 50 שנה. יותר מאוחר הכניס פרופ' תומפסון שיטות מהפכניות שאיפשרו לו ולוולטר פייט (Walter Feit) להוכיח ב-1963 שכל חבורה פשוטה סופית לא קומוטטיבית היא בעלת מספר זוגי של אברים. הוכחת משפט זה משתרעת על 250 עמודים. כתוצאה ממשפט זה כל "אבני הבניין" הפשוטות של חבורה סופית כלשהי בעלת מספר איזוגי של איברים הן קומוטטיביות (ולכן הן חבורות שאריות מודולו ראשוניים). עבודות אלה שינו את פני תורת החבורות הסופיות מהקצה עד הקצה והפיחו בה רוח חדשה.

קו אופי מיוחד של מערכת החבורות הסופיות הפשוטות, שכאמור נמצאה במלואה בערך ב-1980, הוא שבנוסף לסדרות אינסופיות של חבורות הבנויות לפי כללים טבעיים (בדומה לסידרת החבורות הפשוטות הקומוטטיביות שהזכרנו) יש עוד 26 חבורות פשוטות "ספוראדיות". בגדולה שבהן יש 808,017,424,794,512,875,886,459,904,961,710,757,005,754,368,000,000,000 איברים ולא לחינם קוראים לה "המפלצת". עוד לפני שבנו חלק מחבורות ספוראדיות אלה, ביניהן המפלצת, בנו "קלסתרון מתמטי" שלהן, כלומר מערכת תכונות שחשדו שיש חבורה שמקיימת אותן, ורק אחר כך הוכיחו שקיימת חבורה יחידה המתאימה ל"קלסתרון". באשר למפלצת, עוד לפני שהוכח קיומה שמו לב במקרה לכך שהמספר $196883 = 47 \cdot 59 \cdot 71$ המופיע ב"קלסתרון" שלה, מופיע גם בשטח אחר לגמרי במתמטיקה, והדבר הביא את פרופ' תומפסון לנסח השערות על קשרים בין התחומים, שהוכחו אחר כך והביאו לפתיחת חלון לעובדות וקשרים מתמטיים חדשים, שקשורים גם לפיסיקה.

על השגיו זכה פרופ' תומפסון בפרס Fields, שהוא הפרס המכובד והחשוב ביותר במתמטיקה (כידוע אין פרס נובל למתמטיקה), בפרס Cole היוקרתי באלגברה ובשנה זו בפרס וולף.

זכור ימות עולם
בינו שנות דור ודור

דברים ל"ב

יגישו ויגידו לנו את אשר תקרינה
הראשונות מה הנה
הגידו, ונשימה ליבנו, ונדעה אחריתן

ישעיהו מ"א

בעיות מתמטיות שהוצגו

בקונגרס הבינלאומי של המתימטיקאים, פריס 1900
בהרצאה שניתנה ע"י המתימטיקאי דוד הילברט

מאת פרופ' שמואל אביטל, הטכניון

מבוא

תרבות היא מערכת התנהגותית, שביסודה אידיאות מסורתיות והערכיות שלהן. אידיאות נוצרות ונבחרות בהתפתחות היסטורית. תכונה יסודית של תרבות היא אופיה ההתפתחותי. בלי היסוד ההתפתחותי נשארת המסורה, שבדרך כלל מובילה להתאבנות. לפי דעת כותב רשימה זו, מתימטיקה היא חלק מתרבות האדם ויש ללמדה מתוך השקפה זו. חלק חשוב בגישה זו הוא חשיפת הלומד למאורעות מרכזיים בתולדות התפתחות מדע המקצוע. רשימה זו באה לתרום לחשיפה מסוג זה.

בהתפתחות המתימטיקה במשך הדורות היו עליות וירידות. קוראי אתגר מכירים ודאי את הפריחה ביצירה מתימטית בתקופה היוונית הקדומה, בתקופה שבין 600 לפני הספירה, עד בערך 600 לספירה. בעקבות פריחה זו באו ימי הביניים, שחלק מהם מכונים בהיסטוריה "שנות החושך". היתה זאת תקופה של יצירה דלה שנמשכה בערך עד למאה ה-13. עם התחדשות היצירה באה תקופה של פריחה שהגיעה לשיאה במאה ה-17, המאה של המתימטיקאים הדגולים Fermat, Pascal, Descartes, Newton ו-Leibnitz. במאה ה-18 שלאחריה, גם בה היתה יצירה, אבל בעיקרה היתה זאת מאה של הרחבה והעמקת היצירה של המאה ה-17. עם זאת יש לציין, שבמאה זו פעל Euler (1707-1783), אחד מגדולי המתימטיקאים של כל הדורות. המאה ה-19 היתה שוב מאה של פריחת יצירה בכל התחומים של המתימטיקה. זו המאה של המתימטיקאים שוודאי נתקלתם בשמותיהם: Gauss, Hamilton, Cauchy, Riemann, Weierstrass, Cayley, Lie, Cantor, Klein, Galois, Abel, Bolyai, ועוד, ועוד.

אנו מקווים שתסכימו, שלבעיות מתימטיות יש חלק רציני ביותר בהתפתחות המקצוע. ישנן חמש בעיות מפורסמות, הידועות כבעיות העולם העתיק. ראשית הדיון בהן היתה במתימטיקה היוונית, בערך 400 לפני הספירה, וכמעט בכל מאה שלאחריהן נמצאו מתימטיקאים שדנו בנסיון לפותרן. חמש בעיות אלה מצאו את פתרונן רק במאה ה-19. ארבע מבעיות אלה דנות בבנייה גיאומטרית בסרגל ומחוגה, כשהסרגל משמש רק להעברת ישרים. אלה הן הבעיות של: 1) חלוקת כל זווית לשלושה חלקים שווים, 2) בניית מקצוע של קוביה שנפחה גדול פי שניים מנפח קוביה נתונה, 3) בניית צלע של ריבוע ששיטחו שווה לשטח מעגל נתון, 4) בניית מצולעים משוכללים בני 7 ו-9 צלעות. כפי שאמרנו, הדיון בהן היה באפשרות לבצע בניות אלה תוך שימוש במחוגה ובסרגל.

הבעיה החמישית היא ביסודות הגיאומטריה. ידוע לכם ודאי שהמתימטיקאי היווני אוקלידס ניסח 5 אכסיומות לביסוס הגיאומטריה. האכסיומה החמישית היתה טענה השקולה למשפט האומר: אם נתון במישור ישר ונקודה מחוצה לו אפשר להעביר במישור זה, דרך הנקודה הנתונה, ישר יחיד המקביל לישר הנתון. במשך כל הדורות, נמצאו מתימטיקאים שניסו להוכיח טענה זו על סמך האכסיומות האחרות, ללא הצלחה. בעיה זו ידועה גם בשם "בעיית האכסיומה החמישית".

כל חמש הבעיות שפרטנו מצאו את פתרונן במאה ה-19. מעניין לציין שהתשובה לשלוש בעיות הבנייה הראשונות היתה זה בלתי אפשרי. מסביב לאחדות מבעיות אלה התפתחו נושאים רחבים במתימטיקה. דבר זה נכון בקשר להרבה בעיות אחרות. לצערנו הדגש העיקרי בבית הספר הוא על פתרון בעיות. ההיסטוריה מלמדת אותנו, שהעלאת שאלות ובעיות היא לא פחות חשובה. המתימטיקאי Polya טוען, שאחרי פתרון בעיה הפותר צריך לשאול את עצמו: מה עוד אפשר לשאול ? נביא כאן לדוגמה בעיה, שאינה בין 23 הבעיות, אבל הילברט הזכיר אותה במבוא להרצאתו. זו בעיה שראשיתה במאה ה-17 ואשר עד היום לא נמצא פתרונה המלא. המתימטיקאי הצרפתי Fermat (1601-1665) נהג לרשום את הערותיו בשולי ספר שקרא. בקוראו בספר Arithmetica של המתימטיקאי היווני Diophantos (המאה השלישית לספירה), בפרק הדן בפתרונות שלמים של משוואת פיתגורס $x^2+y^2 = z^2$, שיש לה אינסוף פתרונות בשלמים, (לדוגמה 3,4,5 או 5,12,13 או 8,15,17 וכו') רשם Fermat בשוליים "לא ייתכן פתרון בשלמים בחזקה 3, או 4, או כל מעריך שלם אחר גדול מ-2. יש לי הוכחה יפה של טענה זו, אבל אין מספיק מקום בשוליים כדי לרשמה". מתימטיקאים דגולים ניסו את כוחם בהוכחת הטענה,

אבל עד היום הזה אין הוכחה מלאה של משפט זה. עם זאת, בעקבות הנסיונות להוכיח את המשפט, נוצרו תורות מתימטיות שלמות, שהן חשובות בהרבה מהבעיה עצמה.

בשנת 1900, השנה הראשונה של המאה ה-20, התקים בפריס קונגרס של מתימטיקאים. (קונגרס כזה מתקיים גם עתה כל 4 שנים). בקונגרס זה העלה המתימטיקאי הדגול של אותה תקופה, David Hilbert, 23 בעיות, שנשאלו במאה ה-19, ולא מצאו את פתרונן, ואשר לדעתו רצוי שמתימטיקאים של המאה ה-20 ישקיעו את מאמציהם לפתור אותן.

גדולתה של המתימטיקה היא בכך, שאפשר לנסח חלק מהבעיות בצורה, שגם תלמידי כיתה י' יבינו אותן, וזאת גם אם פתרונן דורש העמקה רבה בתחומים שונים של המתימטיקה. הואיל ואנו חיים בעשרת האחרונה של המאה ה-20, נראה לנו כרצוי להביא חלק מבעיות אלה לפני קוראי אתגר, תוך ביטחון שרבים מהקוראים ישקיעו במאה ה-21 מאמצים בפתרון אותו חלק מבעיות אלה, שגם עתה עוד לא מצאו את פתרונן, וכן כדי לפתור בעיות, שהועלו במאה ה-20, ואשר יהיו עדיין פתוחות.

נעבור עתה ל-7 בעיות מבין 23 הבעיות שהעלה הילברט, בעיות שגם תלמידי בית ספר יכולים להבינן. מיספור הבעיות הוא לפי הסדר שקבע הילברט.

בעיה מס' 1: בעית הרצף

חלק מהקוראים נתקלו וודאי בתורה שפיתח המתימטיקאי Cantor (1845-1918) הנקראת "תורת הקבוצות". Cantor דן במידות שונות, שאפשר לייחס לעוצמה של קבוצות אינסופיות. אם נתונות שתי קבוצות אינסופיות A ו-B, ואנו יכולים ליצור התאמה חד-חד-ערכית בין האיברים של קבוצות אלה, כלומר - שאפשר להתאים ל כ ל איבר של קבוצה אחת איבר מהקבוצה האחרת ולהיפך, נגיד שלשתי הקבוצות יש אותו מספר קרדינלי, מספר המתייחס למספר האיברים שבכל אחת מהקבוצות. אם אפשר ליצור התאמה כזאת בין הקבוצה A לבין קבוצה חלקית של B, אבל בכל שננסה ליצור התאמה כזאת בין איברי B לבין איברי A יתברר שנותרו איברים ב-B שלא הצלחנו למצוא להם תואם ב-A, נגיד שהמספר הקרדינלי של B גדול מזה של A. כל הקבוצות שניתן ליצור התאמה חד-חד-ערכית בין איבריהן לבין איברי קבוצת המספרים הטבעיים ...,1,2,3 נקראות קבוצות הניתנות להימנות, או

בנות מנייה. Cantor ייחס למספר הקרדינלי שלהם את הסמל $\aleph_0$ (קרי א אפס). Cantor הוכיח שקבוצת המספרים הרציונליים היא בת מנייה, אבל קבוצת המספרים הממשיים, הנקראת גם קבוצת הרצף, איננה ניתנת להימנות. הוא ייחס למספר הקרדינלי שלה את הסמל א[*], כשמספר קרדינלי זה גדול מהמספר $\aleph_0$. Cantor בעצמו העלה את השאלה האם א הוא $\aleph_1$ (קרי אלף אחד)? כלומר - האם נכון הדבר שלא תיתכן קבוצה אינסופית שהמספר הקרדינלי שלה גדול מ-$\aleph_0$ אבל קטן מ- א ? Cantor ניסח השערה שאמנם טענה זו נכונה, אבל לא הצליח להוכיחה. השערה זו מכונה גם בשם "השערת הרצף". הילברט העלה שאלה זו כבעיה ראשונה בסידרת 23 הבעיות.

כדי להבין את התשובה לבעיה זו עלינו להכיר שלב נוסף בהתפתחות התורה. בראשית תורת הקבוצות נוצרו בעיות, שהובילו לידי סתירה. המתימטיקאי Zermelo (1871-1953) תרם תרומה יסודית להתפתחות התורה בזה, שפיתח מערכת אכסיומות שבמסגרתה אפשר היה להתגבר על בעיות אלה. מערכת זו שופרה על ידי המתימטיקאי אברהם פרנקל (1891-1965), שהיה הפרופסור הראשון למתימטיקה באוניברסיטה העברית בירושלים. המערכת מכונה עד היום בשם מערכת האכסיומות Zermelo-Fraenkel . בעית הרצף היתה לכן: האם במסגרת מערכת אכסיומטית זו אפשר להוכיח את השערת הרצף של קנטור, או להפריכה. ההתפתחות ההיסטורית של התשובה לבעיה זו מעניינת ביותר. בשנת 1931 הוכיח המתימטיקאי האוסטרי Goedel (1906-1978), כי במערכת אכסיומות זו אי אפשר להפריך את השערת הרצף. נשארה השאלה האם אפשר להוכיחה ? במשך למעלה מ-30 שנה התמודדו המתימטיקאים עם בעיה זו, עד שבשנת 1962 הוכיח המתימטיקאי Cohen (-1934), שבמערכת האכסיומטית הנ"ל גם אי-אפשר להוכיח את השערת הרצף.

המשמעות של תוצאה זו היא, שאפשר לבנות מערכת אכסיומות שתכלול את השערת הרצף כאכסיומה, או שתשלול את ההשערה. אם האחת תהיה חסרת סתירה, גם האחרת תהיה כזאת. חשוב לציין שפתרון זה דומה בכל לפתרון בעית האכסיומה החמישית שהזכרנו. גם שם הוכיחו, שאפשר לבנות גיאומטריה, שבה מניחים קיום של מקביל יחיד, או גיאומטריה, שבה יש יותר ממקביל אחד. אם האחת תהיה חסרת סתירה גם האחרת תהיה כזאת.

---

[*] כיום מקובל לסמנו ב- C .

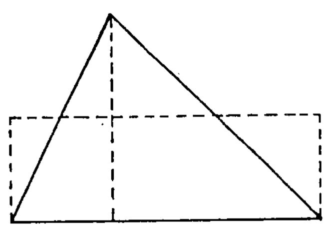
בעיה מס' 2: הוכחת חוסר הסתירה במערכת האכסיומטית של תורת המספרים

בפתיחת בעיה זו טוען הילברט, שביסודות של מדע כלשהו חייבים לפתח מערכת אכסיומות, שהן מתארות את הקשרים שבין המושגים הבסיסיים של מדע זה. מערכת אכסיומות זו משמשת באותו זמן כהגדרות של מושגים בסיסיים אלה. במערכת זו עלינו לדאוג, שהאכסיומות יהיו בלתי תלויות זו בזו, אבל מעל לכל עלינו להיות בטוחים שהאכסיומות יהיו חסרות סתירה, כלומר - שנהיה בטוחים שלא יכול לקרות, שנוכל להוכיח באותו מדע גם טענה מסויימת וגם את שלילתה. הילברט, שפירסם באותו זמן ספר על יסודות הגיאומטריה (הופיע בדפוס ב-1899)[*], טוען בהרצאתו, שאפשר לבסס את חוסר הסתירה במערכת האכסיומטית של הגיאומטריה על חוסר הסתירה במערכת האכסיומטית של קבוצת המספרים. לפיכך יש להשקיע את המאמץ ולהוכיח את חוסר הסתירה במערכת האכסיומטית של קבוצת המספרים. הוא מצהיר את בטחונו, שאפשר לפתח הוכחה ישירה של חוסר הסתירה במערכת כזו.

הפתרון של בעיה זו מפתיע ביותר. בשנת 1931 הוכיח המתימטיקאי Goedel שכבר הזכרנו אותו כאן, שבתורה, שהמערכת האכסיומטית שלה מספיק עשירה, כמו זו של תורת המספרים הטבעיים, או של תורת הקבוצות, אפשר לנסח טענות, שאי אפשר להוכיחם וגם אי אפשר להפריכם במסגרת התורה. במיוחד אי אפשר להוכיח במסגרת תורה כזו את חוסר הסתירה של עצמה.

בעיה מס' 3: הוכחת שוויון הנפח של שני ארבעונים (טטרהדרים)

הקוראים מכירים וודאי את הדרך הבאה להוכחה, כי שתי צורות מישוריות הן שוות שטח: חותכים צורה אחת למספר סופי של חלקים, שמהם אפשר להרכיב את הצורה האחרת. הציור המצורף מראה דוגמה להוכחה כזאת: חותכים משולש ל-4 חלקים ומוכיחים בדרך גיאומטרית, שאפשר להרכיב מהם מלבן, שאורך צלע אחת שלו שווה לחצי הגובה של המשולש וצלע אחרת משותפת עם המשולש. בנייה זו מוכיחה ששטח המשולש שווה לשטח המלבן. הילברט עצמו הוכיח משפט יפה, כי לכל שני מצולעים קמורים



---

[*] לצערנו אין תרגום עברי של ספר זה, אבל קיים תרגום אנגלי ואנו מייעצים לכם שכדאי, מאד כדאי, להכירו.

שהם שווי שטח, אפשר לחתוך אחד למספר סופי של חלקים שניתן להרכיב מהם את המצולע האחר.*) בהרצאתו הילברט מנסח השערה, שהדבר איננו נכון ביחס לנפחי ארבעונים. הוא מציע להוכיח שקיימים שני ארבעונים עם גובה שווה ושטח בסיסים שווה, שהם וודאי שווי נפח, ובכל זאת אי אפשר לחלק אחד מהם למספר סופי של חלקים, שניתן להרכיב מהם את האחר.

פתרון הבעיה בא מהר מאד: ב-1901 הוכיח מתימטיקאי גרמני Dehn (1878-1952) שישנם שני ארבעונים עם גובה ושטח בסיס שווים בהתאמה, ובכל זאת אי אפשר לחלקם למספר סופי של חלקים חופפים. הוא גם הוכיח שארבעון וקוביה שווי נפח גם הם אינם נתונים לחלוקה כזאת.

בעיה מס' 7: (לפי ספירת Hilbert): אירציונליות וטרנסצנדנטיות של מספרים מסויימים.

הקוראים יודעים וודאי שכל שבר עשרוני אינסופי לא מחזורי, איננו מספר רציונלי: הוא איננו ניתן להצגה כשבר p/q , p ו q שלמים, q≠0 . אפשר לחלק את קבוצת המספרים האירציונליים לשתי תת-קבוצות, מספרים אירציונליים אלגבריים, כלומר - שהם פתרון של משוואה פולינומיאלית עם מקדמים רציונליים ומספרים טרנסצנדנטיים שאינם פתרון של משוואה כזאת. הראשון שהכניס את המושג "טרנסצנדנטי" (כלומר: מעל לעוצמה אלגברית) היה המתימטיקאי Euler, שכבר הזכרנו. אבל הראשון שייצר מספר טרנסצנדנטי, כלומר - שייצר מספר והוכיח שהוא איננו יכול להיות פתרון של משוואה פולינומיאלית עם מקדמים רציונליים, היה המתימטיקאי הצרפתי Liouville (1809-1882). בשנת 1873 הוכיח המתימטיקאי הצרפתי Hermite (1822-1901) כי המספר e שהוא הסכום של הטור ... + 1/3! + 1/2! + 1/1! + 1 הוא טרנסצנדנטי. ב-1882 הוכיח המתימטיקאי הגרמני Lindemann (1852-1939) כי π הוא מספר טרנסצנדנטי. (מהוכחה זו נובע שאי אפשר לבנות, בסרגל ומחוגה, ריבוע ששיטחו שווה לשטח מעגל נתון). ממספרים טרנסצנדנטיים אלה אפשר ליצור לכל היותר קבוצה הניתנת להימנות של מספרים טרנסצנדנטיים.

---

*) ראו מאמרו של י. בנימיני: פרוק והרכבה של מצולעים במישור, אתגר - גליונות מתמטיקה מס' 21.

המתימטיקאי Cantor, שכבר הוזכר קודם, כיוצר תורת הקבוצות, הוכיח כי קבוצת המספרים האלגבריים ניתנת להימנות, כלומר אפשר ליצור התאמה חד-חד-ערכית בין איבריה לבין האיברים של קבוצת המספרים הטבעיים. משמע שהמספר הקרדינלי של קבוצה זו הוא $\aleph_0$. הוא גם הוכיח כי המספר הקרדינלי של קבוצת המספרים האירציונליים הוא $\aleph$. קבוצה שאינה ניתנת להימנות. מזה נובע שיש הרבה יותר מספרים טרנסצנדנטיים מאשר מספרים אלגבריים.

זה מקור השאלה שמעלה הילברט: מי הם המספרים הטרנסצנדנטיים ? הוא מעלה שאלה מפורטת ביחס למספרים a^{α} כש- a מספר אלגברי, שונה מ- 0 ו- 1, ו- α מספר אירציונלי - והוא שואל האם אלה טרנסצנדנטיים ?

ואמנם בשנת 1934 הוכיח המתימטיקאי הרוסי (היהודי) Gelfond (1906-1968) ובאותו זמן כמעט גם המתימטיקאי הגרמני Schneider, כי אלה אמנם מספרים טרנסצנדנטיים. דוגמה טיפוסית הוא המספר $2^{\sqrt{2}}$. המחקר לגילוי מספרים טרנסצנדנטיים נוספים עדיין נמשך. נביא דוגמה לבעיה מסוג זה שהיא פתוחה כבר הרבה שנים:

הקוראים מכירים וודאי את הטור ההרמוני, שהוא הטור של ההופכים הכיפליים של המספרים הטבעיים $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$. קל להוכיח שטור זה אינו מתכנס, כלומר - הסכומים החלקיים שלו שואפים לאינסוף. המתימטיקאי Euler שהוזכר קודם, הוכיח כי הסידרה $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/n - \ln n$ שואפת לגבול ($\ln n$ מסמן את הלוגריתם הטבעי של n כלומר לוגריתם לפי בסיס e). עד היום לא ידוע אם גבול זה רציונלי, אירציונלי אלגברי או אירציונלי טרנסצנדנטי.

<u>בעיה מס' 8</u>: <u>בעיית המספרים הראשוניים</u>

התפלגות המספרים הראשוניים בין המספרים הטבעיים יוצרת קבוצה של בעיות פתוחות עד היום. הילברט מעלה את הבעיות הבאות:

1. לקבוע את מספר המספרים הראשוניים מתחת למספר טבעי נתון,
2. להוכיח או להפריך השערה הידועה כהשערת גולדבך, שלפיה כל מספר זוגי ניתן להצגה כסכום של שני מספרים ראשוניים,
3. לענות לשאלה, האם קיים מספר אינסופי של מספרים ראשוניים תאומים (אלה הם זוגות של מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם 2) ?

לכל אחת מבעיות אלה אין עד היום פתרון מלא.

הילברט מציין כי לבעיות כאלה יש קשר חזק לבעיה הידועה כהשערת Riemann (1826-1866). בעיה זו דנה בנקודות האפס של פונקציה הנקראת "פונקצית זיטה" (שם האות היוונית ζ). מדובר בנקודות האפס של הטור האינסופי $\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \ldots$ שבו s הוא מספר קומפלכסי. ההשערה היא, שבנקודות האפס החלות בערכי s עם רכיב ממשי בין 0 ל- 1 (יש גם נקודות אפס אחרות). רכיב זה הוא תמיד 1/2, כלומר - אם $s = a+bi$ הרי $a = 1/2$. להשערה זו, שלא הוכחה עד היום, יש חשיבות רבה בהוכחת משפטים שונים על התפלגות המספרים הראשוניים.

בעיה מס' 10: הפתירות של משוואה דיופנטית

המתימטיקאי Diophantos (המאה השלישית לספירה) שכבר הזכרנו אותו, הוא המתימטיקאי היווני היחיד שעסק בבעיות אלגבריות. בספר Arithmetica הוא דן במציאת פתרונות רציונליים למשוואה פולינומיאלית עם יותר ממשתנה אחד. דיופנטוס מסתפק בפתרון רציונלי אחד של המשוואות שהוא דן בהן, אף כי בדרך כלל יש יותר פתרונות. כיום מקובל לכנות משוואה כנ"ל בשם משוואה דיופנטית, אלא שמחפשים פתרונות שלמים. מציאת הפתרונות של משוואה דיופנטית לינארית עם שני משתנים $ax + by = c$, a, b, ו-c שלמים, היתה ידועה בתקופה העתיקה. פתרון מלא מופיע במתימטיקה ההודית מהמאה השביעית לספירה. בתי הספר עושים שגיאה, שהם עוברים מפתרון משוואה לינארית עם משתנה אחד אל מערכת של שתי משוואות לינאריות עם שני משתנים. יש הרבה בעיות יפות המובילות למשוואה לינארית אחת כנ"ל.

פתרון משוואות דיופנטיות ממעלה גדולה מ-2 איננו קל. בעיה ידועה לכם וודאי היא זו שהבאנו במבוא, הדנה במציאת כל הפתרונות השלמים של משוואת פיתגורס $x^2 + y^2 = z^2$. הבעיה של הילברט אינה דנה בפתרון משוואות כאלה, אלא בשאלה יותר יסודית: לפתח אלגוריתם כללי שיגיד לנו, במספר סופי של אופרציות, האם למשוואה דיופנטית נתונה יש פתרונות שלמים. נדגיש עוד פעם: לא מדובר בפתרון המשוואה, אלא בקביעה האם יש פתרון בשלמים או אין. לבעיה זו של הילברט יש פתרון מלא. ב-1970, מתמטיקאי רוסי בשם Yuri Matiasevich, בן 22, הוכיח שלא ייתכן אלגוריתם כללי כזה.

רבים מקוראי אתגר יהיו וודאי בין אלה שיתמודדו במאה ה-21 בבעיות הילברט שטרם נפתרו במלואן, ובבעיות פתוחות חדשות שנוצרו במאה ה-20.

קשרים בין גבהי משולש לבין רדיוסי המעגלים
החסומים פנימית וחיצונית במשולש

מאת אבי ב. סיגלר, נהריה

המתמטיקאי המפורסם Polya טען שאפשר לקבל תוצאות מתימטיות מעניינות עקב "משחק" בבטויים אלגבריים.. אביא כאן דוגמא שהתפתחה בחוג העשרה בגאומטריה של תלמידי כיתת י"א בנהריה.

א. מאגר הידע של התלמידים

1) ממוצע חשבוני גדול או שווה לממוצע הרמוני, כלומר

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

(כאשר a_i חיוביים)

מקרה פרטי: במשולש קיים $(a + b + c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$

כאשר a, b, c צלעות המשולש.

2) ממוצע חשבוני של מספרים חיוביים גדול או שווה מהממוצע ההנדסי כלומר:

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$$

3) במשולש ABC

$$S_{ABC} = pr \overset{\text{הרון}}{=} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$$

כאשר r הוא רדיוס המעגל החסום במשולש ו r_a, r_b, r_c הם רדיוסי המעגלים החסומים מבחוץ ליד הצלעות a, b, c בהתאמה (המעגל החסום מבחוץ ליד הצלע a משיק לצלע זו ולהמשכי הצלעות האחרות).

<u>טענה 1</u>. במשולש שצלעותיו a,b,c וגבהיו h_a,h_b,h_c קיים:

$$\boxed{\min(h_a,h_b,h_c) > 2r}$$

<u>הוכחה</u>: נניח ש h_a הוא הגובה הקטן ביותר. אזי

$$h_a = \frac{2S}{a} \qquad r = \frac{2S}{a+b+c}$$

$$h_a - 2r = 2S\cdot\frac{a+b+c-2a}{a(a+b+c)} = 2S\cdot\frac{b+c-a}{a(a+b+c)} > 0$$

כי $b+c > a$.

נעיר שאפשר לקבל את טענתנו גם מכך שהמעגל החסום מוכל כולו במשולש המלא שבו הקדקד הוא הנקודה המרוחקת ביותר מהבסיס.

<u>מסקנה</u>: בשלב זה ברור ש $h_a + h_b + h_c > 6h$. אך אי-שוויון זה מאד בזבזני. ננסה "לעדן" אותו.

<u>טענה 2</u>. $\boxed{h_a + h_b + h_c \ge 9r}$

<u>הוכחה</u>: כאמור לעיל $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \ge 9$

מכאן נובע ש $2p\,(\frac{S}{a}+\frac{S}{b}+\frac{S}{c}) \ge 9S$

לכן $\frac{1}{2}h_a + \frac{1}{2}h_b + \frac{1}{2}h_c \ge \frac{9S}{2p} = \frac{9r}{2}$ ומכאן הטענה.

<u>מסקנה</u>: אם D, E, F על BC, CA, AB בהתאמה

אזי $AD + BE + CF \ge 9r$

<u>טענה 3</u>. $\boxed{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}}$ $\boxed{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}}$

הוכחה: $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c} = \frac{a}{S}+\frac{b}{S}+\frac{c}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$$

<u>מסקנה:</u> $\max(r_a,r_b,r_c) \ge 3r \ge \min(r_a,r_b,r_c)$

<u>הוכחת המסקנה:</u> השוויון השמאלי בטענה 3 אומר שסכומם של $1/r_c$, $1/r_b$ ו $1/r_a$ הוא $1/r$. מכאן שלא ייתכן שכולם קטנים משליש הסכום, שהוא $1/(3r)$ וגם לא ייתכן שכולם גדולים ממנו. לכן לפחות אחד מ r_c , r_b , r_a גדול או שווה מ $3r$ ולפחות אחד מהם קטן או שווה ממנו.

<u>טענה 4</u>. $\boxed{r_a + r_b + r_c \ge 9r}$

<u>הוכחה:</u> קיים:

$$[(p-a)+(p-b)+(p-c)][\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}] \ge 9$$

כי ממוצע הרמוני קטן או שווה ממוצע חשבוני.

לכן $p\,[\frac{S}{p-a}+\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}] \ge 9S$

כלומר $r_a + r_b + r_c \ge \frac{9S}{p} = 9r$

<u>טענה 5</u>. $\boxed{r_a \cdot r_b \cdot r_c \ge h_a \cdot h_b \cdot h_c}$

<u>הוכחה:</u> $r_a \cdot r_b \cdot r_c = \frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}$, $h_a \cdot h_b \cdot h_c = \frac{8S^3}{abc}$

לכן אם נוכיח ש $abc \ge 8(p-a)(p-b)(p-c)$ הוכחנו את הטענה.
זהו אי-שוויון ידוע שנובע מאי-שוויון הממוצעים על ידי זה
שמגדירים $p-a \equiv x$, $p-b \equiv y$, $p-c \equiv z$ ואז $a = z+y$,
$b = x+z$, $c = x+y$ ו $\frac{1}{2}a \ge \sqrt{yz}$, $\frac{1}{2}b \ge \sqrt{xz}$, $\frac{1}{2}c \ge \sqrt{xy}$,
ולכן $abc \ge 8\sqrt{yz}\sqrt{xz}\sqrt{xy} = 8xyz$.

<u>שאלה:</u> האם ייתכן ש $r_c > h_c$, $r_b > h_b$, $r_a > h_a$? (שאלה של תלמיד!)
התשובה שלילית כי סכומי ההפכיים שווים לפי טענה 3.

מסקנה: מטענה 3 ומטענה 5 נובע ש

$$\boxed{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c \geq h_a \cdot h_b + h_a \cdot h_c + h_b \cdot h_c}$$

מצאנו כבר ש: $M = r_a + r_b + r_c \geq 9r$

וגם: $N = h_a + h_b + h_c \geq 9r$

האם קיים קשר בין M ו N ?

טענה 6. $\boxed{r_a + r_b + r_c \geq h_a + h_b + h_c}$

הוכחה: $r_a + r_b + r_c = S\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right)$

$$h_a + h_b + h_c = 2S\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

בסימונים של הוכחת טענה 5 עלינו להוכיח ש

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{x+z}$$

וזה נובע מכך שלפי אי-השוויון בין הממוצע החשבוני וההרמוני
$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq \frac{2}{x+y}$ וכו'.

אסיים בהוכחת אי שוויון ידוע שנובע באופן מפתיע מטענה 5.

נוכיח ש $R \geq 2r$:

$$r_a \cdot r_b \cdot r_c \geq h_a \cdot h_b \cdot h_c$$

נכפיל ב r את שני האגפים ונקבל:

$$S^2 = \frac{S^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \geq r \cdot h_a \cdot h_b \cdot h_c$$

נכפיל ב abc ונקבל:

$$abcS^2 \geq r \cdot h_a \cdot a \cdot h_b \cdot b \cdot h_c \cdot c = 8rS^3$$

ולכן $R = \frac{abc}{4S} \geq 2r$.

פתרון בעיות באמצעות "משפט קוסינוסים מרחבי"

מאת יעקב נהיר, ירושלים

תמצית

בדומה למשפט הקוסינוסים הרגיל הקיים במישור נציג משפט קוסינוסים מרחבי. נביא גם שמושים שלו לבעיות בפיסיקה ומתמטיקה. כמו כן נביא הרחבה של המשפט למרחבים רב-ממדיים.

נניח שנתונה משקולת W הקשורה בשלשה חבלים לתקרה (ציור א').

נניח שנתונות גם המתיחויות בחבלים T_1 , T_2 ו T_3.

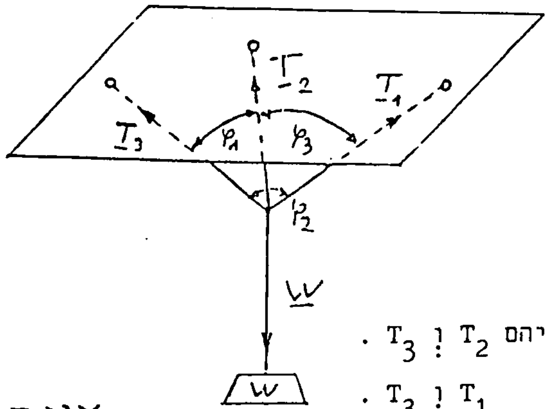
כמו כן נתונות הזויות בין החבלים:

φ_1 היא הזוית בין החבלים שמתיחויותיהם T_2 ו T_3 .

φ_2 " " " " " T_1 ו T_3 .

φ_3 " " " " " T_1 ו T_2 .

(ציור א').



ציור א'

נרצה לדעת את גודל המשקולת W התלויה בחבלים. כיצד נעשה זאת ?

נדגיש כי לא נתונים הווקטורים $\underline{T}_i$ (i=1,2,3) המציינים את הכוחות הפועלים לאורך החבלים אלא רק הגדלים שלהם T_i (i=1,2,3), כלומר המתיחויות T_i . בכל זאת נניח כי ידועים הווקטורים $\underline{T}_1$, $\underline{T}_2$, $\underline{T}_3$ (ציור א') וזה יעזור בנסוח הבעיה ובפתרונה.

$\underline{T}_1$ מבטא בגדלו את המתיחות T_1 ואילו כוונו מציין את כוון החבל המתאים וכן ל $\underline{T}_2$ ול $\underline{T}_3$.

נסמן ב $\underline{W}$ את ווקטור הכוח המופעל ע"י המשקולת לאורך החבל היורד זקופות כלפי מטה מנקודת החבור של החבלים (ציור א').

נסוח הבעיה בצורה ווקטורית הוא:

קיים

$$\underline{T}_1 + \underline{T}_2 + \underline{T}_3 + \underline{W} = 0 \tag{1}$$

אך ידועים רק

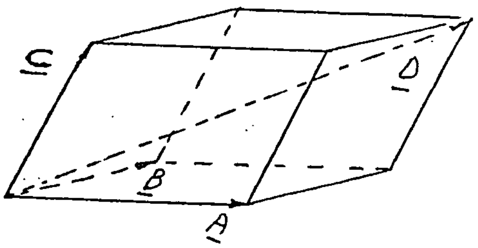
$$T_3 = |\underline{T}_3| \;,\; T_2 = |\underline{T}_2| \;,\; T_1 = |\underline{T}_1| \tag{2}$$

וכן ידועות הזויות בין הווקטורים.

יש עתה למצוא את הגודל $W = |\underline{W}|$.

נרשום ראשית את (1) בצורה

$$\underline{W} = -(\underline{T}_1 + \underline{T}_2 + \underline{T}_3) \tag{3}$$



ציור ב'

בטרם נמשיך נבחן בעיה גיאומטרית דומה במקצת.

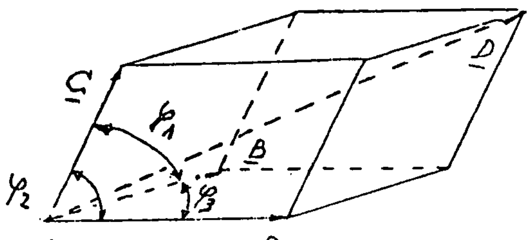
יהיו $\underline{A}$, $\underline{B}$ ו $\underline{C}$ שלשה ווקטורים היוצרים מקבילון (ציור ב') אך נתונים רק ארכי המקצועות של המקבילון, ז"א הגדלים

$$C = |\underline{C}| \quad B = |\underline{B}| \;,\; A = |\underline{A}| \tag{4}$$

וכן נתונות זויות הפאות (ז"א הזויות בין המקצועות)

$$\varphi_3 = \sphericalangle(A,B) \;,\; \varphi_2 = \sphericalangle(A,C) \;,\; \varphi_1 = \sphericalangle(B,C) \tag{5}$$

(ציור ג').



ציור ג'

נרצה למצוא את גודל האלכסון הראשי $D = |\underline{D}|$, של המקבילון כאשר מתקיים

$$\underline{D} = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C} \tag{6}$$

כאמור, לא ידועים הווקטורים $\underline{A}$, $\underline{B}$ ו $\underline{C}$, וידועים רק הגדלים A , B , C , φ_1, φ_2 ו φ_3 . וכן הקשר הנ"ל (6).

למרות זאת נניח שידועים הווקטורים ונתבונן במשוואת הקשר ביניהם (6).

נכפיל כל אגף של המשוואה (6) בעצמו ונקבל:

$$|\underline{D}|^2 = \underline{D}\cdot\underline{D} = (\underline{A} + \underline{B} + \underline{C})\cdot(\underline{A} + \underline{B} + \underline{C}) = \tag{7}$$
$$= |\underline{A}|^2 + |\underline{B}|^2 + |\underline{C}|^2 + 2\underline{A}\cdot\underline{B} + 2\underline{A}\cdot\underline{C} + 2\underline{B}\cdot\underline{C}$$

או

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB\cos\varphi_1 + 2AC\cos\varphi_2 + 2BC\cos\varphi_3 \tag{8}$$

אפשר לכתוב זאת בצורה מרוכזת:

$$D^2 = \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cos\varphi_3 & \cos\varphi_2 \\ \cos\varphi_3 & 1 & \cos\varphi_1 \\ \cos\varphi_2 & \cos\varphi_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \tag{9}$$

קבלנו אפוא את D^2 כפונקציה של A, B, C והזויות שביניהם, ונפתרה הבעיה.

נפתור בצורה דומה גם את משוואת המתיחויות בחבלים (3), כי ההכפלה של גודל בעצמו מסלקת את סימן המינוס.

נכפול אפוא את אגפי (3) כל אחד בעצמו ונקבל

$$|\underline{W}|^2 = [-(\underline{T}_1 + \underline{T}_2 + \underline{T}_3)]\cdot[-(\underline{T}_1 + \underline{T}_2 + \underline{T}_3)] = \tag{10}$$
$$= (\underline{T}_1 + \underline{T}_2 + \underline{T}_3)\cdot(\underline{T}_1 + \underline{T}_2 + \underline{T}_3)$$

וההמשך זהה לקודם.

שתי המשוואות (8) ו (9) יכולות להחשב, כל אחת מהן, כהצגה שונה של משפט הקוסינוסים המרחבי.

ניתן לרשום בצורה דומה גם את משפט הקוסינוסים המישורי שבין שני וקטורים. ואכן יהיו שני וקטורים $\underline{A}$ ו $\underline{B}$ כמו קודם והשקול שלהם $\underline{C}$. אז

$$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B} \tag{11}$$

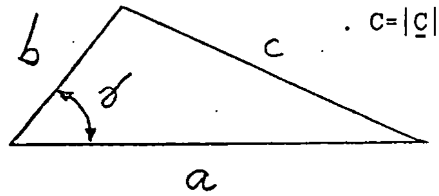
כפל כל אגף בעצמו ייתן, בדומה לקודם

$$C^2 = |\underline{C}|^2 = |\underline{A}+\underline{B}|^2 = (\underline{A}+\underline{B})\cdot(\underline{A}+\underline{B}) = A^2+B^2+2\underline{A}\cdot\underline{B} = \tag{12}$$
$$= A^2+B^2+2AB\cos\varphi$$

ד"א

$$c^2 = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cos\varphi \\ \cos\varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \qquad (13)$$

כאשר φ היא הזוית $\measuredangle(\underline{A},\underline{B})$ וכן $A=|\underline{A}|$, $B=|\underline{B}|$ ו $C=|\underline{C}|$.



ציור ד'

נתבונן במשלש שצלעותיו
a,b,c (ציור ד') והזוית
γ מול הצלע c .

כידוע מתקיים לגביו

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \qquad (14)$$

או

$$c^2 = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\cos\gamma \\ -\cos\gamma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \qquad (15)$$

לשם נוחיות הדיון נקרא לביטויים אלה, (14) ו (15), בשם: "משפט הקוסינוסים הגיאומטרי" או, לפעמים, בהרחבה: "משפט הקוסינוסים הגיאומטרי במישור", ואילו למשפט הקוסינוסים הקודם, (12) ו (13), נקרא: "משפט הקוסינוסים הווקטורי" או בהרחבה: "משפט הקוסינוסים הווקטורי במישור".

משפט הקוסינוסים המרחבי (9) שהוא עיקר הדיון כאן מתאים למשפט הקוסינוסים הווקטורי במישור, (12) ו (13), אך לא למשפט הקוסינוסים הגיאומטרי במישור, (14) ו (15), וזאת בגלל סימן המינוס המקדים שם, ב (14) וב (15), את האברים שמחוץ לאלכסון הראשי.

ניתן להציג ולהוכיח גם משפט קוסינוסים מרחבי גיאומטרי התואם למקרה המישורי, (14) ו (15), אך הדיון בו ארוך. לכן נשאיר אותו להזדמנות אחרת.

נעיר כאן כי בבעיה שטפלנו בה היו הנתונים יצורים חד-ממדיים, ארכים, דהיינו מקצועות המקבילון וזוית הפאות שגם הם חד-ממדיים והתשובה גם כן חד-ממדית, אורך האלכסון D. כלומר גם הנתונים וגם התוצאה חד ממדיים, אך הפתרון נמצא ע"י פעולות בווקטורים 3 ממדיים. המעניין הוא שהווקטורים עצמם $\underline{A}$, $\underline{B}$ ו $\underline{C}$ אף לא חושבו במפורש וניתן לומר כי עצם נוכחותם הביאה לפתרון פשוט ומהיר.

משפט הקוסינוסים ה- n-ממדי

יהיו n וקטורים $i=1,\ldots,n$ $\underline{F}_i$ במרחב ממימד n (n כלשהו). נתבונן בסכומם $\underline{R}$:

$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \ldots + \underline{F}_n \tag{16}$$

אז קיים:

$$R^2 = |\underline{R}|^2 = \tag{17}$$

$$= \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & \cdots & F_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cos\varphi_{12} & \cdots & \cos\varphi_{1n} \\ \cos\varphi_{21} & 1 & \cdots & \cos\varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \cos\varphi_{n1} & & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \\ F_n \end{bmatrix}$$

כאשר $F_i = |\underline{F}_i|$

$$\cos\varphi_{ij} = \frac{\underline{F}_i \cdot \underline{F}_j}{|\underline{F}_i| \cdot |\underline{F}_j|} \tag{18}$$

וכן מתקיים $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$ ז.א. המטריצה סימטרית.

ההוכחה של משפט הקוסינוסים הרב-ממדי היא הכללה מיידית של המקרה ה 3-ממדי או ה 2-ממדי ונשאיר אותה לקורא.

הסינוס והקוסינוס של זוית מרחבית

לפי האמור לעיל, ניתן לאמר כי הקוסינוס של זוית מרחבית, שנסמנו ב $\cos\Omega$, אינו מספר יחיד אלא שלישיית הקוסינוסים של זויות הפאות ($\cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2$, $\cos\varphi_3$). אמנם יש לנו 3 מספרים, אבל אין זה וקטור כי אין לו תכונות של וקטור (ואכן, במקרה ה- n-ממדי יש $\frac{n(n-1)}{2}$ מספרים $\cos\varphi_{ij}$ (ראה (17)), למשל במקרה ה 2-ממדי יש לנו מספר יחיד $\cos\varphi$ (ראה (13)). עלינו לאמר ש $\cos\Omega$ היא מטריצה, או טנסור, וזוהי המטריצה המופיעה ב (9) וב (13).

במאמרים ב"אתגר-גליונות מתמטיקה" מס' 18 ו 19 הגדרנו את הסינוס של זוית מרחבית $\sin\Omega$, האנלוגי לסינוס של זוית מישורית. בגליון מס' 22 הרחבנו את ההגדרה למרחב רב-ממדי. נחזור על תמצית הדברים:

$\sin\Omega$ הוא בעל התכונה שנפח מקבילון בעל זוית מרחבית Ω וצלעות A, B, C הוא, באנלוגיה לנוסחה לשטח מקבילית במישור:

$$V = ABC\sin\Omega \tag{19}$$

אם נתונים וקטורים במרחב:

$$\underline{A} = (A_x, A_y, A_z) \ , \quad \underline{B} = (B_x, B_y, B_z) \ , \quad \underline{C} = (C_x, C_y, C_z)$$

ו $A = |\underline{A}|$, $B = |\underline{B}|$, $C = |\underline{C}|$ אורכיהם, אזי נובע מהנוסחה לנפח מקבילון ע"י דטרמיננטה ש-

$$\sin \Omega = \frac{1}{ABC} \text{ abs} \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (20)$$

(abs מציין ערך מוחלט) - נוסחה (4) באתגר-גליונות מתמטיקה מס' 18 (תשרי תשנ"א - אוקטובר 1990) עמ' 7. אם $\underline{A}$, $\underline{B}$ ו $\underline{C}$ הם וקטורי יחידה (כלומר אורכם שווה ל 1) יהיה $\sin \Omega$ שווה פשוט לערך המוחלט של הדטרמיננטה ב (20).

מחישוב נפח המקבילון כשטח הבסיס מוכפל בגובה, נקבל שאם $\varphi = \sphericalangle(\underline{A},\underline{B})$ ו- β היא הזוית בין $\underline{C}$ והמישור של $\underline{A}$ ו $\underline{B}$ אזי

$$\sin \Omega = \sin \varphi \cdot \sin \beta \qquad (21)$$

(שם, נוסחה (1) בעמ' 4).

ע"י שימוש בכללים להכפלת שני דטרמיננטים (ראה החלק השני של מאמרנו ב"אתגר-גליונות מתמטיקה" מס' 19 (שבט תשנ"א - פברואר 1991) עמ' 4) מקבלים קשר בין $\sin \Omega$ לבין דטרמיננטה הבנויה מהקוסינוסים של הזוית בין הווקטורים, שאינה אלא דטרמיננטת המטריצה "$\cos \Omega$" שמופיעה ב (9):

$$\sin^2 \Omega = \begin{vmatrix} 1 & \cos \varphi_3 & \cos \varphi_2 \\ \cos \varphi_3 & 1 & \cos \varphi_1 \\ \cos \varphi_2 & \cos \varphi_1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (22)$$

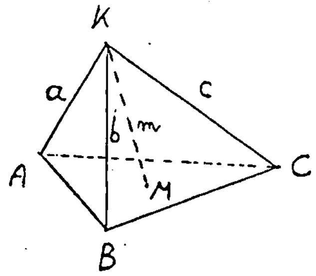
(שם, נוסחה (24 א) בעמ' 5).

הנוסחה האנלוגית בשני ממדים היא (שם, נוסחה (24 ב) בעמ' 5):

$$\sin^2 \varphi = \begin{vmatrix} 1 & \cos \varphi \\ \cos \varphi & 1 \end{vmatrix} \qquad (23)$$

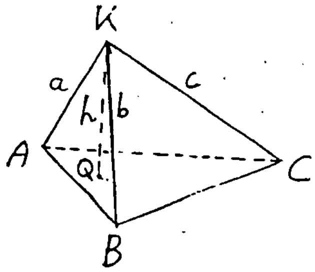
שאינה אלא הזהות הטריגונומטרית $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. את הנוסחה (22) אפשר לראות כהרחבת קשר זה בין סינוס וקוסינוס למרחב התלת-ממדי. כמובן שניתן להרחיב את (22) מיידית גם למקרה הרב-ממדי.

בעיה



ציור ה'

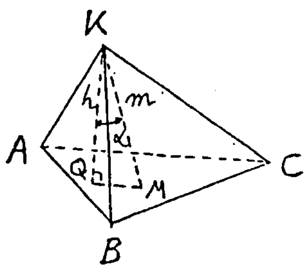
יהי ארבעון KABC (ציור ה')
ונתונים בו המקצועות
$KA = a$, $KB = b$, $KC = c$
והזויות ביניהם
$\varphi_1=\angle(b,c)$, $\varphi_2=\angle(a,c)$, $\varphi_3=\angle(a,b)$



ציור ו'

א. מצא את אורך הקטע $m = KM$ כאשר M היא נקודת פגישת התיכונים של משלש הבסיס ΔABC (ציור ה'). ניתן לקרא לקו KM בשם: "קו התיכונים היוצא מהקדקד K".

ב. מצא את גובה הארבעון מהקדקד K אל הנקודה Q שהיא הטל K על מישור הבסיס ABC (ציור ו').



ציור ז'

ג. מצא את הזוית בין קטע הגובה KQ ובין קו התיכונים KM (ציור ז').

רמזים:

א. האורך m של קו התיכונים KM בארבעון הוא $\frac{1}{3}$ אורך האלכסון של המקבילון המתאים.

ב. מהנתונים נוכל למצא את שטח הבסיס ΔABC . שטח משולש לפי משפט הרון הוא:

$$S = \sqrt{p(p-b_1)(p-b_2)(p-b_3)} \qquad (24)$$

כאשר b_1, b_2, b_3 הם ארכי צלעות המשולש ואילו p הוא חצי סכום ארכי הצלעות, דהיינו $p = (b_1+b_2+b_3)/2$.

נוכל למצא גם את נפח הארבעון. הוא נתון בנוסחה: (ראה (19)):

$$\text{נפח הארבעון} = \frac{1}{6}\, abc \sin\Omega$$

כאשר a, b ו c הם מקצועות היוצאים מקדקד אחד ו $\sin\Omega$ הוא סינוס הזוית המרחבית באותו קדקד.

את $\sin \Omega$ ניתן למצא בעזרת הנוסחה (22). כעת, ידיעת שטח הבסיס ונפח הארבעון מאפשרת את מציאת הגובה.

ג. נתחשב בכך שקטע הגובה KQ ניצב לכל קו במישור הבסיס (ציור ז') ולכן יש לנו משולש ישר-זוית KQM בו ידועים היתר ואחד הניצבים.

<u>הערה</u>: אפשר למצא את הגובה KQ גם כדלהלן:

נבחר את אחד מקדקדי משולש הבסיס ΔABC , נאמר A . מידיעת ארכי צלעות הבסיס b_1, b_2, b_3 ניתן למצא את זוויות משולש הבסיס ליד A . כן ניתן למצא את שתי זויות הפאות ליד A . אז נמצא את $\sin \Omega_A$, סינוס הזוית המרחבית של הארבעון ליד A . מכאן יהיה לנו סינוס זוית הגובה של המקצוע KA מעל הבסיס לפי (21) ומכאן הגובה.

יש אפוא יותר מדרך אחת למציאת הגובה. זה רצוי לשם בדיקת החשבונות.

נתונים מספריים כמקרה פרטי:

$$a = 4 \qquad b = 5 \qquad c = 6$$
$$\varphi_1 = 60^\circ \qquad \varphi_2 = 45^\circ \qquad \varphi_3 = 30^\circ$$

תוצאות במקרה פרטי זה לשם בקורת:

קו התיכונים $KM = 4.4169$

קטע הגובה $KQ = 3.9444$

הזוית היא $\sphericalangle(KM,KQ) = 26.74^\circ$

חוב נעים הוא לי להודות לפרופ' טדי אייזנברג על עדודו והתענינותו בעבודתי ולפרופ' דני ברנד על שעבר על כתב היד והעיר הערות רבות ומועילות. שניהם מהמחלקה למתמטיקה ומדעי המחשב באוניברסיטת בן-גוריון בנגב.

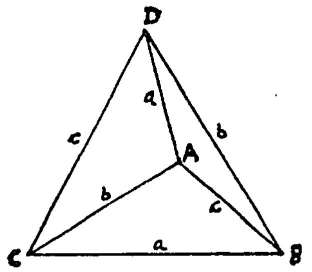
חישוב נפח של ארבעונים מיוחדים

נמסר מפי ד"ר אליהו אלטמן ז"ל

(מובא ע"י אליהו לוי, חיפה)

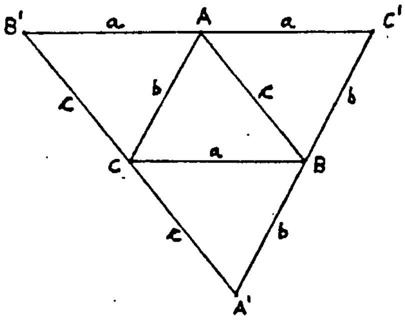
ד"ר אליהו אלטמן ז"ל היה שנים רבות מרצה למתמטיקה בטכניון. הוא נפטר לפני כשנתיים. השיטה היפה הבאה לחשב נפח של ארבעונים (טטראדרים) מסוג מיוחד הוצגה לי על ידו בשיחה לפני מספר שנים.

נתבונן בארבעון (טטראדר, כלומר פירמידה משולשת) T בעל התכונה המיוחדת שכל שני מקצועות נגדיים שלו שווים בארכם (ציור 1). יש, איפוא, 3 ארכים שונים של מקצועות: a, b ו c. כל פיאה של T היא משולש שצלעותיו a, b, c ולכן כל פיאותיו של T חופפות. אנו נביא דרך לבטא את ניפחו של T לפי a, b ו c.



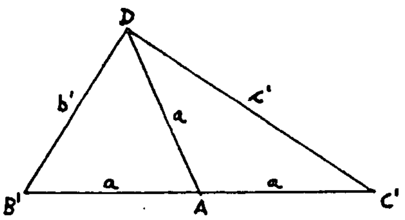
ציור 1

יהי Δ משולש הבסיס. נסמן את קדקדיו ב- A, B, C ואת הקדקד הרביעי של T ב- D. נבנה כעת 3 משולשים נוספים ליד Δ במישור שלו שהם חופפים ל Δ ויוצרים איתו משולש $\Delta' = A'B'C'$ שצלעותיו 2a, 2b, 2c (ציור 2). (אנו כאלו פורשים את דפנות T על מישור הבסיס). נבנה ארבעון T' שקדקדו יהיה D ובסיסו Δ'. ברור של T' נפח גדול פי 4 מן T. נסמן: $a' = \overline{DA'}$ $b' = \overline{DB'}$ $c' = \overline{DC'}$.



ציור 2

אם נסתכל באחת הפאות הצדדיות של T', למשל DB'C' (ציור 3), נראה שהיא חסימה במעגל שרדיוסו a, בו B'C' הוא קוטר. מכאן שהזוית $\measuredangle B'DC'$ ישרה.



ציור 3

הארבעון T' הוא, איפוא, בעל פינה ישרת זוויות ב D, ולכן ניפחו הוא $\frac{1}{6} a'\cdot b'\cdot c' = \frac{1}{6}\overline{DA'}\cdot\overline{DB'}\cdot\overline{DC'}$. אבל a', b' ו c' מקיימים:

$$(a')^2+(b')^2 = 4c^2 \quad , \quad (a')^2+(c')^2 = 4b^2 \quad , \quad (b')^2+(c')^2 = 4a^2$$

ומכאן $2(a')^2+2(b')^2+2(c')^2 = 4a^2+4b^2+4c^2$ ולבסוף

$$(a')^2 = (a')^2+(b')^2+(c')^2 - [(b')^2+(c')^2] = 2(a^2+b^2+c^2) - 4a^2 =$$
$$= 2(b^2+c^2-a^2)$$

ומסיבה דומה $(b')^2 = 2(a^2+c^2-b^2)$ $\quad (c')^2 = 2(a^2+b^2-c^2)$.

מכל זה נובע שנפח הארבעון T (שהוא $\frac{1}{4}$ נפח הארבעון 'T) הוא:

$$\boxed{V = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}}$$

* * * * * *

משפחות מספרים תלת-ספרתיים המקיימים משוואה ממעלה שלישית

מאת יוסף סימון, פתח-תקוה

תרגיל תיכנות ידוע (ראה [1] עמוד 210) הוא לאתר ארבעה מספרים תלת-ספרתיים N אשר ספרותיהם העשרוניות, xyz מקיימים את המשוואה:
$N = 100x + 10y + z = x^3 + y^3 + z^3$.

ארבעת המספרים הם:

$$\begin{aligned}
153 &= 1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27\\
370 &= 3^3 + 7^3 + 0^3 = 27 + 343 + 0\\
371 &= 3^3 + 7^3 + 1^3 = 27 + 343 + 1\\
407 &= 4^3 + 0^3 + 7^3 = 64 + 0 + 343
\end{aligned}$$

בתחלה נראה כי כל אחד מארבעת המספרים הינו איבר בסדרה אינסופית של מספרים המקיימים את המשוואה:

$$N = (xyz)_b = x^3 + y^3 + z^3$$

כאשר x, y, z ספרות לפי בסיס b . בכל משפחה כזו יהיו x, y, z וכן הבסיס b איברים של סדרה אריתמטית. כל אחד מארבעת הפתרונות עבור הבסיס 10 ישתייך למשפחה אחרת. לאחר מכן נציג משפחות אינסופיות נוספות של פתרונות.

<u>הצגת סדרות הפתרונות</u>

הסדרות יהיו עבור $i = 0,1,2, \dots$. נגדיר סדרות של מספרים שנסמנן ב A, B, B', C .

בסדרה A יהיה 153 האיבר השני (כלומר מתאים ל- $i=1$).

בסדרה B יהיה 370 האיבר הרביעי (כלומר מתאים ל- $i=3$).

בסדרה 'B יהיה 371 האיבר הרביעי (כלומר מתאים ל- $i=3$).

בסדרה C יהיה 407 האיבר הרביעי (כלומר מתאים ל- $i=3$).

<u>בסדרה A</u> יהיה הבסיס $b = 6i+4$ והספרות בבסיס b יהיו

$$x = i \quad , \quad y = 3i+2 \quad , \quad z = 2i+1$$

כדי לבדוק שכל איברי הסדרה מקיימים את המשוואה יש להראות כי $xb^2 + yb^1 + zb^0 = x^3 + y^3 + z^3$, וזה נעשה ע"י הצבת הביטויים של x, y, z, b לפי i , כדלקמן:

יש להראות כי:

$$\begin{aligned} x\cdot b^2 + y\cdot b^1 + z\cdot b^0 &= x^3 + y^3 + z^3 \\ i\cdot(6i+4)^2 + (3i+2)\cdot(6i+4) + (2i+1) &= i^3 + (3i+2)^3 + (2i+1)^3 \\ 36i^3+48i^2+16i + 18i^2+24i+8 + 2i+1 &= i^3 + 27i^3+54i^2+36i+8 \\ &\quad + 8i^3+12i^2+ 6i+1 \\ 36i^3 + 66i^2 + 42i + 9 &= 36i^3 + 66i^2 + 42i + 9 \end{aligned}$$

<u>דוגמאות:</u>

$i=0$ בסיס=4 $x=0,\ y=2,\ z=1$ $N = (021)_4 = 0\cdot4^2+2\cdot4+1 = 0^3+2^3+1^3$

$i=1$ בסיס=10 $x=1,\ y=5,\ z=3$ $N = (153)_{10} = 1\cdot10^2+5\cdot10+3 = 1^3+5^3+3^3$

$i=2$ בסיס=16 $x=2,\ y=8,\ z=5$ $N = (285)_{16} = 2\cdot16^2+8\cdot16+5 = 2^3+8^3+5^3$

$i=16$ בסיס=100 $x=16,\ y=50,\ z=33$ $N = 165033 = 16^3+50^3+33^3$

גם בשאר הסדרות ההוכחה שאבריהן מקיימים את המשוואה היא בדרך דומה.

<u>הסדרה B</u> נתונה ע"י: $x = i,\ y = 2i+1,\ z = 0$ בסיס $= 3i+1$

<u>הסדרה 'B</u> זהה לסדרה B פרט ל- Z השווה ל 1 .

<u>בסדרה C</u> $x = i+1,\ y = 0,\ z = 2i+1$ בסיס $= 3i+1$

את סדרות הפתרונות האלו מצאנו תוך כדי השוואה ומציאת דמיון בין מספר פתרונות למשוואה בבסיס 100 לארבעת הפתרונות בבסיס 10.

הרשימה הבאה מכילה את כל הפתרונות למשוואה לפי בסיס 100 (מלבד הפתרונות הטריביאליים 000000 ו 000001 שכמותם קיימים בכל בסיס):

?	041833	$= (04)^3 + (18)^3 + (33)^3$
A:	165033	$= (16)^3 + (50)^3 + (33)^3$
?	221859	$= (22)^3 + (18)^3 + (59)^3$
B:	336700	$= (33)^3 + (67)^3 + (00)^3$
B':	336701	$= (33)^3 + (67)^3 + (01)^3$
C:	340067	$= (34)^3 + (00)^3 + (67)^3$
C-:	341067	$= (34)^3 + (10)^3 + (67)^3$
C+:	407000	$= (40)^3 + (70)^3 + (00)^3$
C+':	407001	$= (40)^3 + (70)^3 + (01)^3$
C+":	000407	$= (00)^3 + (04)^3 + (07)^3$
?	444664	$= (44)^3 + (46)^3 + (64)^3$
?	487215	$= (48)^3 + (72)^3 + (15)^3$
?	982827	$= (98)^3 + (28)^3 + (27)^3$
?	983221	$= (98)^3 + (32)^3 + (21)^3$
Z	001000	$= (00)^3 + (10)^3 + (00)^3$
Z'	001001	$= (00)^3 + (10)^3 + (01)^3$

כך שבשלב מוקדם הגדרנו את ארבע הסדרות כדלקמן:

בסיס	=	10	100	1000	10000	
A	=	{153	165033	166500333	166650003333	.... }
B	=	{370	336700	333667000	333366670000	.... }
B'	=	{371	336701	333667001	333366670001	.... }
C	=	{407	340067	334000667	333400006667	.... }

A: $(16..6500..0033..333) = (16..66)^3 + (50..00)^3 + (33..33)^3$

B: $(33..3366..6700..000) = (33..33)^3 + (66..67)^3 + (00..00)^3$

B': $(33..3366..6700..001) = (33..33)^3 + (66..67)^3 + (00..01)^3$

C: $(33..3400...0066..667) = (33..34)^3 + (00..00)^3 + (66..67)^3$

מצאנו ארבע סדרות אריתמטיות נוספות, כך שאם b משתייך לאחת מהן אנו מסוגלים להציג פתרון עבור הבסיס b :

D:	בסיס = 3i+2	x = i	y = 0	z = 2i+1
E:	בסיס = 9i+6	x = 7i+5	y = 2i+1	z = 6i+4
F:	בסיס = 9i+3	x = 5i+1	y = 4i+2	z = 6i+2
G:	בסיס = 15i+1	x = i	y = 6i+1	z = 2i+1

אין סדרה כזו שתכלול את <u>כל</u> הבסיסים המתחלקים ב- 9, היות ולבסיסים 72, 90, 153 ו-270 לא קיימים פתרונות נוספים מלבד הפתרונות הטריביאליים 000 ו- 001 .

כעת נגזור פתרונות עבור הבסיס b^2 מפתרונות בבסיס b .

אם x0z פתרון בבסיס b אזי ברור כי x0z000 ו- 000x0z הם פתרונות בבסיס b^2 (x,0,z מסמלים כאן ספרות לפי בסיס b . ספרות לפי הבסיס b^2 מסומנות כזוגות ספרות לפי בסיס b).

אם $b=s^2$ ו- x0z פתרון עבור בסיס b אזי גם xsz הוא פתרון עבור אותו בסיס.

כדוגמאות ל- x0z000 ראה את השורות המסומנות ב- +C ו- Z ברשימת הפתרונות לעיל עבור הבסיס 100. כדוגמא ל- 000x0z ראה את השורה "+C . כדוגמאות ל- xsz ראה את השורות -C, Z ו- 'Z .

נציג כעת פתרונות המבוטאים בעזרת חזקות גבוהות של פרמטר:

בסיס	x	y	z	הערות
t^4	t	t^2	t^3	$x^3=z$; $y^3=yb$; $z^3=xb^2$.
t^4	t	0	t^3	$x^3=z$; $z^3=xb^2$.
t^4	0	t^2	0	
t^8	t^5	t^7	0	$x^3=yb$; $y^3=xb^2$.
t^8	0	t	t^3	$y^3=z$; $z^3=yb$.
t^{26}	t^5	t^{19}	t^{15}	$x^3=z$; $y^3=xb^2$; $z^3=yb$.
t^{26}	t^{11}	t^7	t^{21}	$x^3=yb$; $y^3=z$; $z^3=xb^2$.

<u>הערות</u>

1. בנוסף לפתרונות שהוזכרו מצאנו עוד פתרונות שאינם כלולים במשפחות אינסופיות.

2. למעשה אנו דנים כאן במציאת פתרון b,x,y,z למשוואה הדיופנטית $xb^2+yb^1+z=x^3+y^3+z^3$, b שלם חיובי ו- x,y,z שלמים גדולים או שווים ל- 0 וקטנים מ- b . נניח שאנו מחפשים פתרונות שהם סדרות: $b=B_0+Bi$, $x=X_0+Xi$, $y=Y_0+Yi$, $z=Z_0+Zi$, $i=0,1,2,3,\ldots$ (B_0,X_0,Y_0,Z_0 הם האיברים הראשונים ו- B,X,Y,Z הם ההפרשים). עלינו אז להציב את הביטויים לפי i במשוואה ונקבל בשני האגפים פולינומים ממעלה שלישית. כדי שהם יהיו שווים עבור כל i צריכים המקדמים של i^3,i^2,i^1,i^0 להיות שווים ומקבלים ארבע משוואות:

$X^3 + Y^3 + Z^3 = XB^2$	מקדמי i^3
$3X^2X_0 + 3Y^2Y_0 + 3Z^2Z_0 = X_0B^2 + 2XBB_0 + YB$	מקדמי i^2
$3XX_0^2 + 3YY_0^2 + 3ZZ_0^2 = XB_0^2 + 2BX_0B_0 + BY_0 + YB_0 + Z$	מקדמי i^1
$X_0^3 + Y_0^3 + Z_0^3 = X_0B_0^2 + B_0Y_0 + Z_0$	מקדמי i^0

3. אם נחפש פתרונות עם ספרות שוות נקבל משוואה שאפשר לנתח ע"י טכניקת משוואת פל. למשל אם נדרוש $x = y = z$ נקבל את המשוואה $b^2+b+1 = 3x^2$
דוגמאות: $x=y=z=13$, $b=22$ $x=y=z=181$, $b=313$

דוגמאות מסוג אחר עם ספרות שוות הן:

$b=4$ $x=y=2$, $z=3$ ו- $x=y=3$, $z=2$

$b=16$ $x=y=9$, $z=10$ ו- $x=y=10$, $z=9$

4. שימו לב כי סכום הספרות במשפחות A, B, 'B, C ו- D הוא b, b-1 או b+1 , וסכום הספרות במשפחות E ו- F הוא 5b/3 ובנוסף לכך $x + y = b$. עבור המשפחה G סכום הספרות = $\frac{2}{3}$(2 + בסיס) .

5. בדוק כי אם מציבים בבטויים של המשפחה C ערכים שליליים עבור i והופכים את סימני b,x,y,z מקבלים את המשפחה D.

6. לפתרונות שבשלוש השורות הראשונות בטבלת הפתרונות התלויים בחזקות של t יש אנלוגיים עבור בעיה דומה בה מספרים k - ספרתיים שווים לסכום החזקות ה- k -יות של ספרותיהם: פתרון אחד הוא עם בסיס t^{k+1} וספרות $t, t^2, \dots, t^{k-1}, t^k$ וכן אפשר להחליף חלק מספרות אלו ב- 0 באופן סימטרי משני הצדדים.

7. אם נציב בסדרות השונות i לא שלם נקבל פתרונות למשוואה, אבל בהם b,x,y,z עלולים להיות לא-שלמים ולכן לא יוכלו לשמש כבסיס וכספרות של מספר בבסיס זה.

בסיום ברצוני להודות ל:

פרופסור יוסף ב. מושקאט - אוניברסיטת בר-אילן
פרופסור דוד הראל - מכון ויצמן למדע
דוקטור אריאל פרנק - אוניברסיטת בר-אילן

על עזרתם ועידודם בהכנת מאמר זה.

מקורות:

[1] Doug Cooper and Michael Clancy: Oh! Pascal!, Second Edition, W. W. Norton & Company, New York and London, 1985.

כיצד לנצח בשחמט

מאת אליהו לוי, חיפה

ברצוני להביא ולהוכיח משפט ידוע מתורת המשחקים בעל תוכן מפתיע - משחק השחמט (ומשחקים דומים לו) הוא בעיקרון "לא מעניין" במובן הבא: אחת משלוש האפשרויות הבאות מתקיימת: או יש ללבן איסטרטגיה (שאת ההוראות לה אפשר לתת אחת ולתמיד מראש), שאם ילך הלבן לפיה מובטח לו הניצחון, או יש לשחור איסטרטגיה שתבטיח את הניצחון לו, או יש לשניהם איסטרטגיות שיבטיחו לבעליהן ניצחון או תיקו, כך שאם יִדבקו שניהם באיסטרטגיות אלה התוצאה תהיה בהכרח תיקו.

עם זאת, אַל לחובבי השחמט להיבהל - למרות שאפשר להוכיח שקיימות איסטרטגיות כאלה, איש איננו יודע אותן, ואנו נסביר למה.

נתחיל מהגדרות:

קודם כל נניח שאם המשחק נמשך עד אינסוף, או - אם נקבע מספר מסעים מוגבל - אין נצחון לאף צד אחרי מספר מסעים זה, אזי התוצאה נחשבת לתיקו.

נניח שאנו נמצאים בְמצב כלשהו S של משחק שחמט. בשם <u>איסטרטגיה של הלבן החל ממצב זה</u> נקרא למערכת הוראות נתונה מראש הקובעת כיצד ינהג הלבן בכל מצב, בו תור הלבן לשחק, שייתכן בהמשך המשחק אחרי S, חוץ ממצב מַט או מצב שאין ללבן שום מצב חוקי (שבשניהם, כידוע, המשחק מסתיים). נאמר שאיסטרטגיה כזו <u>מבטיחה ניצחון ללבן</u> אם כל עוד הָחל מ S יִדבַק הלבן באיסטרטגיה זו - מובטח לו הניצחון, לא חשוב מה יעשה השחור. בצורה דומה מוגדר מתי <u>איסטרטגיה כזו מבטיחה ללבן ניצחון או תיקו</u>. לגבי השחור הגדרות דומות.

כעת נוכיח את טענתנו: נתבונן במצב הפתיחה של המשחק. אם ללבן יש איסטרטגיה החל ממצב הפתיחה המבטיחה לו נצחון - גמרנו. אם לא, נעניק לשחור איסטרטגיה שתבטיח לו ניצחון או תיקו בצורה הבאה:

(*) על השחור ללכת תמיד כך שהמצב שייוצר אחרי המסע של השחור לא יהיה מצב ממנו יש ללבן איסטרטגיה מנצחת (כלומר שמבטיחה ניצחון ללבן).

הקורא יכול לבדוק שאם אחרי מסע של השחור המשחק במצב (שנקרא לו S) בו אין ללבן איסטרטגיה מנצחת, אזי עבור כל מסע-נגד של הלבן יוכל השחור להגיב כך שעדיין לא תהיה ללבן איסטרטגיה מנצחת גם במצב שאחרי מסע השחור (כי אילו היה ללבן מסע שכל תגובה של השחור עליו תביא את הלבן לאיסטרטגיה מנצחת, היתה הבחירה במסע זה נותנת ללבן איסטרטגיה מנצחת גם במצב S). כיון שאנו מניחים שבמצב הפתיחה אין ללבן איסטרטגיה מנצחת, השחור יכול אכן לנהוג לפי (*). אם כך ינהג השחור, אין שום אפשרות שהלבן ינצח, כי ברור שמצב בו הלבן ניצח הוא באופן טריביאלי מצב ממנו יש ללבן איסטרטגיה מנצחת, ואת זאת, הרי, השחור מונע.

הוכחנו, איפוא, שמתקיימת אחת משתי אפשרויות: או יש ללבן איסטרטגיה שתבטיח לו ניצחון, או יש לשחור איסטרטגיה שתבטיח לו ניצחון או תיקו. מסיבה דומה או יש לשחור איסטרטגיה שתבטיח לו ניצחון, או יש ללבן איסטרטגיה שתבטיח לו ניצחון או תיקו, והטענה הוכחה (שימו לב שלא ייתכן שגם ללבן וגם לשחור יש איסטרטגיה שמבטיחה ניצחון!).

כעת קל לראות מדוע, למרות שיש לנו הוכחה לקיום איסטרטגיות כאלה, אין איש יכול להצביע על איסטרטגיה כזו ולהשתמש בה באופן מעשי: האיסטרטגיה (*) שהיצענו לשחור דורשת לדעת להכריע, עבור כל מצב S של המשחק, אם יש או אין ללבן איסטרטגיה מנצחת ממצב זה. בדיקה כזו דורשת את בדיקת כל האיסטרטגיות וההמשכים האפשריים של המשחק וכל עוד לא ימצא מישהו דרך גאונית לעשות זאת במעט חישובים, בדיקה כזו היא לגמרי לא מעשית.

לאמיתו של דבר, אנו הוכחנו שיש 3 אפשרויות (הלבן יכול לכפות ניצחון, השחור יכול לכפות ניצחון או שניהם יכולים לכפות תיקו), ועד כמה שידוע לי איש אינו יודע איזו אפשרות נכונה.

ולבסוף שתי הערות: קודם כל, ברור שלא היתה בהוכחתנו כל חשיבות לפרטי משחק השחמט ואותו דבר נכון לכל משחק בעל אותו אופי, למשל דמקה (הקורא מוזמן להגדיר באופן פורמלי את סוג המשחקים שלגביו ההוכחה תופסת). נוסף לכך, הראינו כאן דוגמא להוכחת קיום, המוכיחה שקיים לפחות עצם אחד בעל תכונה כלשהו אבל לא מראה כיצד לבנות עצם קונקרטי כזה. הוכחות חשובות ומפורסמות במתמטיקה הן הוכחות קיום כאלה, וכנגדן רבות גם הוכחות בניה, שבמצופה הן בדרך כלל יותר חשובות מבחינה מעשית.

תחרות הבעיות

את הפתרונות יש לשלוח למערכת עד 30.11.92

10 בעיות שניתנו למשתתפי החוג בטכניון בהדרכת בוריס ביגון - 1992

1. מצאו שני שברים - אחד עם מכנה 8 והשני עם מכנה 13 - כך שיהיו שונים זה מזה אבל ההפרש בין הגדול והקטן יהיה קטן ככל האפשר.

2. סכום המספרים בקבוצה מסויימת שווה ל- 1. האם ייתכן שסכום ריבועיהם קטן מ- 0.1 ?

3. האם קיים מצולע קמור בעל 1992 צלעות בו כל זוית היא בעלת מספר שלם של מעלות ?

4. במישור נתונות 4 נקודות שאינן נמצאות על ישר אחד. להוכיח שקיים משולש שאינו חד-זויות שקדקדיו הן שלוש מ- 4 נקודות אלה.

5. באלפבית של השבט מומבו-יומבו יש רק שתי אותיות - A ו- B. בשפת השבט יש משמעות לכל צירוף של "A" -ים ו "B" -ים, עם שני כללים: מותר להחליף בכל מקום במילה את השלישיה ABA בשלישיה BAB (למשל, BABABA מותר להפוך ל- BBABBA או ל- BABBAB); כמו-כן, מותר לזרוק מהמילה שתי אותיות זהות המופיעות ברצף (למשל AAAB מותר להפוך ל- AB). אם ניתן לקבל מילה מסוימת ממילה אחרת ע"י מספר פעולות כאלה, אזי משמעויות שתי המילים זהות.

האם איש השבט יכול לספור את:

א) האצבעות של ידו ?

ב) ימי השבוע ?

6. אמנון כתב על פאות קוביה את הספרות 1,2,3,4,5,6 . משה לא ראה איך אמנון עשה זאת, אבל הוא מעז לטעון כי:

א) יש לקוביה שתי פאות סמוכות שעליהן כתובות ספרות עוקבות.

ב) יש לפחות שני זוגות פאות כאלה.

האם משה צודק בשני המקרים ? למה ?

7. בכמה אופנים ניתן לרשום את המספר 1992 כהפרש הריבועים של שני מספרים טבעיים (= שלמים חיוביים) ?

8. בתחרות משתתפים 10 קופצים למים. כל שופט מצוות של שלושה מדרג את הקופצים לפי מקומות מ- 1 עד 10 לפי שיקול דעתו. הספורטאי עם הסכום הקטן ביותר של המקומות שהוא קיבל מוכרז מנצח. מהו הערך הגדול ביותר של הסכום הזה שיכול להיות למנצח (המנצח הוא יחיד).

9. האם אפשר לבנות 5 קרניים (= חצאי-ישר) במישור המתחילות באותה נקודה של המישור כך שבין הזויות שייוצרו תהיינה בדיוק 4 זויות חדות ? נחשבות לא רק זויות בין קרניים סמוכות אלא בין כל זוג קרניים שונות.

10. כדי לזגג 15 חלונות בעלי גדלים שונים וצורות שונות הכינו 15 זכוכיות לפי גודל וצורת החלונות. זגג מבולבל שאינו יודע שהזכוכיות מתאימות לחלונות, פועל באופן הבא:

הוא מגיע לחלון מסוים, מחפש בין הזכוכיות שהוא עוד לא השתמש בהן אחת שאיתה אפשר לזגג את החלון (כלומר, שהזכוכית מתאימה לחלון או שממנה אפשר לחתוך את החלק המתאים). אם אין זכוכית כזאת הוא עובר לחלון הבא, וכן הלאה עד שהוא עובר על כל החלונות.

מהו מספר החלונות הגדול ביותר שעלול להשאר ללא זכוכית ?

<u>שתי שאלות מתחרות פתרון בעיות שהופיעו בתחרות בעיות מתמטיות לתלמידים בארצות הברית:</u>

11. הוכח שמספר שלם ניתן לכתיבה כממוצע החשבוני של שני ריבועי שלמים אם ורק אם המספר ניתן לכתיבה כסכום של שני ריבועי שלמים.

12. עבור אילו ערכים של n ניתן לחלק את הקבוצה $\{1,2,\ldots,n\}$ לחמש תת-קבוצות זרות (= שאין לאף שתיים מהן איברים משותפים) כך שחמשת סכומי האיברים בכל אחת מחמש התת-קבוצות הם שוים ?

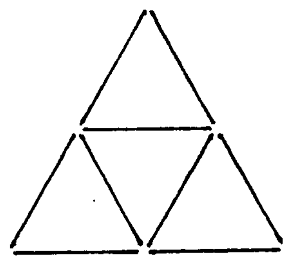
<u>פתרונות לתחרות הבעיות - גליון מס' 21</u>

1. א) כיצד תבנה מ-6 גפרורים 4 משולשים שווי צלעות באותו גודל בלי לקפל, לשבור ולהצליב את הגפרורים?

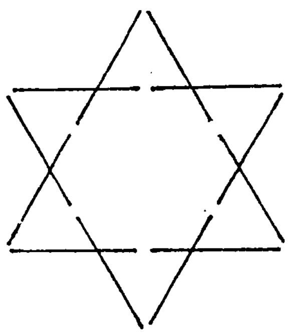
ב) כיצד תבנה מ-6 גפרורים 8 משולשים שווי צלעות בלי לפגוע בגפרורים?

<u>פתרון</u>:

א)



ב)



2. נתונה סידרה של n^2+1 מספרים שונים. הוכח: אפשר לבחור מהם $n+1$ מספרים (לאו דוקא עוקבים) שיהוו תת-סידרה מונוטונית עולה או יורדת.

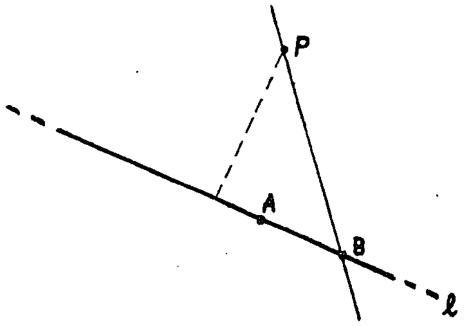
<u>פתרון</u>:

תהא הסידרה a_i , $1\le i\le n^2+1$. לכל i נסמן ב- $p(i)$ את מספר האיברים בתת-סידרה העולה הארוכה ביותר (לאו דוקא של איברים עוקבים) שמתחילה ב- a_i וב- $q(i)$ את מספר האיברים בתת-סידרה היורדת הארוכה ביותר שמתחילה ב- a_i . עבור $i<j$ מסויימים, אם $a_i<a_j$ אפשר לצרף את a_i לכל סידרה עולה שמתחילה ב- a_j ולכן $p(i) > p(j)$. מסיבה דומה אם $a_i>a_j$ אזי $q(i) > q(j)$. מתקבל, איפוא, שאם i ו j שונים אזי הזוגות $(p(i),q(i))$ ו $(p(j),q(j))$ בהכרח שונים. יש לנו לכן n^2+1 זוגות סדורים שונים של טבעיים ≥ 1. אחד מזוגות אלה חייב להכיל מספר גדול או שווה מ- $n+1$. קיים איפוא i כך ש $p(i) \ge n+1$ או $q(i) \ge n+1$.
(ראה גם מאמרו של ר. אהרוני: עקרון שובך היונים, אתגר-גליונות מתמטיקה מס' 1, אייר תשמ"ה - מאי 1985).

3. נתונה קבוצה סופית של n נקודות במישור, לא כולן על ישר אחד. הוכח כי יש ישר העובר בדיוק דרך שתיים מהן.

<u>פתרון</u>:

נתבונן בזוגות (ℓ,P) בהם P נקודה מהקבוצה ו-ℓ ישר העובר דרך לפחות שתי נקודות בקבוצה אבל לא דרך P. מספר הזוגות האלה סופי, וקיים לפחות זוג אחד כזה כי לא כל הנקודות על ישר אחד. לכן קיים זוג כזה בו המרחק בין P ו-ℓ קטן ביותר. אנו טוענים שב-ℓ יש בדיוק שתי נקודות מהקבוצה. אכן, אילו היו על ℓ יותר משתיים היו לפחות שתיים מהן באותו חצי הישר של ℓ הנוצר ע"י עקב האנך מ P, והיינו מקבלים מצב כמו בציור בו A ו-B שייכות לקבוצה ו-(PB,A) זוג מהסוג שדנו בו עם מרחק יותר קטן מאשר (ℓ,P).



4. "שלשה פיתגוראית" הם שלושה מספרים שלמים a, b, c המקיימים $a^2 + b^2 = c^2$, כמו למשל $3, 4, 5$ או $6, 8, 10$.

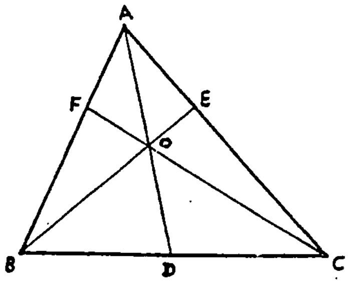
שלשות פיגוראיות ייחשבו לשונות אם הן אינן כפולות של אותה שלשה. למשל $12, 16, 20$ ו $9, 12, 15$ אינן שונות כי שתיהן כפולה של $3, 4, 5$, אך $5, 12, 13$ שונה מהן.

הוכח כי יש אינסוף שלשות פיתגוראיות שונות.

<u>פתרון</u>:

(a, b, c) שלשה פיתגוראית אם ורק אם הנקודה $(\frac{a}{c},\frac{b}{c})$ במישור נמצאת על מעגל היחידה $x^2+y^2 = 1$. שלשות הן שונות אם הן מגדירות נקודות שונות. כמובן, תתקבל שלשת שלמים רק מנקודה רציונלית, כלומר בעלת x ו-y רציונליים (שתמיד נוכל להביאם למכנה משותף). עלינו להוכיח, לכן, שיש על מעגל זה אינסוף נקודות רציונליות. אבל זה נובע מכך שאם $P(x_0,y_0)$ נקודה רציונלית על המעגל, אזי כל ישר $y = ax + b$ בעל מקדמים רציונליים העובר דרך P יחתוך את המעגל בנקודה רציונלית אחרת (חוץ מהמשיק, כמובן), כי שיעורי נקודות החיתוך מתקבלים ממשוואה ריבועית בעלת מקדמים רציונליים שאחד משרשיה רציונלי (וכידוע, סכום השרשים הוא אחד ממקדמי המשוואה).

5. (הוצעה ע"י אבי ב. סיגלר, נהריה):



במשולש ABC, הישרים AD, BE, CF נפגשים בנקודה O.

<u>הוכח</u>: הקטעים $\frac{AO\cdot OD}{AD}$, $\frac{BO\cdot OE}{BE}$, $\frac{CO\cdot OF}{CF}$ מקיימים את אי-שוויון המשולש.

(כלומר הממוצעים ההרמוניים של [AO,OD], [BO,OE], [CO,OF] מקיימים את אישוויון המשולש).

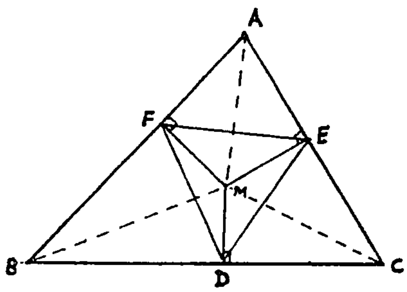
<u>פתרון</u>:

קודם כל, אנו טוענים שאם x, y, z זוויות בין 0 ו- π המקיימות $x+y+z = 2\pi$ אזי $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$ מקיימים את אישוויון המשולש. הדבר נובע מכך ש $\pi = (\pi-x)+(\pi-y)+(\pi-z)$ ולכן קיים משולש בעל הזוויות $\pi-x$, $\pi-y$, $\pi-z$ וצלעותיו יהיו פרופורציוניות ל $\sin(\pi-z) = \sin z$, $\sin(\pi-y) = \sin y$, $\sin(\pi-z) = \sin z$.
אנו ניקח $x = \sphericalangle BOC$, $y = \sphericalangle AOC$, $z = \sphericalangle AOB$. הטענה נובעת מכך ש-

$$\frac{AO\cdot OD}{AD} = \frac{AO\cdot S_{BOC}}{S_{ABC}} = \frac{AO\cdot BO\cdot CO}{2\ S_{ABC}}\sin x$$

וביטויים דומים עבור $\frac{BO\cdot OE}{BE}$ ו- $\frac{CO\cdot OF}{CE}$.

6. (הוצעה ע"י אבי ב. סיגלר, נהריה):



יהי ABC משולש. נתבונן בשלושת מעגלי אפולוניוס, שהם המקומות הגאומטריים של הנקודות שמרחקיהן משני קדקדים של המשולש נמצאים ביחס קבוע, השווה ליחס של מרחקי שני הקדקדים מהקדקד השלישי.

א) הוכח ששלושת המעגלים נפגשים בנקודה אחת M.

ב) יהיו D,E,F הטלי M על AB, AC, BC בהתאמה. הוכח: המשולש DEF שווה צלעות.

<u>פתרון</u>:

א) תהי M נקודת החיתוך של מעגל אפולוניוס המתאים לקדקדים A ו- B ושל מעגל אפולוניוס המתאים לקדקדים A ו- C . אז $MA/MB = CA/CB$, $MA/MC = BA/BC$ ומכאן $MB/MC = AB/AC$ כלומר M על המעגל השלישי.

ב) המרובע $AFME$ בר-חסימה במעגל שקוטרו AM . לכן $FE = AM \sin \hat{A}$ ובדרך דומה $FD = BM \sin \hat{B}$ ו- $DE = CM \sin \hat{C}$, אבל לפי הנתון M היא מפגש שלושת מעגלי אפולוניוס, לכן:

$$MB/MC = AB/AC = \sin \hat{C}/\sin \hat{B} \quad \Rightarrow \quad MB \sin \hat{B} = MC \sin \hat{C} \quad \Rightarrow \quad FD = DE$$

ובאותה דרך $DE = EF$.

<u>פתרונות לשאלות האולימפידה לנוער של מכון ויצמן, 1992</u>

(השאלון הובא בגליון מס' 22)

1. לפי משפט הממוצעים

$$\frac{19x + 92y}{111} \geq (x^{19}y^{92})^{\frac{1}{111}}$$

2. נניח שהיה פוליאדר כזה. קודם כל, לא יכולה להיות בו דופן בעלת $n \geq 4$ צלעות, כי אז היו בו לפחות $2n \geq 8$ מקצועות: n מקצועות הדופן ובנוסף לכך מכל קדקד של הדופן יוצא לפחות מקצוע אחד שאינו במישור הדופן ומקצועות אלה שיוצאים מקדקדים שונים חייבים להיות שונים. לכן כל הדפנות הן משולשים. נניח שיש d דפנות. נוכל לבטא את מספר המקצועות לפי d : לכל דופן יש 3 מקצועות וכל מקצוע נספר כך פעמיים, ולכן יש $3d/2$ מקצועות. יוצא איפוא $3d/2 = 7$ ומכאן $d = 14/3$ שאינו שלם.

3. יהיה $P = x_1x_2\dots x_n$.

א) עבור $n = 2m$ יהיה

$$P = x_1x_2\cdot x_3x_4\cdot\ldots\cdot x_{2m-1}x_{2m} =$$
$$= 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2m-1)$$

כאשר מאידך:

$$P = x_{2m}x_1\cdot x_2x_3\cdot x_4x_5\cdot\ldots\cdot x_{2m-2}x_{2m-1} =$$
$$= 2m\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2m-1)$$

ב) עבור $n = 2m+1$ נקבל

$$P = x_1x_2\cdot x_3x_4\cdot\ldots\cdot x_{2m-1}x_{2m}\cdot x_{2m+1} =$$
$$= [1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2m-1)]\cdot x_{2m+1}$$

ומאידך:

$$P = x_1\cdot x_2x_3\cdot x_4x_5\cdot\ldots\cdot x_{2m}x_{2m+1} =$$
$$= x_1\cdot[2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2m)]$$

ולכן:

$$\frac{x_1}{x_{2m+1}} \qquad \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2m-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2m)}$$

מאחר ש $x_1x_{2m+1} = 2m+1$ נוכל לחלץ את x_1 ומכאן גם את $x_2, x_3, \dots, x_{2m+1}$.

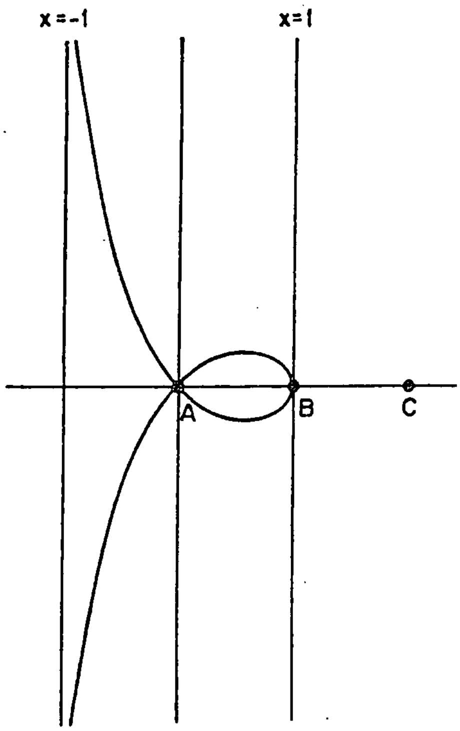
4. נוכל להקיף את כל הקבוצה במעגל ולמצוא לו משיק שאינו מקביל לאף אחד מהקטעים המחברים זוגות של הנקודות (מאחר שמספר הזוגות האלה סופי). אם נזיז עכשיו את המשיק במקביל לעצמו נוכל לבנות קווים מקבילים שיפרידו בין קבוצות של 6 או 4 נקודות כנדרש.

5. בדרך השלילה. נכתוב $P = xyz$. אם הטענה אינה נכונה יהיה $1 > P$
ומאידך גם $x^3 > P$ ולכן $x > P^{1/3}$, ובדומה לכך $y > P^{1/4}$, $z > P^{1/5}$
ולכן

$$P = xyz > P^{1/3+1/4+1/5}$$

יוצא כי $P^{13/60} > 1$ ולכן $P > 1$. סתירה.

6. יהיו (x,y) שיעורי P, אזי



$\tan(\sphericalangle PAC) = y/x$ ולכן

$\tan(2\sphericalangle PAC) = \frac{2xy}{x^2-y^2}$. מאידך

$\tan(\sphericalangle PBC) = \frac{y}{x-1}$ ולכן

$\frac{x^2-y^2}{2xy} + \frac{y}{x-1} = 0$ כלומר

$$y = \pm x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

מכאן ש y יהיה ממשי אך ורק
עבור $-1<x\le 1$ והעקומה תהיה
סימטרית ביחס לציר $0x$.
האסימפטוטה היחידה היא
. $x = -1$

7. נניח ששתי הסדרות עולות (אחרת נהפוך את הסדר בשתיהן). ההפרשים
$a_{r+1}-a_r$ כולם שווים, בעוד שההפרשים $b_{r+1}-b_r$ עולים (באותו יחס
בו עולים אברי הסדרה b_r עצמה). מכאן שאם נסמן במערכת צירים את
הנקודות (r,a_r) וכן (r,b_r) יהיו הראשונות על קו ישר בעוד
שהאחרונות יהוו "קשת" קמורה כלפי מטה עם אותם קצוות $(1,a_1) = (1,b_1)$
ו $(n,a_n) = (n,b_n)$. מכאן שהנקודות האחרונות הן למטה מהקו הישר,
כלומר $a_r \ge b_r$ ומכאן הטענה.

נוכל להוכיח זאת גם באופן אלגברי: מכך שההפרשים $b_{r+1}-b_r$ עולים
נובע שממוצע k-1 הראשונים, השווה ל $(b_k-b_1)/(k-1)$, קטן או שווה
מהממוצע של כולם, השווה ל- $(b_n-b_1)/(n-1)$. המספר האחרון שווה
לפי הנתון ל- $(a_n-a_1)/(n-1)$ כלומר להפרש הסדרה החשבונית,
שהוא גם $(a_k-a_1)/(k-1)$. מכאן ש $b_k-b_1 \le a_k-a_1$ ולכן
. $b_k \le a_k$, כי $b_1 = a_1$.

פתרונות לשאלות האולימפידה ע"ש פרופ' י. גרוסמן, 1992

(השאלון הובא בגליון מס' 22)

1. נסמן ב T את שטח המשולש ΔABC. המשולשים ΔGHO , ΔEOF ו ΔOML דומים למשולש ΔABC כי הישרים HF, ME ו GL מקבילים לצלעות המשולש ΔABC. לכן (ראה ציור):

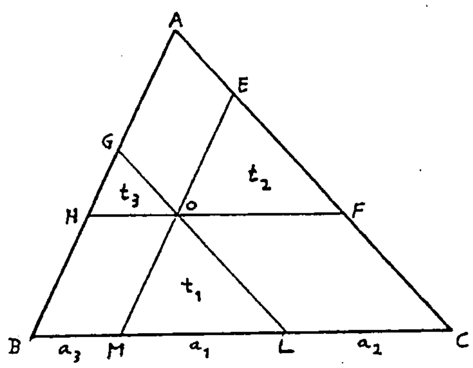
$$t_1/T = (a_1/a)^2 \qquad t_2/T = (a_2/a)^2 \qquad t_3/T = (a_3/a)^2$$

כאשר $a_3=|HO|=|BM|$, $a_2=|OF|=|LC|$, $a_1=|ML|$, $a=|BC|$;

מכאן ש

$$\frac{\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}}{\sqrt{T}} = \frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{t_2}}{\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{t_3}}{\sqrt{T}} = \frac{a_1}{a} + \frac{a_2}{a} + \frac{a_3}{a} = 1$$

ולבסוף $T = (\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3})^2$.



2. לכל מספר ישן abcde נתאים מספר חדש $W = abcdef$ כך שהסכום $2a+b+2c+d+2e+f$ (שיסומן ב $G(W)$) יהיה כפולה שלמה של 10. קל לראות שאם נחליף שתי ספרות סמוכות ושונות במספר W נקבל מספר W' כך שהערך המוחלט של $G(W')-G(W)$ יהיה שווה לערך המוחלט של הפרש שתי הספרות שהוחלפו (אם נחליף ספרה a ב b יהיה $|G(W')-G(W)| = |a-b|$).
לכן $G(W')$ לא יכול להיות כפולה שלמה של 10, כלומר W' איננו אחד המספרים החדשים.

3. קודם כל $x_i \neq 0$, $i=1,2,3,4$, כי אילו היה x_i שווה ל 0 היה נובע מהמשוואות ששאר הנעלמים שווים ל 2, ולכן מכפלתם 8, בעוד שמהמשוואה ה i נובע שמכפלתם 2.

נסמן $M = x_1x_2x_3x_4$. לפי האמור למעלה $M \neq 0$. מארבע המשוואות נובע

$$M = x_1(2-x_1) = x_2(2-x_2) = x_3(2-x_3) = x_4(2-x_4)$$

מכאן ש x_1, x_2, x_3, x_4 כולם פתרונות של המשוואה הריבועית:

(*) $z^2 - 2z + M = 0$ כלומר $z(2-z) = M$

ולכן הקבוצה $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ בת 2 איברים לכל היותר. יש, איפוא שלש אפשרויות:

א. כל ה x_i ים שווים לאותו ערך x . אז x צריך לקיים $x^3+x-2 = 0$. היות ו

$$x^3+x-2 = x(x^2-1) + 2x-2 = (x-1)(x^2+x+2) = (x-1)((x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{7}{8})$$

הפתרון הממשי היחיד הוא $x=1$.

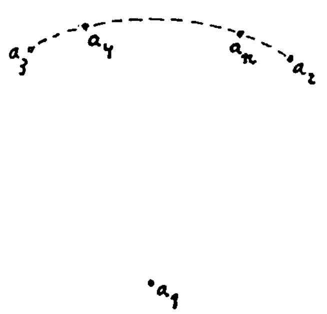
ב. שלושה מה x_i שווים, ונסמן את ערכם ב x , והרביעי ערכו y , $y \neq x$. לפי הגדרת M , $M = x^3y$. מצד שני x ו y הם 2 פתרונות המשוואה (*) ולכן $xy = M$, $x+y = 2$. היות ו $x,y \neq 0$ מתקבל $x^2 = 1$ ומכך ש $x \neq y$, $x+y = 2$ יוצא $x \neq 1$ ולכן $x=-1$, $y=3$. זה אכן פתרון.

ג. שניים מה x_i שווים ל x ושניים ל y , $x \neq y$. לפי הגדרת M $M = x^2y^2$ ומצד שני x ו y הם פתרונות (*) ומכאן $M = xy$. לכן $M^2 = M$ וכיוון ש $M \neq 0$, קבלנו $M=1$ ואז ל (*) יש רק הפתרון $z=1$ בניגוד להנחה $y \neq x$. אין, לכן, פתרונות מסוג ג.

סיכום: הפתרונות הם: I) כל הנעלמים שווים 1

II) שלשה נעלמים ערכם 1- והרביעי ערכו 3 .

4. נוכיח ש $g(n) = n$ עבור $n \geq 3$ (ברור כי $1=g(1)=g(2)$):

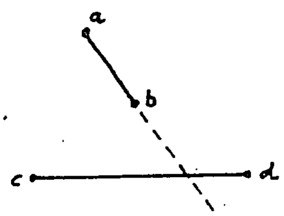


א. $g(n) \geq n$: יהיו a_1,a_2,a_3 קודקודי משולש שוה צלעות ויהיו $a_4,a_5,\dots,a_n$ נקודות על הקשת הקטנה מ a_3 ל a_2 של מעגל שעובר דרכן ומרכזו ב a_1 , כבציור. אז הקוטר מתקבל ב n הזוגות הבאים:

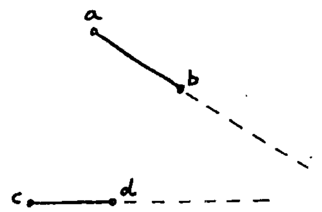
$$a_2a_3,\ a_1a_2,\ a_1a_3,\ \dots,\ a_1a_n$$

ב. $g(n) \le n$: נניח שהיה $g(n) > n$, כלומר היתה קיימת קבוצת נקודות במישור $A = \{a_1,...,a_n\}$ כך ש $f(A) > n$. בקבוצה זו, נקרא לנקודות $a_1,...,a_n$ צמתים וכל קטע a_ia_j שארכו שווה לקוטר ייקרא מקצוע. את אורך קטע xy נסמן ב $\overline{xy}$.

נוכיח בדרך השלילה שאין שני מקצועות ab ו cd שאינם נחתכים. ואכן, אילו היו מקצועות כאלה, היו שתי אפשרויות: I) הישרים של ab ו cd נחתכים, ונקודת החיתוך היא באחד הקטעים, נניח cd (ראה ציור)
II) הישרים של ab ו cd מקבילים או נחתכים בנקודה שאינה על אף אחד מהקטעים (ראה ציור)



I

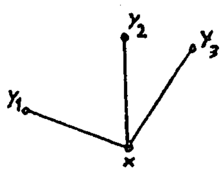


II

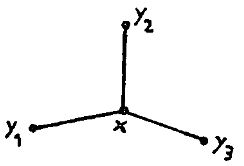
במקרה I) $\overline{ac} > \overline{ab}$ או $\overline{ad} > \overline{ab}$ בסתירה לכך ש ab מקצוע.

במקרה II) במרובע abcd סכום האלכסונים גדול מסכום שתי צלעות נגדיות (זו מסקנה מאי שוויון המשולש) בניגוד לכך ש ab ו cd מקצועות.

קבלנו, איפוא, שכל שני מקצועות נחתכים. כעת, נתבונן בצומת x ובכל המקצועות היוצאים מ x . נראה את x כמרכז של שעון. ברור שיכול להיות לכל היותר מקצוע אחד שיוצא מ x כך שאם נסובב את השעון כך שמקצוע זה יורה על שעה 12 יורו שאר המקצועות על שעות בין 6 ו 12 (יהיו כולם בצד שמאל - בכך נכללת גם האפשרות שאין בכלל מקצועות אחרים). אם יש מקצוע כזה, נצבע אותו באדום. (בציור הבא יוצאים מצומת x שלושה מקצועות. במצב ג המקצוע xy_3 נצבע באדום. במצב ד לא גרם הצומת x לצביעת אף מקצוע).



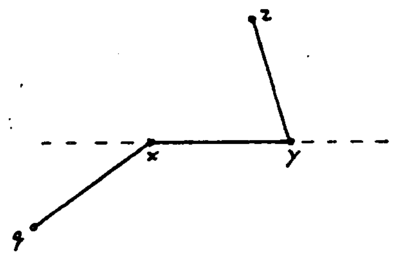
ג



ד

הואיל ויש n צמתים, נצבעו לכל היותר n מקצועות, והיות ומספר כל המקצועות הוא $f(A)$ הגדול מ n , יש לפחות מקצוע אחד xy שלא נצבע, לא בשל הצומת x ולא בשל הצומת y . פירוש הדבר שמ x ומ y

יוצאים מקצועות אחרים, שהם בשני צדדים שונים של הישר של xy (ראה ציור) ולכן אינם נחתכים, בסתירה למה שמצאנו קודם, מש"ל.



5. למה (משפט עזר): אם $a-b>1$ אזי $\binom{a}{2} + \binom{b}{2} > \binom{a-1}{2} + \binom{b+1}{2}$

הוכחה: יש להוכיח $a(a-1) + b(b-1) > (a-1)(a-2) + (b+1)b$
ואחרי פישוט יוצא $a-1 > b$ שהוא הנתון.

כדי לפתור את השאלה, נשים לב שעבור מכפלת שלמים $\prod x_i$ החזקה של מספר ראשוני p בפירוק המכפלה לראשוניים שווה ל:

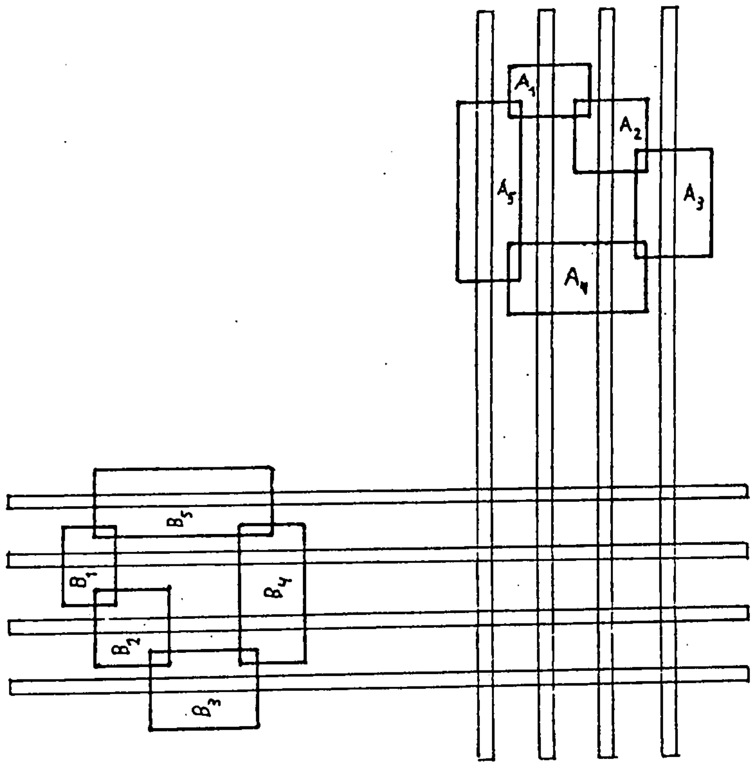
(מספר הגורמים המתחלקים ל p) + (מספר הגורמים המתחלקים ל p^2) + (מספר הגורמים המתחלקים ל p^3) + ...

(בדוק זאת). לכן להוכחת טענת השאלה די להוכיח:

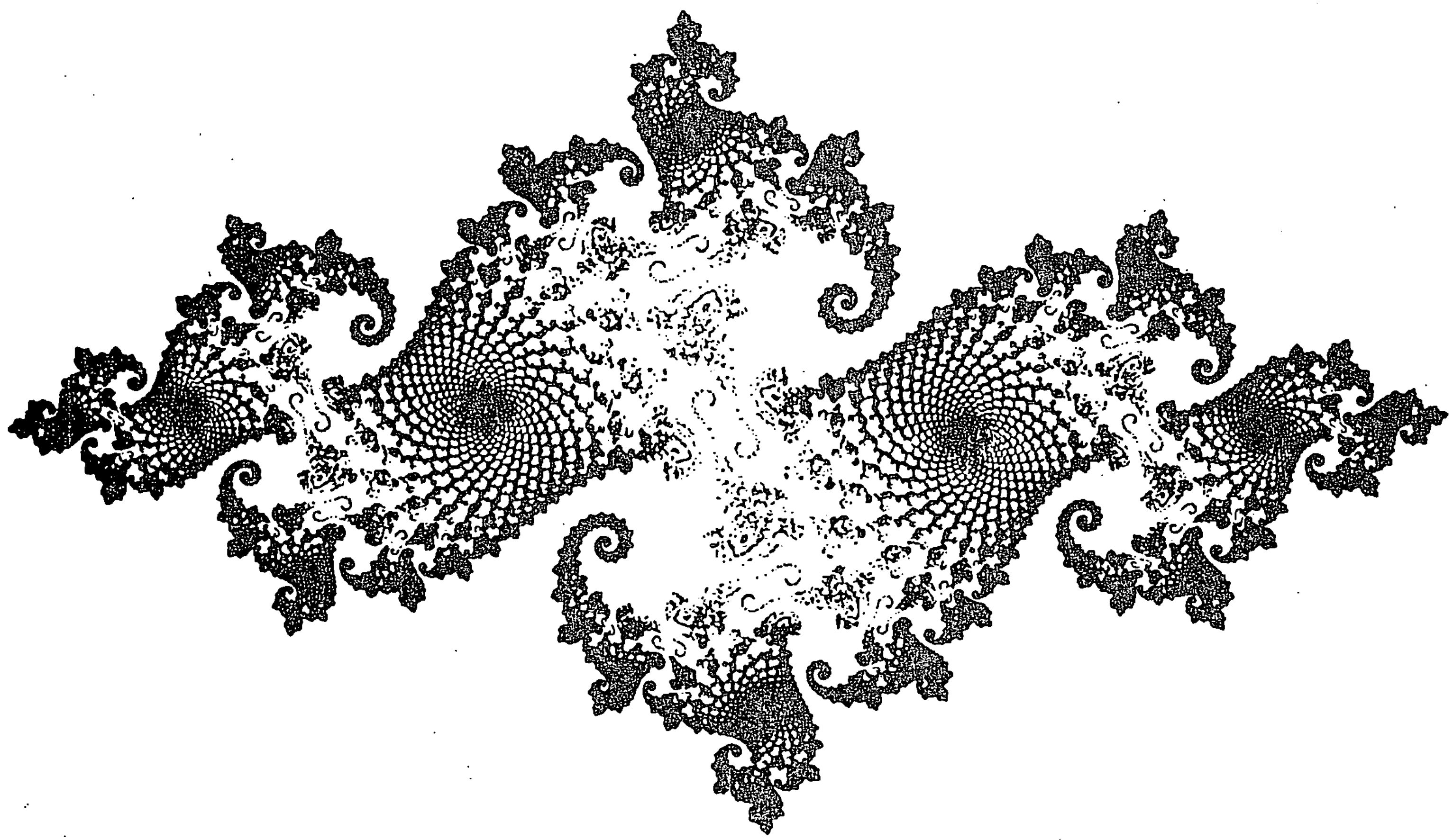
טענה: לכל מספר טבעי k מספר הזוגות i,j עבורם $k \mid a_i-a_j$ (סימון זה פירושו: k מחלק את a_i-a_j) גדול או שווה ממספר הזוגות i,j עבורם $k \mid i-j$.

הוכחה: נסמן ב n_t את מספר ה i -ים כך ש $a_i \equiv t \pmod k$ $(0 \le t < k)$.
וב m_t את מספר ה i -ים כך ש $i \equiv t \pmod k$. המספר הראשון בטענה הוא $N = \sum \binom{n_i}{2}$ ואילו המספר השני הוא $M = \sum \binom{m_i}{2}$. למספרים $1,2,\dots,n$ יש ה"יתרון" על המספרים $a_1,a_2,\dots,a_n$ בכך שהם מפולגים בין השאריות מודולו k במידה האחידה ביותר האפשרית: מתקיים $|m_s-m_t| \le 1$.
לכן אפשר להגיע מחלוקה של קבוצה של n אברים לקבוצות בנות $n_0,n_1,\dots,n_{k-1}$ אברים לחלוקה לקבוצות בנות $m_0,m_1,\dots,m_{k-1}$ אברים ע"י סדרת פעולות "השוואה" בהן לוקחים איבר מקבוצה בת a אברים ומעבירים אותו לקבוצה בת b אברים, כאשר $a-b > 1$. לפי הלמה, כל פעולה כזו תקטין את $\sum \binom{n_i}{2}$. מכאן $N \ge M$, מש"ל.

6. נתבונן במערכת של 18 מלבנים כבציור. נראה שזו משפחה קבילה.



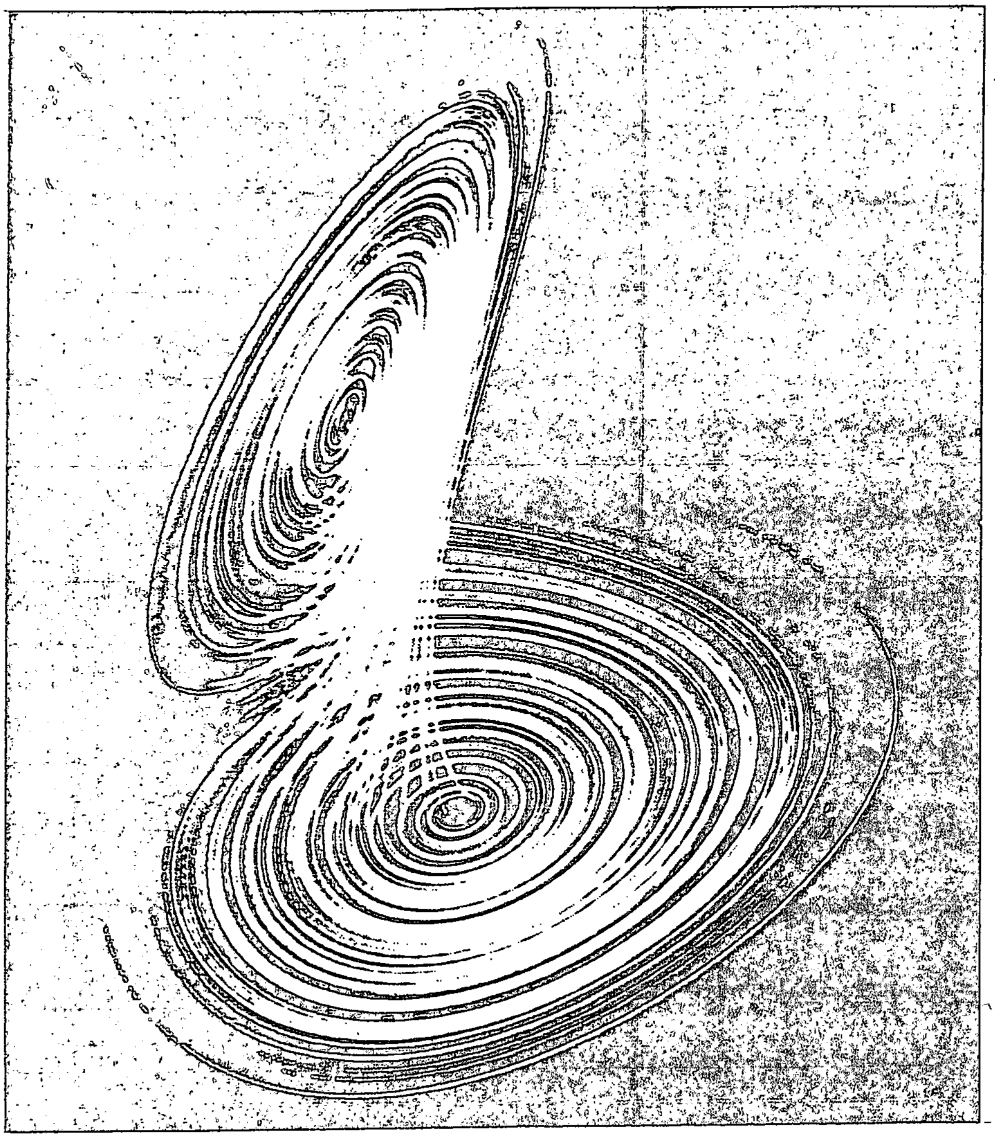
נניח שניתן היה לצבוע את המלבנים בשלשה צבעים 1, 2 ו 3.
הואיל וכל מלבן "רזה" אנכי חותך כל מלבן "רזה" אפקי, קבוצת הצבעים של המלבנים הרזים האנכיים זרה לקבוצת הצבעים של המלבנים הרזים האפקיים, ומכאן שלפחות אחת מקבוצות אלו בת איבר יחיד.
נוכל, לכן, להניח בלי הגבלת הכלליות שכל המלבנים הרזים האנכיים נצבעו בצבע 1. כל מלבן מ A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 חותך אחד המלבנים הרזים האנכיים, ולכן לחמשה מלבנים אלה נשארו רק הצבעים 2 ו 3. כעת, אם נניח למשל ש A_1 נצבע בצבע 2, ייצבע A_2 בצבע 3, A_3 בצבע 2, A_4 בצבע 3, A_5 בצבע 2 ועכשיו A_1 בצבע 3 - סתירה.



קבוצת Julia עבור הפונקציה הקומפלכסית $f(z) = z^2+(-0.74543+0.11301i)$

(מתוך:

(H.O.Peitgen & P.H.Richter: The Beauty of Fractals, Springer-Verlag 1986



האטרקטור המוזר (strange attractor) של E. Lorenz

(מתוך:

(H.O.Peitgen & P.H.Richter: The Beauty of Fractals, Springer-Verlag 1986