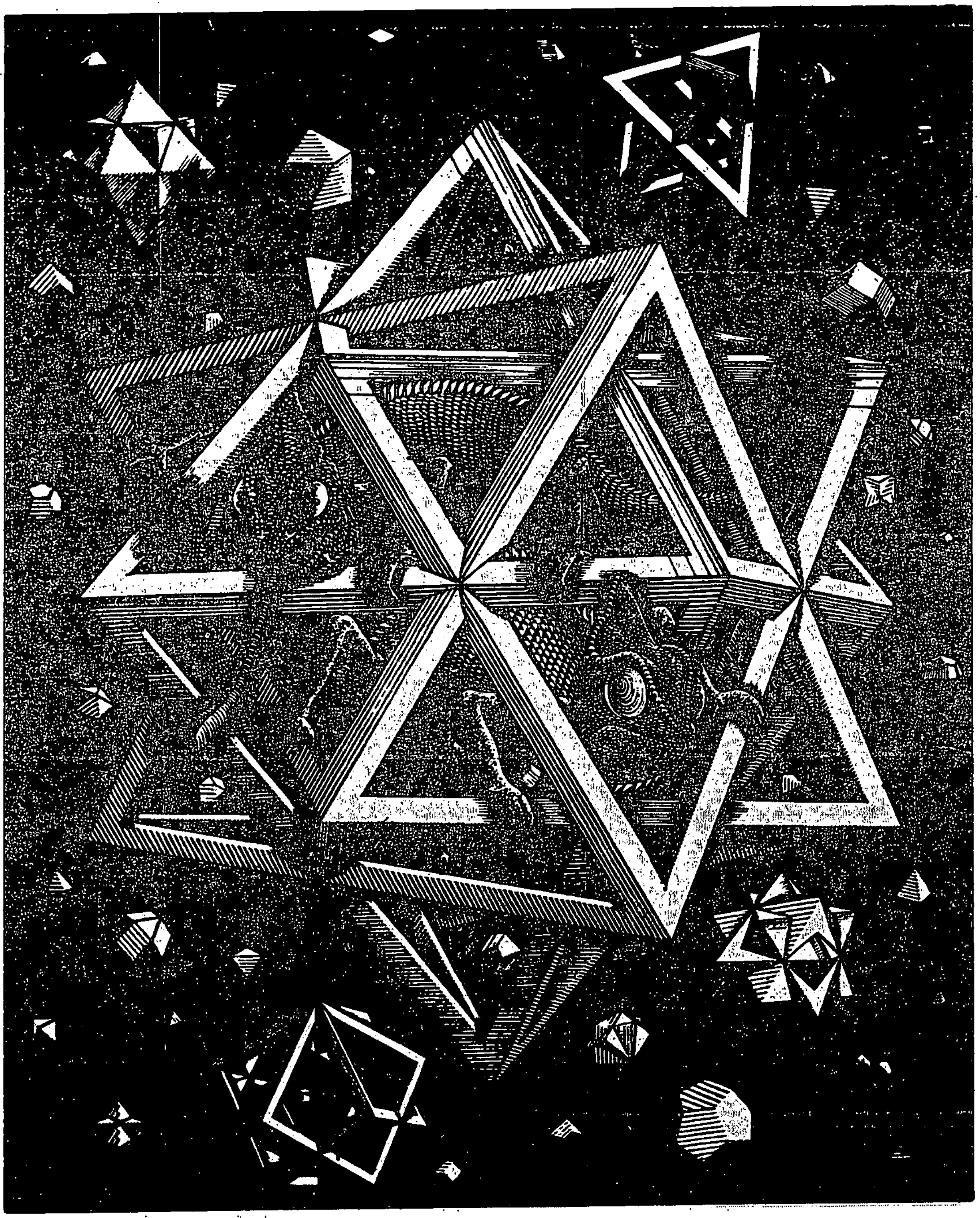
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס' 15 כסלו תש"ן - דצמבר 1989



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון ויצמן
רחובות

תוכן העניינים | עמוד

* * * * * * * * * *

אתגר - גליונות מתמטיקה

מוצא לאור ע"י הפקולטות למתמטיקה בטכניון ובמכון ויצמן.

המערכת: פרופ' א. ברמן, הפקולטה למתמטיקה, הטכניון.
ד"ר צ. הראל, הפקולטה למתמטיקה, הטכניון.
פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שימושית, מכון ויצמן.

מען המערכת: הפקולטה למתמטיקה, הטכניון, מכון טכנולוגי לישראל,
חיפה 32000, טל. 294272 (04)

דבר המערכת

בברית המועצות מתקיימת כבר מספר שנים תחרות מתמטית בין-עירונית בין תלמידי בתי הספר.

מארגני התחרות פנו למערכת "אתגר" והזמינו ערים מישראל להצטרף לתחרות.

אנו מפרסמים כאן את שאלון התחרות שהתקיימה באוקטובר ומזמינים את הקוראים לנסות כוחם ולשלוח את פתרונותיהם למערכת. הפותרים יוזמנו להשתתף בתחרות הבאה שתתקיים בחודש מרץ.

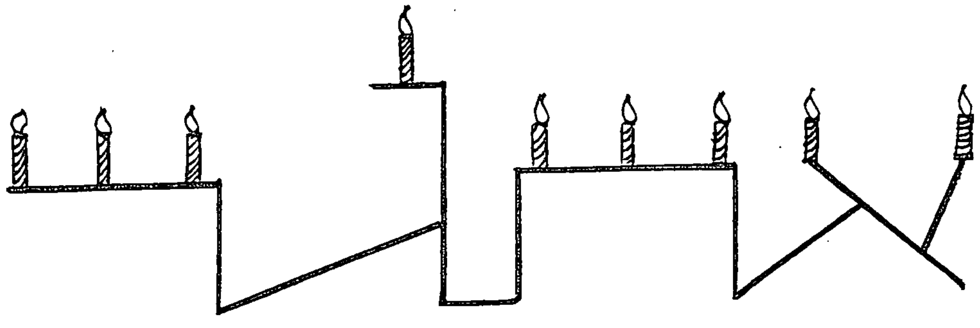
הקוראים מתבקשים לשלוח פתרונות של שאלות האולימפיאדה הבינלאומית לנוער שהתקיימה הקיץ בגרמניה. האולימפיאדה הבאה תתקיים ביולי 1990 בסין, והפותרים את שאלות תחרות הערים ואת שאלות האולימפיאדה, יוזמנו לסגל המתאמן לקראתה.

אם באולימפיאדות עסקינן, נציין גם את פתרונות שאלות התחרות ע"ש גרוסמן. נשמח לפרסם פתרונות אחרים.

בגלל הבעיות הרבות המוצגות בחוברת, לא פרסמנו בעיות חדשות בתחרות הבעיות. נחדש אותה בגליון הבא.

המאמרים בחוברת עוסקים בשני נושאים: שמוש בתורת המטריצות לפתרון חידות בתורת הגרפים ובניות בעזרת סרגל. המאמר הראשון דורש חומר (מועט) שאינו נלמד ברוב בתי-הספר. חומר זה מתואר במאמר בצורה שמאפשרת את קריאתו.

אנו מקווים שהעתון יגיע אליכם לקראת חופש החנוכה ומאחלים לכם חג חנוכה שמח.

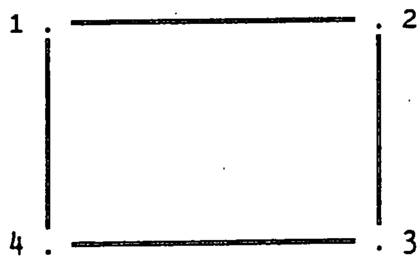


גרפים, נורות ומטריצות

פרופ' אבי ברמן, הטכניון

המאמר שלפנינו מבוסס על הרצאה שנתנה במועדון המתמטי בטכניון. בהרצאה דנו בבעיות העוסקות בנורות הממוקמות על קדקדים של גרפים. הכוונה **בגרף** היא למספר סופי של קדקדים כאשר חלק מזוגות הקדקדים מחוברים בקו. שני קדקדים המחוברים בקו נקראים **שכנים**.

דוגמא 1



דוגמא 2

בדוגמא הראשונה מתואר גרף בעל שני קדקדים המחוברים ביניהם. בדוגמא השניה מתואר גרף בן ארבעה קדקדים, כאשר קדקד מס' 1 אינו שכן של קדקד מס' 3, קדקד מס' 2 אינו שכן של קדקד מס' 4, בעוד ששאר זוגות הקדקדים מחוברים בקוים.

בעיה ראשונה

בכל קדקד של גרף יש מתג ונורה. לחיצה על מתג משנה את מצב הנורה שלידו (מדליקה אותה אם היא כבויה או להיפך) ואת מצב הנורות בקדקדים השכנים.

במצב ההתחלתי כל הנורות כבויות. להוכיח שניתן להגיע למצב בו כל הנורות דולקות.

בדוגמא 1, לחיצה על כל אחד משני המתגים תדליק את כל הנורות.
בדוגמא 2, יש צורך ללחוץ על כל המתגים כדי להדליק את כל הנורות.

הבעיה הבאה דומה לבעיה הידועה כ"משחק החיים".

בעיה שניה

נתון גרף בעל n קדקדים. בכל קדקד נמצאת נורה. מצב הנורות משתנה מידי יחידת זמן לפי מצב הנורות בקדקדים השכנים: אם בזמן t יש ליד נורה יותר נורות דולקות אז בזמן t+1 היא תדלק. אם בזמן t יש ליד נורה יותר נורות כבויות, אז בזמן t+1 היא תהיה כבויה. אם מספר הנורות השכנות הדולקות שווה למספר הנורות השכנות הכבויות, מצב הנורה אינו משתנה.

להוכיח שלאחר זמן מה מצב הנורות בזמן t+2 שווה למצבן בזמן t.

נעיר שאי אפשר לצפות לכך שמצב הנורות יהיה קבוע החל מזמן מסוים, כלומר מצבן בזמן t+1 יהיה כמצבן בזמן t. אם למשל בדוגמא 1 נורה אחת תדלוק והנורה השניה תהיה כבויה אז ברור שהנורות תדלקנה ותכבנה לסירוגין.

הבעיות הוצגו במועדון המתמטי כדי להדגים שמוש במושגים יסודיים מתורת המטריצות. נתאר מושגים אלה עכשיו, על רגל אחת, ואז נחזור ונראה כיצד ניתן לפתור בעזרתם את הבעיות. נשמח מאד לפרסם בגליונות הבאים פתרונות של הקוראים שלא יהיו מבוססים על השימוש במטריצות.

מושגי יסוד בתורת המטריצות

מטריצה ממשית A מסדר mxn היא קבוצה של m x n מספרים ממשיים המסודרים ב-m שורות ו-n עמודות, האיבר בשורה ה-i ובעמודה ה-j סומן ב-a_{ij}.

דוגמא 3

$$A = \begin{vmatrix} 1/2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1/2 \end{vmatrix}$$

היא מטריצה ממשית מסדר 4 x 4.

כידוע, עבור כל שלושה מספרים ממשיים x,y,z קיים:

1. החיבור הוא קומוטטיבי: $x + y = y + x$

2. החיבור הוא אסוציאטיבי: $x + (y + z) = (x + y) + z$

3. קיים מספר יחיד 0, כך ש: $x + 0 = x$

4. קיים מספר יחיד, $-x$, כך ש: $x + (-x) = 0$

5. הכפל הוא קומוטטיבי: $x y = y x$

6. הכפל הוא אסוציאטיבי: $x (y z) = (x y) z$

7. קיים מספר יחיד השונה מ-0, 1, כך ש: $x 1 = x$

8. החיבור והכפל קשורים ע"י דסטריבוטיביות:

$$x (y + z) = x y + x z$$

כמו כן

9. לכל $w \neq 0$ קיים מספר יחיד, w^{-1}, כך ש: $w w^{-1} = 1$

תשע תכונות אלו משמשות כאכסיומות בהגדרת שדה.

שדה היא קבוצה F בת לפחות 2 איברים שבה מוגדרות שתי פעולות שתקראנה חבור וכפל.

פעולת החיבור מתאימה לכל $x,y \in F$ איבר $x+y \in F$ ופעולת הכפל מתאימה לכל $x,y \in F$ איבר $xy \in F$, כך שמתקיימות 9 התכונות הרשומות למעלה.

דוגמאות של שדות, בנוסף לקבוצת המספרים הממשיים, הן קבוצת המספרים המרוכבים וקבוצת המספרים הרציונליים. בפתרון הבעיה הראשונה נתייחס לשדה הבא שנסמנו ב-B.

Z_p

p ראשוני

B מורכב משני מספרים 0, 1 (כלומר, הוא השדה הקטן ביותר). פעולות החשבון ב-B מוגדרות ע"י הטבלאות הבאות:

.	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1
0	0	1
1	1	0

הקוראים מתבקשים לבדוק ש-B אמנם מקיים את 9 האכסיומות שבהגדרת שדה. ההגדרה של מטריצה ממשית בה התחלנו היא מקרה פרטי של ההגדרה הבאה.

מטריצה מסדר m x n מעל שדה F היא קבוצה של m x n מספרים מהשדה F המסודרים ב-m שורות ו-n עמודות.

נסמן ב-F^{mxn} את קבוצת המטריצות מסדר mxn מעל השדה F. (נסמן ב-R את שדה המספרים הממשיים ולפיכך ב-R^{mxn} את קבוצת המטריצות הממשיות מסדר mxn).
נסמן גם $F^m=F^{mx1}$ (קבוצת העמודות מסדר m מעל F).

כפל מטריצות מוגדר בין מטריצה ב- F^{mxn} ומטריצה ב-F^{nxp} בצורה הבאה.

אם $A\in F^{mxn}$ ו-$B\in F^{nxp}$ אז $C=AB\in F^{mxp}$ כאשר:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}$$

דוגמא מס' 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix}$$

כאשר

$c_1=1\times1+2\times(-1)+3\times0 = -1$

ו-

$c_2=-1\times1+0\times(-1)+1\times0 = -1$

מערכת של m **משוואות ליניאריות** מעל השדה F היא מערכת מהצורה

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

כאשר

$$b_i, a_{ij} \in F$$

$$i=1,\dots m; j=1,\dots,n$$

$AB-BA=I$

$x_1, \dots, x_n$ נעלמים.

בעזרת המושג של כפל מטריצות, ניתן לרשום מערכת כזו בצורה $A\,x = b$, כאשר:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \qquad x = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{vmatrix}$$

סימון נוסף בו נשתמש הוא A^T:

אם $A \in F^{mxn}$ אז $B = A^T \in F^{nxm}$, היא המטריצה המתקבלת מ-A ע"י החלפת השורות לעמודות, כלומר $b_{ij} = a_{ji}$.

דוגמא מס' 5

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

אם $A^T=A$ נאמר ש-A היא **סימטרית.**

לפתרון הבעיה הראשונה נשתמש במשפט הבא:

משפט הפתירות

למערכת המשוואות $Ax = b$

כאשר $A \in F^{mxn}, \quad b \in F^m$

יש פתרון $x \in F^n$

אם ורק אם עבור כל $y \in F^m$ מתקיים

$$A^T y = 0 \longrightarrow b^T y = 0$$

נחזור עכשיו לבעיות.

פתרון הבעיה הראשונה

לכל גרף G בעל n קדקדים $1,\ldots,n$ נתאים מטריצה $A \in B^{\overset{n}{\cancel{m}}xn}$ שתוגדר בצורה הבאה:

$a_{ii} = 1 \quad ; \quad i = 1,\ldots,n$

אם i ו-j שכנים $a_{ij} = 1$

אם i ו-j אינם שכנים $a_{ij} = 0$

המטריצה המתאימה לגרף של דוגמא מס' 1 היא

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

בעוד שהמטריצה המתאימה לגרף של דוגמא מס' 2 היא

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

כל מתג מתאים לעמודה במטריצה וכדי להראות שניתן להדליק את כל הנורות יש להראות שיש מספר עמודות שבכל שורה במטריצה הבנויה מהן מספר ה-1-ים הוא אי-זוגי. זה המצב כאשר בוחרים את אחת העמודות ב-A_1 וכאשר בוחרים את כל העמודות ב-A_2.

נסמן ב-e מטריצה בת עמודה אחת שכל איבריה שוים ל-1. אזי הטענה אותה אנו רוצים להוכיח היא שלמערכת המשוואות $Ax = e$ יש פתרון מעל B.

לפי משפט הפתירות דבר זה שקול לכך שמעל B

$$A^T y = 0 \longrightarrow e^T y = 0$$

או

$$Ay = 0 \longrightarrow e^T y = 0$$

שהרי A היא סימטרית.

אם הטענה אינה נכונה אז יש $y \in B^n$, כש-n הוא מספר הקדקדים בגרף, כך ש:

$$Ay = 0 \qquad (1)$$

אבל

$$e^T y = 1 \qquad (2)$$

המשמעות של (2) היא שמספר האיברים השוים ל-1 ב-y הוא אי-זוגי אבל זה אומר לפי (1) שיש ב-A מספר אי-זוגי של עמודות כך שבכל שורה במטריצה הבנויה מהן מספר ה-1-ים הוא זוגי. דבר זה לא ייתכן, כי נסתכל על המטריצה הבנויה על עמודות אלה ועל השורות המתאימות (השורות בעלות אותם אינדקסים). מטריצה זו היא סימטרית מסדר אי-זוגי, לכן מספר האיברים a_{ij}, $i \neq j$, השוים ל-1 הוא זוגי בעוד שמספר האיברים a_{ii}, השוים ל-1 הוא איזוגי ולכן לא ייתכן שבכל שורה יש מספר זוגי של איברים השוים ל-1.

פתרון הבעיה השניה.

עכשיו נתאים לכל גרף בעל קדקדים n מטריצה $A \in R^{n \times n}$ שתוגדר ע"י

$a_{ii} = 1/2 \quad , \quad i=1...,n$

$a_{ij} = 1$ אם i ו- j שכנים

$a_{ij} = 0$ אם i ו- j אינם שכנים

נשים לב שהמטריצה המתאימה לגרף בדוגמא 2 היא המטריצה בדוגמא 3.

נסמן ב- $x_i(t)$ את מצב הנורה ב-i בזמן t, כאשר:

אם הנורה ה-i דולקת בזמן t , $x_i(t)=1$,

אם הנורה ה-i כבויה בזמן t, $x_i(t)=-1$.

נסמן

$$x(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{vmatrix}$$

עלינו להראות שקיים T כך שעבור $t > T$

$x(t+2) = x(t)$

נסמן ב-$f(t)$ את המספר $x(t+1)^T A\ x(t)$

(זו תוצאה של מכפלת 3 מטריצות מסדרים nx1, nxn, 1xn (משמאל לימין) ולכן היא מטריצה מסדר 1x1 כלומר מספר).

סימני האיברים ב-$Ax(t)$ מתאימים לסימני האיברים המתאימים ב-$x(t+1)$ ולכן:

$$f(t) = \max y^T A\ x(t)$$

כאשר המכסימום מחושב על כל הוקטורים y שאיבריהם הם +1 או -1 , ושויון קיים אם ורק אם $y=x(t+1)$.

$$f(t+1)=x(t+2)^T A\ \ x(t+1) \geq x(t)^T Ax(t+1) \stackrel{*}{=} x(t+1)^T Ax(t)=f(t)$$

השויון (*)

נובע מכך ש $(AB)^T = B^T A^T$,

מכך ש-A סימטרית ומכך שהמטריצה $x(t)^T Ax(t+1)$ היא מסדר 1x1

הראינו שהפונקציה $f(t)$ אינה יורדת וכיון שהיא יכולה לקבל רק מספר סופי של ערכים אז החל מ-T מסוים $f(t+1)=f(t)$ כלומר $x(t+2)=x(t)$.

נשוב ונזכיר שנשמח לפרסם פתרונות אחרים לשתי הבעיות.

תחרות הערים

בברית המועצות מתקיימת כבר מספר שנים תחרות מתמטית בין עירונית בין תלמידי בתי הספר.

כדי לעודד השתתפות עממית בתחרות, מוצעים בתחרות ארבעה שאלונים. שאלון רגיל ושאלון מתקדם לתלמידי כיתות ח ו-ט ושאלון רגיל ושאלון מתקדם לתלמידי כיתות י ו-יא. (בבריה"מ יש 11 שנות לימוד). החלוקה המקבילה במערכת החינוך אצלנו היא לחטיבת הביניים וחטיבה עליונה.

כל משתתף יכול לבחור בשאלון רגיל או מתקדם המתאים לגילו ואף לנסות את כוחו בשניהם, כשהציון הסופי הוא הטוב בין שני הציונים. (בשאלון המתקדם ניתן לקבל יותר נקודות). נלקחות בחשבון שלוש התשובות הטובות ביותר בכל שאלון.

את הנקודות שצוברים תלמידי כיתות ח' (והצעירים יותר) כופלים ב-4/3 ואת הנקודות שצוברים תלמידי כיתות י' ב-5/4, זאת כדי לשפר את סיכויי המשתתפים מהחטיבות המתאימות.

הציון שמקבלת עיר היא ממוצע k התוצאות הטובות ביותר של בני העיר כאשר:

$$k = \max\{[\frac{N}{100}], 5\}$$

N - מספר התושבים בעיר באלפים.

[A] הוא החלק השלם של A, וכאשר הציון של עיר בת פחות מ- 1/2 מיליון תושבים מוכפל במקדם

$$1 + \frac{500 - N}{800}$$

רב הערים המשתתפות בתחרות הן מבריה"מ אבל משתתפים בה גם ערים נוספות מהגוש המזרחי, לאחרונה הצטרפו לתחרות גם ערים מארה"ב, מערב גרמניה ואוסטרליה.

מארגן התחרות, פרופ' קונסטנטינוב, פנה למערכת "אתגר" והזמין ערים מישראל להצטרף לתחרות.

בכל שנה מתקיימות שתי תחרויות, בסתיו ובאביב. תחרות הסתיו התקיימה השנה ב-29 באוקטובר ואנו מפרסמים כאן את השאלות.

קוראי העיתון מתבקשים לנסות את כוחם בכל השאלונים ולשלוח את הפתרונות (גם פתרונות לחלק מהשאלות) למערכת העיתון, עד 31.1.90. לפי הפתרונות שנקבל נחליט אלו ערים יכולות להצטרף לתחרות כבר באביב 1990. הפותרים יוזמנו גם לסגל הנבחרת המתאמנת לאולימפיאדה הבינלאומית שתתקיים בסין.

נא ציינו בפתרונות כתובת, בית הספר וכיתת הלימוד.

אנו מאחלים לפותרים הנאה והצלחה.

* * *

* *

מצא את הספרות החסרות.

תחרות הערים ה-11 סתיו 1989

שאלון רגיל - חטיבת הביניים

פתרון מלא של כל בעיה מזכה ב-3 נקודות.

1. שלושה רצים X, Y, ו-Z משתתפים במירוץ. Z התעכב בזינוק ויצא אחרון. Y יצא שני. במשך המירוץ החליף Z מקום עם מתחרים אחרים 6 פעמים, בעוד ש-X החליף מקום עם מתחרים אחרים 5 פעמים. נתון ש-Y הגיע לגמר לפני X. באיזה סדר הגיעו שלושת הרצים?

2. אורכי הצלעות של משולש חד זוית הם מספרים שלמים עוקבים. להוכיח שהגובה לצלע האמצעית בגודלה, מחלק אותה לקטעים שהפרש אורכיהם הוא 4.

3. נתונים 1989 מספרים כך שסכום כל 10 מהם הוא חיובי. להוכיח שסכום כל המספרים הוא חיובי.

4. למצא x, y, z טבעיים (שלמים חיוביים) כך ש:-

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7}$$

שאלון רגיל - חטיבה עליונה

פתרון מלא של כל בעיה מזכה ב-3 נקודות.

1. 10 חברים החליפו אגרות ברכה ביניהם. כל אחד שלח 5 אגרות. הוכח שיש שני חברים ששלחו אגרת זה לזה.

2. במישור נתונות 3 נקודות K, L, M. לבנות מרובע כך שהנקודות הן נקודות האמצע של 3 צלעות עוקבות של המרובע השוות זו לזו.

3. האם קיימים מיליון מספרים טבעיים שונים כך שאף סכום חלקי שלהם אינו רבוע של מספר שלם?

4. כמה ספרות יש במספר המתקבל כאשר רושמים את המספרים 2^{1989} ו-5^{1989}, זה אחר זה? (ברישום לפי בסיס 10).

שאלון מתקדם - חטיבת הביניים

1. (3 נקודות) כמה פתרונות טבעיים יש למשוואה

$$\left[\frac{X}{10}\right] = \left[\frac{X}{11}\right] + 1 .$$

($[A]$ מסמן את החלק השלם של המספר A; למשל, $2 = [2.03]$, $[2] = 2$).

2. (3 נקודות) משושה ABCDEF חסום במעגל.
$AB = BC = a$; $CD = DE = b$; $EF = FA = c$. להוכיח ששטח המשולש BDF שווה למחצית שטח המשושה.

3. (4 נקודות) מחלקים את המישור, על ידי שלוש קבוצות של ישרים מקבילים, למשולשים שווי צלעות חופפים. האם יש בין הקדקדים 4 נקודות המהוות קדקדים של רבוע?

4. יהיה N מספר טבעי. נסמן ב- $K(N)$ את המספר הגדול ביותר של שלישיות זרות זו לזו של מספרים טבעים שונים a,b,c כך ש- $a + b + c = N$
להוכיח ש:-

א. (2 נקודות) $K(N) > \frac{N}{6} - 1$,

ב. (4 נקודות) $K(N) < \frac{2N}{9}$.

5. נתון לוח מלבני של $M \times N$ משבצות ומספר רב של אבני דומינו בגודל 2×1. אבני הדומינו מונחות על הלוח כך שכל אחת מכסה בדיוק 2 משבצות כך שהן אינן ניתנות להזזה מבלי לצאת מחוץ ללוח.
יהיה K מספר המשבצות שאינן מכוסות.

להוכיח ש:- א. (2 נקודות) $K < 1/4\ MN$,
ב. (4 נקודות) $K < 1/5\ MN$.

6. (7 נקודות) גוזרים מצולע משוכלל ל-N מקביליות שוות שטח. להוכיח ש-N מתחלק ב-3.

שאלון מתקדם - חטיבה עליונה

1. (3 נקודות) האם ניתן לבחור כדור, פירמידה משולשת ומישור כך שכל מישור המקביל למישור הנבחר חותך את הכדור ואת הפירמידה בצורות שוות שטח?

2. (3 נקודות) נסתכל בכל תת הקבוצות של $\{1,2,......,n\}$ שאינן מכילות שני מספרים עוקבים. להוכיח שסכום הרבועים של מכפלות המספרים בכל תת הקבוצות שווה $(N+1)!-1$

3. (5 נקודות) דרך נקודה נתונה O הנמצאת בתוך עגול שרדיוסו R עוברים שני ישרים AB ו-CD הניצבים זה לזה. מסובבים את הישרים האלה בזוית α סביב הנקודה O (באותו כיוון). מהו שטח הצורה המכוסה על ידי הישרים בזמן הסיבוב?

4. רושמים את קבוצת המספרים הטבעיים כאיחוד של סדרות חשבוניות זרות של מספרים שלמים בעלות הפרשים חיוביים $d_1, d_2, d_3, ...$

האם יתכן מצב בו הסכום $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + ...$

איננו עולה על 0.9?

א. (2 נקודות) כאשר מספר הסדרות הוא סופי.

ב. (3 נקודות) כאשר מספר הסדרות הוא אינסופי.

(במקרה זה פרוש התנאי

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + ... \leq 0.9$$

הוא שסכום של מספר סופי כלשהו של מחוברים בסכום האינסופי איננו עולה על 0.9).

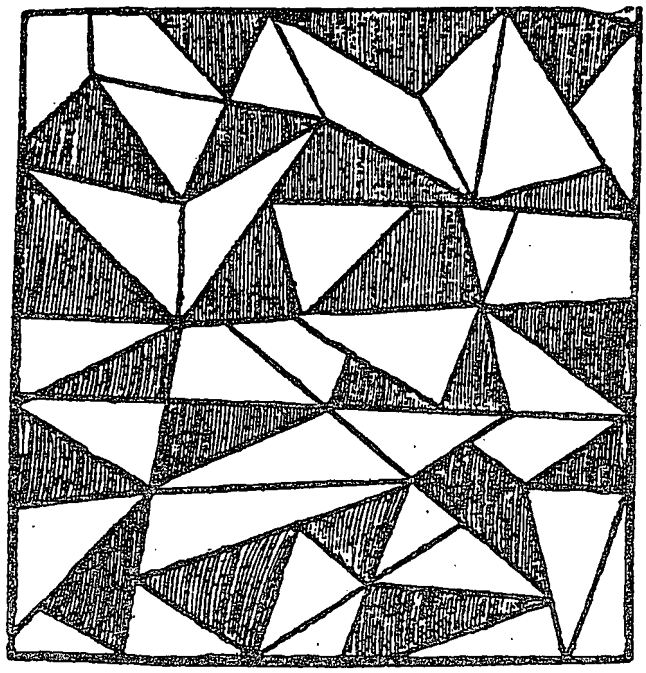
5. (6 נקודות) במישור נתונות 100 נקודות. N מהן, הן קדקדים של מצולע קמור בעל N צלעות, ושאר (100-N) הנקודות נמצאות בתוך המצולע. אף שלוש נקודות אינן על ישר אחד ואף ארבע נקודות אינן נמצאות על שני ישרים מקבילים.

2 שחקנים משחקים את המשחק הבא: השחקן הראשון ממספר את 100 הנקודות כרצונו (על ידי מספרים בין 1 ל-100). השחקן השני יכול לבחור 3 מספרים ועל הראשון לאמר לו מהו שטח המשולש שקדקדיו ממוספרים על ידי שלושת המספרים.

להוכיח כי על ידי 300 שאלות יכול השחקן השני לקבע אלו מהנקודות הן קדקדים ולמצא את שטח המצולע.

6. (8 נקודות) בטבלה מלבנית mn משבצות המסודרות ב-m שורות ו-n עמודות ($m<n$). חלק מהמשבצות מסומנות בכוכב, כך שיש לפחות כוכב אחד בכל עמודה. להוכיח שקיים לפחות כוכב אחד כזה, שבשורה בה הוא נמצא יש יותר כוכבים מאשר בעמודה בה הוא נמצא.

מצא את הכוכב המחומש המשוכלל החבוי בתמונה.



האולימפיאדה הבינלאומית לנוער

האולימפיאדה הבינלאומית ה-30 נערכה בברונשוויג במערב גרמניה ב-18 וב-19 ביולי 1989.

נבחרת ישראל, שמנתה את המשתתפים הבאים:

עדו ברנע, בית ספר תיכון, קיבוץ גבעת חיים.
אברהם גולשטיין, בית ספר ריאלי, חיפה.
שוני דר, תיכון עירוני ד' תל-אביב.
ארז לפיד, תיכון עירוני ד', תל-אביב.
אהרון מילר, בית ספר להנדסאים ליד אוניברסיטה ת"א.
גדי קוזמן, תיכון עירוני ד', תל-אביב.

סיימה במקום ה-26 מבין 5 נבחרות. שוני דר זכה במדליון כסף. ארז לפיד וגדי קוזמן זכו במדליוני ארד. (באולימפיאדה הקודמת זכתה הנבחרת במקום ה-13).

להלן שש שאלות התחרות. בכל יום היו 3 שאלות שלפתירתן הוקצו 4.5 שעות.

הפתרונות יתפרסמו בגליון הבא. מערכת "אתגר" תשמח לפרסם פתרונות מעניינים שיוצעו ע"י הקוראים.

היום הראשון

1. הוכח שהקבוצה $\{1, 2, ..., 1989\}$ ניתנת לחלוקה (הצגה כאחוד של קבוצות זרות) של תת-קבוצות A_i $(i=1, ...,117)$ כך ש:
   א. בכל קבוצה A_i יש 17 איברים,
   ב. סכומי האיברים בכל קבוצה A_i שווים.

2. במשולש חד זוית ABC חוצה הזוית הפנימית ב-A חותך את המעגל החוסם בנקודה A_1. הנקודות B ו-C מוגדרות בצורה דומה. תהא A_o נקודת החיתוך של הישר AA_1 עם חוצי הזוית החיצוניים ב-B וב-C. הנקודות B_o ו-C_o מוגדרות בהתאם.

   הוכח כי:
   א. שטח המשולש $A_oB_oC_o$ הוא כפליים משטח המשושה $AC_1BA_1CB_1$
   ב. שטח המשולש $A_oB_oC_o$ הוא לפחות ארבע פעמים שטח המשולש ABC.

3. יהיו n ו-k מספרים טבעיים ותהיה S קבוצה בת n נקודות במישור כך ש:
א. אין שלוש נקודות של S על ישר אחד.
ב. עבור כל נקודה P ב-S יש לפחות k נקודות שוות מרחק מ-P שנמצאות ב-S.
הוכח כי $k < 1/2 + \sqrt{2n}$.

היום השני

4. יהיה ABCD מרובע קמור שצלעותיו AB,AD,BC מקיימות AB=AD+BC. נתונה נקודה P בתוך המרובע במרחק h מהישר CD כך ש: AP=h+AD ו-BP=h+BC.

הוכח כי $\frac{1}{\sqrt{BC}} + \frac{1}{\sqrt{AD}} \geq \frac{1}{\sqrt{h}}$

5. הוכח שעבור כל מספר טבעי n קיימים n מספרים טבעיים עוקבים שאף אחד מהם אינו חזקה שלמה של מספר ראשוני.

6. יהיה n מספר טבעי. נאמר של תמורה $(X_1, X_2, \ldots, X_{2n})$ של הקבוצה $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ יש תכונה P אם $|X_i - X_{i+1}| = n$ עבור לפחות i אחד מתוך $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$.

הוכח שעבור כל מספר טבעי n קיימות יותר תמורות בעלות התכונה P מאשר תמורות שאין להן תכונה זו.

* * *

* *

האולימפיאדה הבינלאומית בסין

בחודש יולי 1990 תיערך בסין האולימפיאדת מתמטיקה בינלאומית לנוער. גם השנה תישלח נבחרת שתייצג את ישראל ולצורך זה יש לאתר תלמידים מתאימים.

לשם כך הנכם מתבקשים לפתור את שאלות האולימפיאדה האחרונה שפורסמו למעלה. את הפתרונות יש לשלוח **למערכת אתגר - גליונות מתמטיקה**, הפקולטה למתמטיקה, הטכניון, עד לתאריך 31.1.90. על הפתרונות להיות כתובים בצורה ברורה ומסודרת, בצירוף שם הפותר, כתובתו המלאה, שם בית הספר והכתה בה הוא לומד.

כמו כן יתקיימו במהלך השנה חוגי העשרה במתימטיקה שמטרתם טיפוח כשרונות בתחום זה, והכנת התלמידים לתחרויות מתמטיות. ההשתתפות בחוגים אלה חפשית. חוג אחד יתקיים בתל-אביב (פרטים ביחידה לפעולות נוער, במכון ויצמן ברחובות, טלפון 08-483587) והשני בטכניון בימי ה' בשעה 17.30 בבנין אמאדו בטכניון. פרטים נוספים: לשכת הקשר לנוער, הטכניון, טלפון 293034).

את הנבחרת יאמנו פרופ' יוסף גיליס ממכון ויצמן למדע, רחובות, ושי גירון מהפקולטה למתימטיקה, הטכניון חיפה.

בנית משיק למעגל (שמרכזו אינו נתון) בעזרת סרגל בלבד

אבי ב. סיגלר, נהריה

רקע הסטורי

המתימטיקאי האיטלקי מסקרוני (1750-1800) הוכיח שכל הבניות הגאומטריות הנקודתיות האפשריות במחוגה וסרגל, אפשריות במחוגה בלבד.

ב-1928 מצא המתימטיקאי הדני הלמסלב בקופנהגן עותק ספר בגאומטריה אוקלידית משנת 1672, פרי עטו של המתימטיקאי חובב בשם מוהר בו הופיעה הוכחת משפט מסקרוני.

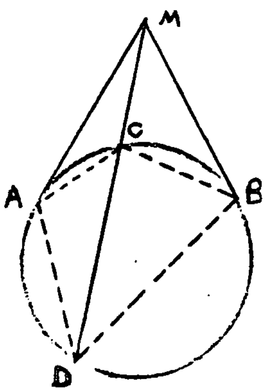
שטיינר (1796-1863) הוכיח שכל בניה נקודתית האפשרית במחוגה וסרגל, אפשרית בסרגל בלבד, אם נתון מעגל ומרכזו (כלומר שמוש חד פעמי במחוגה).

הוכחת משפטי מסקרוני ושטיינר פורסמה בגליונות מתימטיקה לפני מספר שנים. במאמר זה תובא בניה של משיק למעגל נתון (ללא מרכז) בעזרת סרגל, בשני מקרים: כשהנקודה מחוץ למעגל וכשהנקודה על המעגל.

למה

יהיו MA ו-MB משיקים למעגל O ו-MCD חותך (בציור 1). אזי קיים:

$$AC \cdot BD = BC \cdot AD \qquad (1)$$



ציור 1

הוכחה

$$\Delta AMC \sim \Delta MAD$$

$$AC = \frac{AM \cdot AD}{MD} \qquad (2)$$

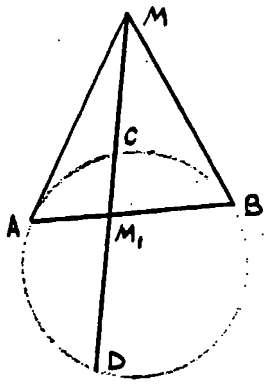
$$\Delta MCB \sim \Delta MBD$$

$$BC = \frac{MB \cdot BD}{MD} \qquad (3)$$

אם נחלק (2) ב-(3) ונתחשב בעובדה ש- MA = MB נקבל את (1).

משפט 1

בנתוני הלמה, תהי M_1 נקודת המפגש של AB ו MCD (ציור 2).
אזי: הנקודה M_1 **הרמונית** ל-M יחסית ל-C ו D, כלומר M_1 מחלקת את הקטע CD מבפנים באותו יחס שבו מחלקת אותו M מבחוץ.



ציור 2

הוכחה

נסמן: $\widehat{MAC} = \widehat{ADC} = \alpha$, $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = \beta$, $\widehat{CAB} = \tau$, $\widehat{DAB} = \delta$

אזי, לפי הלמה $1 = \dfrac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$

לכן לפי משפט הסינוסים $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot \dfrac{\sin\delta}{\sin\tau} = 1$

לכן משום ש - $\sin\beta = \sin(\alpha + \tau + \delta)$ קיים:

$$\frac{\sin(\alpha+\tau+\delta)}{\sin\alpha} : \frac{\sin\delta}{\sin\tau} = 1$$

משיקולי שטחים נובע ש - $\dfrac{MD}{MC} = \dfrac{S_{MAD}}{S_{MAC}} =$

$$= \frac{AM \cdot AD \cdot \sin(\alpha+\tau+\delta)}{AM \cdot AC \cdot \sin\alpha}$$

כאשר S מסמן שטח,

וגם: $\dfrac{M_1D}{M_1C} = \dfrac{S_{M_1AD}}{S_{M_1AC}} =$

$$= \frac{AM_1 \cdot AD \cdot \sin\delta}{AM_1 \cdot AC \cdot \sin\tau}$$

לכן לפי (4) מקבלים

$$\frac{MD}{MC} = \frac{M_1D}{M_1C}$$

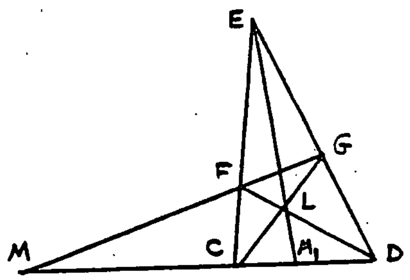
מ.ש.ל

מסקנה:

הישר AB הוא המקום הגאומטרי של הנקודות ההרמוניות ל-M יחסית לנקודות החיתוך של הישרים העוברים דרך M וחותכים את המעגל. ישר זה נקרא **הישר הפולרי** של M יחסית למעגל.

בנית נקודה הרמונית בסרגל בלבד

על הישר נתונות נקודות M, C, D. ניתן, בעזרת סרגל בלבד למצוא נקודה M_1 על הישר, הרמונית ל-M יחסית ל-C,D (ציור 3).



ציור 3

משפט 2

נבחר נקודה E חיצונית לישר ונחברה ל- C ו- D.

נעביר ישר כלשהו דרך M שחותך את EC ו- ED בנקודות F ו- G בהתאמה.

הישרים DF ו- CG נפגשים ב- L. המשך EL פוגש את CD בנקודה M_1.

הנקודה M_1 היא המבוקשת.

הוכחה

לפי משפט מנלאוס, במשולש ECD הנחתך על ידי MFG, קיים:

$$(5) \qquad \frac{MD}{MC} \cdot \frac{CF}{FE} \cdot \frac{EG}{GD} = 1 \, .$$

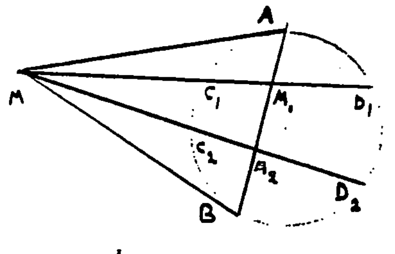
לפי משפט צ'בה במשולש ECD קיים:

$$(6) \qquad \frac{DM_1}{M_1C} \cdot \frac{CF}{FE} \cdot \frac{EG}{GD} = 1 \, .$$

מ- (5) ו- (6) נובע ש-M_1 הרמונית ל-M יחסית ל- C ו- D.

בנית משיק למעגל (שמרכזו איננו נתון) מנקודה חיצונית M בסרגל בלבד

לפי המשפטים ניתן לבצע את הבניה המבוקשת.



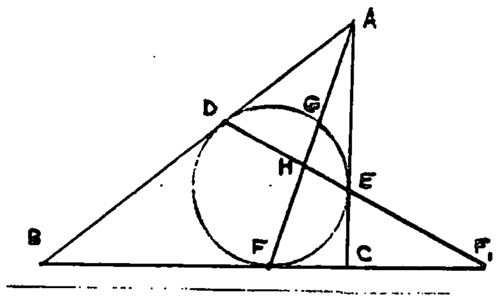
ציור 4

א. נעביר דרך M ישר שחותך את המעגל ב- C_1 ו- D_1. נמצא בעזרת משפט 2 את M_1 ההרמונית ל- M יחסית ל- C_1 ו- D_1 (ציור 4).

ב. נעביר דרך M ישר נוסף שחותך את המעגל ב- C_2 ו- D_2. נמצא באותה שיטה את M_2, ההרמונית ל- M יחסית ל-C_2 ו-D_2.

ג. הישר העובר דרך M_1 ו-M_2 הוא הישר הפולרי ל- M יחסית למעגל והוא חותך את המעגל בנקודות A ו- B. לפי משפט 1, MA ו- MB משיקים למעגל. לכן הבניה הושלמה.

בנית משיק למעגל (שמרכזו איננו נתון) מנקודה על המעגל בסרגל בלבד



ציור 5

משפט 3

אם במשולש ABC חסום מעגל המשיק ל- BC, CA, ו- AB בנקודות D, E, F בהתאמה (ציור 5).
המשך DE פוגש את המשך BC ב- F_1.
אזי: א) F_1 הרמונית ל- F יחסית ל- B ו- C.
ב) AF הוא הישר הפולרי ל- F_1 יחסית למעגל.

הוכחה

א. לפי משפט מנלאוס, במשולש ABC הנחתך על ידי DEF_1 קיים:

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BF_1}{F_1C} \cdot \frac{CF}{EA} = 1 .$$

אבל $AD = AE$, לכן $\frac{BF_1}{F_1C} = \frac{DB}{CE}$.

משום ש- $AE = AD$, $BD = BF$, $FC = CE$, קיים:

$$\frac{BF}{FC} = \frac{DB}{CE}$$

לכן F_1 הרמונית ל-F יחסית ל- B ו- C.

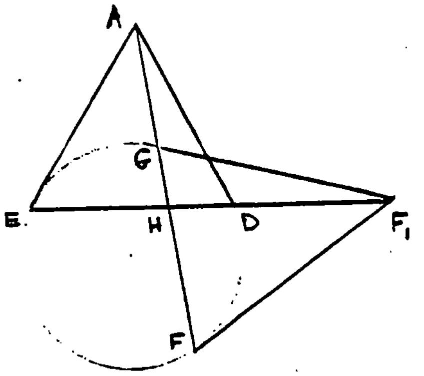
ב. תהיה H נקודת המפגש של AF עם DE. משום שהרביעיה F_1 ,B, F, C הרמונית, גם הרביעיה F_1 ,D, H, E הרמונית. לכן H הרמונית ל- F_1 יחסית ל-D ו-E. לכן AF הוא הישר הפולרי של F_1 יחסית למעגל ואם G היא נקודת החיתוך השניה של AF עם המעגל אזי F_1G משיק.

עתה נעבור לבנית המשיק למעגל דרך נקודה G הנמצאת על המעגל.

א. נבחר נקודה כלשהי A מחוץ למעגל. הישר AG חותך שנית את המעגל בנקודה F.

ב. דרך A נעביר בסרגל בלבד משיקים למעגל, אשר יגעו בנקודות D ו-E. הישר DE נפגש עם GF ב-H.

ג. תהיה F_1 הנקודה ההרמונית של H יחסית ל-D ו-E (בניה אפשרית בסרגל בלבד לפי משפט 2.



ציור 6

טענה

המשיקים מ- F_1 למעגל נוגעים בנקודות G ו-F.

הוכחה

עלינו להוכיח שהמשיק דרך F עובר דרך F_1. אבל זאת בדיוק המסקנה של משפט 3 הקובעת שהמשיק מ- F פוגש את DE בנקודה F_1 שהוא הרמונית ל-H, יחסית ל-D ו-E. לכן AF הוא בדיוק הישר הפולרי של F_1 יחסית למעגל.
לכן הטענה הוכחה.

האולימפיאדה המתמטית השלושים ע"ש
פרופ' ירמיהו גרוסמן (ניסן תשמ"ט)

פ ת ר ו נ ו ת

שאלה מס' 1

תהי $f(x)$ פונקציה המקיימת, לכל x טבעי,

$$f(x) = \begin{cases} x+10 & x<100 \\ f(f(x-11)) & x\geq 100 \end{cases}$$

קבע את $f(1989)$.

פתרון : נוכיח, בשלושה שלבים, כי לכל $99 \leq x$, $f(x)=109$.

שלב א': עבור $x=99$, הטענה ברורה.

שלב ב': עבור $99 \leq x \leq 110$, נוכיח באינדוקציה על x. את המקרה $x=99$ הוכחנו בשלב הקודם, ואילו אם $100\leq x\leq 110$, $x-11<100$ ולכן $f(x)=f(f(x-11))=f(x-1)=109$.

שלב ג : עבור $100\leq x$ כלשהו, נסמן $x=y+11n$ כאשר $100\leq y\leq 110$ ו-$n\geq 0$ ונוכיח באינדוקציה על n. את המקרה $n=0$ הוכחנו בשלב הקודם, ואילו אם $1\leq n$, $f(y+11n) = f(f(y+11(n-1)))=f(109)=109$ כי 109 הוא בתחום שנבדק בשלב הקודם.

שאלה מס' 2:

יהיו $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ מספרים ממשיים המקיימים

$$\tan\alpha_1 \tan\alpha_2 \ldots \tan\alpha_n = 1 .$$

מצא את הערך הגדול ביותר של המכפלה $\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \ldots \sin\alpha_n$ ועבור אלו ערכי $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ הוא מתקבל.

פתרון: נסמן $P=\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \ldots \sin\alpha_n$

ולכן

$$P^2 = \prod_{i=1}^{n} \sin\alpha_i \cos\alpha_i = 2^{-n} \prod_{i=1}^{n} \sin 2\alpha_i \leq 2^{-n}$$

מכאן $P \leq 2^{-\frac{n}{2}}$, ושיוויון כאשר $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \frac{\pi}{4}$

שאלה מס' 3

הוכח: אם הקטעים AD ו-BE מהקדקדים A ו-B של משולש ABC לצלעות הנגדיות שווים באורכם, ומחלקים את הזויות A ו-B פרופורציונלית, דהיינו,
$\widehat{CAD} / \widehat{BAD} = \widehat{CBE} / \widehat{ABE}$ אז המשולש הוא שווה שוקיים.

פתרון: נניח, בשלילה, כי משולש ACB אינו שווה שוקיים, ולמשל CB>CA אז $\widehat{CAB} > \widehat{CBA}$, או

$$\widehat{CAD} + \widehat{BAD} > \widehat{CBE} + \widehat{ABE}$$

ומהפרופורציה גם
$$\widehat{CAD} > \widehat{CBE} ,$$
$$\widehat{BAD} > \widehat{ABE} .$$

נשתמש בבנית העזר הבאה: נקבע F כך ש-EADF מקבילית ונחבר F ל-B.

אזי FE=AD=EB והמשולש FED שווה שוקיים.

מכאן $\widehat{EFD} + \widehat{DFB} = \widehat{EBD} + \widehat{DBF}$

אבל $\widehat{EFD} = \widehat{CAD} > \widehat{CBE} = \widehat{EBD}$

ולכן $\widehat{DFB} < \widehat{DBF}$.

לכן, במשולש FDB, הצלעות DB<DF,

אבל DF=EA (מקבילית), ולכן DB < EA

אם נצרף לזה את DA = EB

AB = BA

נקבל במשולשים BAE, ABD כי $\widehat{EBA} < \widehat{BAD}$, סתירה.

שאלה מס' 4

מצא את הפולינומים עם מקדמים ממשיים P(x) המקיימים את הזהות
$$P(x)P(x+1) = P(x^2+x+1)$$

פתרון: נשים לב כי אם α שורש של P(x), גם $\alpha^2+\alpha+1$ שורש. יתר על כן, מתוך
$$P(\alpha-1)P(\alpha)=P((\alpha-1)^2 + (\alpha-1) + 1) = P(\alpha^2-\alpha+1)$$
נובע שגם $\alpha^2-\alpha+1$ הוא שורש. כעת, אם P(x) אינו קבוע (מעלה חיובית), יש לו מספר סופי של שורשים. יהי α השורש המרוכב בעל הערך המוחלט המכסימלי. נסמן $\beta=\alpha^2+1$. אזי, לפי הנ"ל, $\beta\pm\alpha$ הם שורשים של P(x). לכן $|\beta\pm\alpha|\le|\alpha|$.
מצד שני, $2\alpha=(\beta+\alpha)-(\beta-\alpha)$, ולכן, לפי אי שויון המשולש $2|\alpha|\le|\beta+\alpha|+|\beta-\alpha|$.
בסך הכל $|\alpha|=|\beta+\alpha|=|\beta-\alpha|$, מה שייתכן רק אם $\beta=0$, או $\alpha^2+1=0$ לכן $\alpha=i$ או $\alpha=-i$. מאחר שלכל פולינום עם מקדמים ממשיים, השורשים המרוכבים באים בזוגות צמודים, $\alpha=i$ ו- $\alpha=-i$, שניהם שרשים, והפולינום P(x) מתחלק ב-$(x-i)(x+i)=x^2+1$.

נשים לב כעת כי אם $P_2(x)$, $P_1(x)$ מקיימים את הזהות הנתונה, גם $P_1(x)P_2(x)$ וגם $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ מקיימים זהות זו. קל גם לוודא כי (x^2+1) מקיים זהות זו, ולכן אם $P(x)$ מקיים את הזהות, גם $\frac{P(x)}{x^2+1}$ מקיים את הזהות, ולכן, אם אינו קבוע, מתחלק ב- (x^2+1). מאחר ש- $P(x)$ בעל מעלה סופית, קיים n כך ש - $\frac{P(x)}{(x^2+1)^n}$ הוא קבוע.

אבל, קל לראות כי הקבועים היחידים המקיימים את הזהות הם 0 ו-1, ולכן $P(x)\equiv 0$ או $P(x)=(x^2+1)^n$.

שאלה מס' 5

א. נתון קטע על הישר בעל אורך L, וקבוצת קטעים המכסה אותו. הוכח, כי קיימת קבוצה חלקית של קטעים הזרים זה לזה, כך שסכום אורכיהם הוא לפחות L/2.

ב. נתון מלבן במישור, בעל היקף L, וקבוצת מלבנים שצלעותיהם מקבילות לצלעותיו והמכסים אותו. הוכח כי קיימת קבוצה חלקית של מלבנים הזרים לזה כך שסכום היקפיהם הוא לפחות L/2.

פתרון

א. נבנה שתי תת-קבוצות זרות של קבוצת הקטעים הנתונה, כך שאיחודן מכסה את כל הקטע. ברור אז כי לפחות אחת משתי הקבוצות מקיימת את המבוקש.

אם אחד מהקטעים מוכל באחר, נוכל להרחיקו מן הקבוצה בלי לאבד את תכונת הכיסוי. נניח על כן כי אין הכלה בין אברי הקבוצה. יהיה $[a,b]$ הקטע הנתון, ויהי $I_1=[a_1,b_1]$ קטע מתוך הקבוצה המקיים $a_1\le a$.

נבחר עתה קטעים I_k $(k\ge 2)$ באינדוקציה על k. את $I_k=[a_k,b_k]$ נבחר כך ש- $a_k\le b_{k-1}<b_k$ ו- a_k הוא המכסימלי המקיים תנאי זה (קיים I_k כזה, כי התחום מימין ל- b_{k-1} מכוסה!).

קל לראות כי $a_{k+2}>a_{k+1}$: נשים לב תחילה לכך ש- $a_{k+2}>b_k$ כי אחרת $I_{k+2}\subset I_{k+1}$ בניגוד להנחת אי ההכלה. לכן, לו היה $a_{k+2}\le b_k$, היתה מתקבלת סתירה למכסימליות a_{k+1} בבחירת I_{k+1}.
אם כך, I_k ו-I_{k+2} זרים. ברור גם שהקבוצה $\{I_1,I_2,\ldots.I_n\}$ מכסה את הקטע, ולכן $\{I_1,I_3,I_5,\ldots\}$, $\{I_2,I_4,I_6,\ldots\}$ הן תת קבוצות זרות שאחודן מכסה את הקטע, כדרוש.

ב. נניח כי צלעות המלבן הן באורכים a ו-b, כאשר $a>b$, כמו בציור.
לפי א, אפשר למצוא תת קבוצה K_2 של מלבנים זרים המכסים את הצלע העליונה וסכום כנ"ל. אם ב-K_1 או ב-K_2 יש מלבן שאורך צלעו האנכית $b/2$ לפחות, אז K_1 או K_2 בהתאמה היא תת הקבוצה המבוקשת. אחרת המלבנים ב-K_1 זרים למלבנים ב-K_2 והאיחוד $K_1\cup K_2$ הוא תת הקבוצה המבוקשת.

שאלה מס' 6

תהי S קבוצת n נקודות במישור, כך שכל שלוש מהן אינן על ישר אחד. נאמר שקבוצה A של נקודות ממצה את S אם כל אחד מ-$\binom{n}{3}$ המשולשים שקדקדיהם נקודות של S מכיל לפחות נקודה אחת מתוך A כנקודה פנימית. הוכח:

א. לכל n ולכל S בגודל n כדלעיל ניתן למצות את S ע"י קבוצה A בת $2n-5$ נקודות.

ב. לכל n ניתן למצוא קבוצה S שאי אפשר למצותה ע"י קבוצה A בת פחות מ-$2n-5$ נקודות.

פתרון

א. תהי $S=\{P_1P_2\ldots P_n\}$, ונתבונן ב-$\binom{n}{2}$ הישרים P_iP_j. מאחר שמספרם סופי, קיים ישר 1 שאינו מקביל לאף אחד מהם.

נעביר דרך כל P_i ישר l_i המקביל ל-1, ונסתכל בחיתוך l_i עם אחד מ-$\binom{n-1}{2}$ הקטעים P_jP_k. מאחר שמספרם סופי, ואף אחד מהקטעים לא מכיל את P_i, קיים על l_i קטע U_iD_i ש-P_i נקודה פנימית שלו, ואשר אינו חותך אף אחד מהקטעים P_jP_k. מכאן, אם $P_iP_jP_k$ הוא משולש כלשהו שקדקדיו נקודות של P הוא חותך את אחד הישרים l_i,l_j או l_k ולכן מכיל כנקודה פנימית את אחת הנקודות U_i,D_i,U_j,D_j,U_k או D_k והקבוצה $\hat{A}=\{U_1D_1U_2D_2\ldots U_nD_n\}$ בת 2n הנקודות ממצה את S. נראה כי לפחות חמש מנקודות $\hat{A}$ מיותרות.

מאחר שמספר המקבילים l_i הוא סופי, יש ביניהם שנים קיצוניים, למשל l_{i_1} ו-l_{i_2}. אז S מוכלת בשלמותה בפס שבין l_{i_1} ו-l_{i_2}, ולכן U_{i_1}, D_{i_1}, U_{i_2} ו-D_{i_2} מיותרות.

לבסוף, נסתכל ב-$n-1$ הקרנים המחברות את P_1 לשאר נקודות S. מספרן סופי, והן מוכלות בחצי-מישור, לכן יש ביניהן שתיים קיצוניות. רק אחת מהן (לכל היותר) יכולה לעבור דרך P_{i_2} ולכן קיימת P_{i_3} שונה מ-P_{i_2}, P_{i_1} כך ש-S מוכלת בשלמותה באחד מחצאי המישור הסגורים של הישר $P_{i_1}P_{i_3}$.

מאחר שרק אחת משתי הנקודות U_{i_3} ו-D_{i_3} יכולה להמצא בחצי מישור זה, הרי השניה, למשל U_{i_3}, אינה יכולה להיות פנימית בכל משולש שקדקדיו נקודות של S.

לסיכום, הקבוצה $A=A\setminus\{U_{i_1}D_{i_1}U_{i_2}D_{i_2}U_{i_3}\}$ ממצה את S, ומכילה $2n-5$ נקודות.

ב. עבור $n>3$ נתון, נבנה $S=\{P_1P_2\ldots P_n\}$ כדלהלן:
יהי $P_1P_2P_3$ משולש כלשהו, נבחר בו $n-3$ נקודות פנימיות $P_4P_5\ldots P_n$ כך שאין שלוש מביניהן על ישר אחד. נוכיח, באינדוקציה על n, כי אי אפשר למצות את S ע"י פחות מ-$2n-5$ נקודות, וזאת ע"י כך שנראה כי אפשר לכסות את $P_1P_2P_3$ ע"י $2n-5$ משולשים שקדקדיהם נקודות של S ואין לשנים מהם נקודה פנימית משותפת (כסוי כזה נקרא "טריאנגולציה"). המקרה $n=3$ ברור. נניח כי הטענה נכונה עבור $n-1$, דהיינו כי ל-$P_1P_2P_3$ יש טריאנגולציה ע"י $2(n-1)-5$ משולשים שקדקדיהם מתוך $\{P_1\ldots P_{n-1}\}$.

P_n פנימית באחד המשולשים, ואם נחברה לקדקדיו, הוא יתחלק לשלושה משולשים חדשים, ונקבל טריאנגולציה ע"י $2(n-1)-5+3=2n-5$ משולשים שקדקדיהם מתוך $\{P_1\ldots P_n\}$ כדרוש.

הערה: הוכח, כי אם ב-S, הנקודות $P_1\ldots P_k$ יוצרות מצולע קמור, והנקודות $P_{k+1}\ldots P_n$ פנימיות בו, אז המיצוי המינימלי של S הוא בן $2n-k-2$ נקודות.

פתרון בעיות מאתגר מס' 13

.70 הוכח כי עבור כל x,y,z חיוביים:-

$$x^x y^y z^z \geq (x y z)^{\frac{x+y+z}{3}}$$

פתרון:

$$\frac{x^x \quad y^y \quad z^z}{(x y z)^{\frac{x+y+z}{3}}} \geq \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x-y}{3}} \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{y-z}{3}} \left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{z-x}{3}} \geq 1$$

שויון קיים אך ורק כאשר $x = y = z$.

.71 הנקודות P,Q,R נמצאות מחוץ למשולש ABC ונתון כי:

$$AQ^2 + CP^2 + BR^2 = QC^2 + PB^2 + RA^2$$

הוכח כי הניצבים מ - P, Q, R לישרים BC, CA, AB בהתאמה נפגשים בנקודה אחת.

פתרון:

נניח כי הניצבים מ- Q,R ל-AB, AC בהתאמה נפגשים ב-O וכי QO פוגש את AC ב-B' ואילו RO פוגש את AB ב-C'. נניח כי הניצב מ-O ל-BC פוגש אותו ב-A', קיים:-

$$AR^2 - BR^2 = AC'^2 - BC'^2 = OA^2 - OB^2$$

וכמו כן $\quad AR^2 - CQ^2 = OA^2 - OC^2$

ומכאן $\quad OB^2 - OC^2 = (AQ^2 - CQ^2) - (AR^2 - BR^2)$

$$= (AQ^2 + BR^2) - (QC^2 + RA^2) = PB^2 - PC^2$$

והמסקנה מידית.