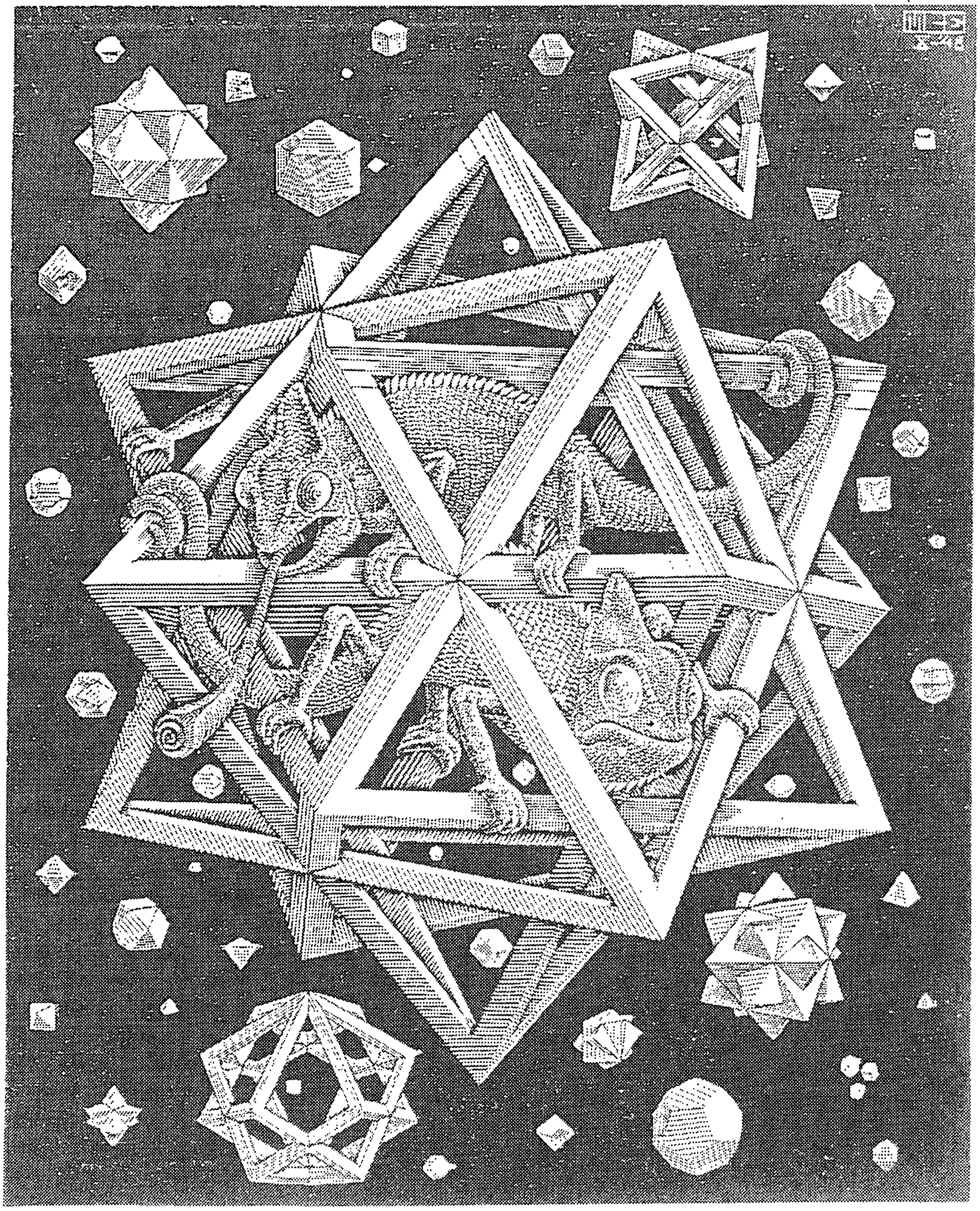
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס' 13 | אדר תשמ"ט - מרץ 1989



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון וייצמן למדע
רחובות

תוכן העניינים

אתגר - גליונות מתמטיקה ISSN 0334 - 0201
מוצא לאור ע"י הפקולטות למתמטיקה במכון וייצמן ובטכניון.
המערכת: פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שימושית, מכון וייצמן.
פרופ' א. ברמן וד"ר צ. הראל, הפקולטה למתמטיקה, הטכניון.
מען המערכת: היחידה לפעולות נוער, מכון ויצמן למדע, רחובות, 76150,
טל. 08-482970.
עיבוד תמלילים והדפסה: קתדרה - הוצאה לאור טל. 08-411690

דבר המערכת

בגליון זה ימצאו הקוראים פתרונות לשאלות שהוצגו בפני משתתפי האולימפיאדה הבינלאומית במתמטיקה אשתקד באוסטרליה.

הצלחת נבחרת ישראל בתחרות ההיא מעודדת אותנו לחשוב ולהתכונן לקראת האולימפיאדה הבנלאומית הבאה שתתקיים במערב גרמניה ביולי השנה.

כבכל שנה, ניאלץ לחפש מועמדים חדשים כיון שחלק ממשתתפי אשתקד סיימו את ביה"ס התיכון ולכן לא יוכלו להשתתף. אנו משוכנעים כי קיימים בארץ כשרונות אשר טרם הצלחנו לגלותם.

בהקשר זה אנו מפצירים בקוראינו לעשות מאמץ ולהגיש פתרונות לשאלות המוצגות בגליון זה.

האולימפיאדה הישראלית

במתמטיקה לנוער תשמ"ט

השנה, זו הפעם העשרים וחמש, התקיימה האולימפיאדה הישראלית במתמטיקה במכון וייצמן, בשיתוף פעולה עם בנק הפועלים בע"מ. האירוע היה ב-24 לינואר והשתתפו בו כמאה מתחרים מכל קצווי הארץ.
ואלה תוצאות התחרות:

<u>פרס ראשון</u>

ארהרון מילר, בית-ספר להנדסאים, תל-אביב (כיתה י"א).

<u>פרס שני</u>

גדי קוזמה, תיכון עירוני ד', תל-אביב (כיתה י"ב)

<u>ציונים לשבח</u>

עידו ברנע, תיכון ע"ש בן גוריון, גבעת חיים (כיתה י"ב)
שלמה שהם, ישיבת בני עקיבא, נתניה (כיתה י"ב)
ליאור גרונדלינגר, תל-אביב.
להלן מובא את השאלון של האולימפיאדה.
בגליון הבא נביא פתרונות לשאלות, אבל אנו ממליצים לקוראינו לנסות את כוחם הם בינתיים.

1. $$f(x)=|x-a|+|bx-1|$$
כאשר $0\le a\le 1/2$, $0\le b\le 1$. הוכח כי ניתן למצוא x_0,x_1 ממשיים כך ש- $x_1\ge x_0+2$ ואילו עבור כל $x_0\le x\le x_1$, תהיה $f(x)\le 2$.

2. ℓ_1, ℓ_2 הם ישרים מקבילים המשיקים למעגל בעל רדיוס R ומרכז X. בונים שני מעגלים נוספים, האחד בעל רדיוס r_1 המשיק למעגל X וגם לישר ℓ_1, השני בעל רדיוס r_2, המשיק לישר ℓ_2 ולשני המעגלים האחרים. מצא את R כפונקציה של r_1,r_2.

יש מחרוזת יחידה (עד כדי סיבוב) בת ארבעה חרוזים שאחד מהם לבן ושלושה שחורים, ולה מתאימים (על ידי סיבוב)ארבעת ה- b-ים הבאים:

(1,1,1,0)

(1,1,0,1)

(1,0,1,1)

(0,1,1,1)

לארבעה אלה מתאימות ארבע החלוקות הבאות:

1-1,2-1,3-1,4-0 = 1,2,4

1-1,2-1,3-0,4-1 = 1,3,3

1-1,2-0,3-1,4-1 = 2,2,3

1-0,2-1,3-1,4-1 = 1,1,2,3

לפיכך זהו המחזור היחיד, כך שלכל $\underline{a}\in P(7)$ הסדרה $\underline{a},T(\underline{a}),T^2(\underline{a})$ היא מחזורית ממקום מסוים והלאה, והמחזור הוא זה המופיע לעיל.

ג) המספר 8 נכתב כ- $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}+2$, ולפיכך $t=4$, $r=2$.

יש שתי מחרוזות בנות ארבעה חרוזים ששניים מהם לבנים ושניים שחורים (באחת החרוזים מאותו הצבע סמוכים זה לזה, ובשניה הצבעים מופיעים לסירוגין). ניתן להגיע למספר המחרוזות גם על ידי שימוש בנוסחה:

$$m = \frac{1}{4}\left\{\phi(1)\begin{bmatrix}4/1\\2/1\end{bmatrix}+\phi(2)\begin{bmatrix}4/2\\2/2\end{bmatrix}\right\} = \frac{1}{4}\left\{\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\} = \frac{1}{4}(6+2) = 2$$

ה-b-ים המתאימים לכל אחת מהמחרוזות הם:

(1,1,0,0)	(1,0,1,0)
(1,0,0,1)	(0,1,0,1)
(0,0,1,1)	
(0,1,1,0)	

3. מצא את כל הזוגות של מספרים שלמים x,y המקיימים

$$x^2+x=y^4+y^3+y^2+y$$

4. נתונה זוית חדה $\sphericalangle PQR$ ובפנים לה שתי נקודות A,B. מצא נקודה X על השוק QP של הזוית, כך שאם נמשיך את XA,XB עד שיפגשו את השוק QR ב-Y,Z, בהתאמה, אז יהיה $XY=XZ$.

5. המספרים החיוביים $(a_1,a_2,\dots\dots,a_{2m+1})$ מהווים סדרה הנדסית.
אם X הוא הממוצע החשבוני של $(a_1,a_3,\dots,a_{2m+1})$ ו- Y זה של $(a_2,a_4,\dots,a_{2m})$ הוכח כי $X\geq Y$.
באילו תנאים יתקיים שויון ?

6. יהיו $A_1,A_2,\dots\dots,A_n$ n קבוצות, ו- P קבוצת אותם האיברים השייכים, כל אחד, למספר אי-זוגי מבין הקבוצות הנתונות. הוכח כי עבור $s=1,2,\dots\dots,n$, יהיה המספר

$$|P|-\ \Sigma\ |A_i|+2\ \Sigma\ A_i\cap A_j|-2^2\ \Sigma\ A_i\cap A_j\cap A_k|+$$
$$+\dots\dots\dots\dots+(-2)^{s-1}\ \Sigma\ |A_{i}\cap A_{i}\cap\dots\cap A_{i}|$$

כפולה שלמה של 2^s.

(נ.ב. עבור כל קבוצות $X,Y,\dots\dots$ מסמן $|X|$ מספר איברי X, $X\cap Y$ מסמן את החיתוך של X,Y).

7. נתונה מערכת משוואות:

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 +\dots+ \sin x_n = 0$$
$$\sin x_1 +2 \sin x_2 +3 \sin x_3 +\dots+ n\sin x_n = 100$$

מהו הערך הקטן ביותר של n, כך שלמערכת זו יהיו פתרונות ממשיים? נמק.

ריבועי קסם

י. גיליס רחובות

I. <u>מבוא</u>

נסתכל בתבנית הבאה:-

$$\begin{bmatrix} 11 & 25 & 7 & 4 & 18 \\ 20 & 12 & 24 & 8 & 1 \\ 2 & 19 & 13 & 21 & 10 \\ 9 & 3 & 16 & 15 & 22 \\ 23 & 6 & 5 & 17 & 14 \end{bmatrix}$$

נמצאים בה כל המספרים הטבעיים מ-1 עד 25, מסודרים בצורת ריבוע של 5x5 כאשר סכומי המספרים בכל אחת מהשורות, העמודות והאלכסונים הראשיים הם כולם שווים.

תבנית כזאת נקראת "ריבוע קסם", במקרה שלנו ריבוע <u>מסדר 5</u>.

בימי הביניים ייחסו לריבועים הללו כל מיני תכונות מגיות, אך לא בזה עניננו כאן, אלא בשיטות לבניתם.

הדבר קל יחסית בשני מקרים:-

1) עבור סדר אי-זוגי.

2) עבור סדר שהוא כפולה של 4.

המקרה השלישי, כאשר הסדר הוא זוגי אבל לא כפולה של 4, יותר מסובך, ולא נטפל בו במאמר זה.

II. <u>סדר אי-זוגי</u>

רעיון הבניה מבוסס על האפשרות לכתוב כל מספר שלם מ-0 עד k^2-1 בצורה:

$x=k\alpha+\beta$

כאשר α ו- β הם שלמים, לא שליליים וקטנים מ-k, וזאת באופן אחד בלבד.

לדוגמה, אם $k=7$ נוכל לכתוב $19=7\cdot 2+5$

ולכן, במקרה זה, $\alpha=2$, $\beta=5$.

מזה יוצא כי עבור כל מספר טבעי n, מ-1 עד k^2, נוכל לכתוב $n = \alpha k+\beta+1$.

עכשיו יהיו $\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k\}$, $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\}$ שתי תמורות

(פרמוטציות) כלשהן של המספרים $\{0,1,2,\ldots,k-1\}$ ונגדיר את המטריצה $k\times k$ ע"י

$$A=\{a_{ij}\}$$

$$a_{ij} = k\alpha_{i+j-1}+\beta_{i-j+1}+1$$

כאשר הסיומות $i+j-1$, $i-j-1$ מוגדרות mod k, דהיינו שאם אחת מהן גדולה מ-k,

מחסרים ממנה k ואם היא שלילית מוסיפים לה k.

מאחר שכל α_i ו-β_i הוא מספר בין 0 ל- $(k-1)$, נקבל

$$1\le a_{ij}\le k(k-1)+(k-1)+1=k^2$$

מאידך נוכיח כי כל k^2 האיברים a_{ij} שונים זה מזה.

כי נניח ש-

$$a_{pq}=a_{rs}$$

ולכן

$$k\alpha_{p+q-1}+\beta_{p-q+1}+1 = k\alpha_{r+s-1}+\beta_{r-s+1}+1$$

יוצא כי

$$\beta_{r-s+1}-\beta_{p-q+1}\equiv 0 \pmod k.$$

אבל אלה שניהם מספרים בין 0 ל-$(k-1)$ ולכן $\beta_{r-s+1} = \beta_{p-q+1}$.

ומכאן ש- $r-s=p-q$.

אבל מאחר ש- $\beta_{r-s+1} = \beta_{p-q+1}$ אנו מסיקים כי גם $k\alpha_{p+q-1} = k\alpha_{r+s-1}$

ולכן $r+s=p+q$

יוצא כי $(r,s)\equiv(p,q)$.

מאחר שהאיברים a_{pq}, שהם k^2 במספר, כולם שונים זה מזה וכולם בין 1 ל- k^2,
יוצא שאיברי המטריצה A הם באמת המספרים מ-1 עד k^2.
סכום כל איברי A הוא כמובן $k^2(k^2+1)/2$, מאידך קל לראות, כי עבור j קבוע

הסכום $\sum_{i=1}^{k} a_{ij}$ הוא

$$k\sum_{i=1}^{k}\alpha_{i+j-1} + \sum_{i=1}^{k}\beta_{i-j+1}+k$$

אבל שני הסכומים בנוסחה זו הם שווים, כל אחד, לסכומם של המספרים
$\{,0,1,2,\dots,(k-1)\}$, ז.א. $k(k-1)/2$.
יוצא כי הסכום של כל שורה במטריצה הוא:

$$k^2(k-1)/2+k(k-1)/2+k$$
$$= k(k^2+1)/2$$

ונשאיר לקורא לבדר שאותו הדבר נכון גם לגבי סכומי האיברים בכל טור וטור.
עכשיו נבדוק את הסכומים האלכסוניים,

$$.T=\sum_{i=1}^{k} a_{i,k-i+1}\ ;\ S=\sum_{i=1}^{k} a_{ii}.$$

יוצא כי:

$$.S = k\sum_{i=1}^{k}\alpha_{2i-1}+\sum_{i=1}^{k}\beta_i+k$$

מאחר ש-k הוא אי-זוגי, אנו רואים שסדרת המספרים $(2i-1)(\bmod\ k)$ אינה אלא
תמורה של הסדרה $\{0,1,2,\dots,k-1\}$ ולכן $S = k\cdot k(k-1)/2+k\beta_1+k$

יוצא שאם נבנה את התמורה $\{\beta_1,\dots,\beta_k\}$ של הסדרה $\{0,1,\dots,k-1\}$ כך ש-
$\beta_1=(k-1)/2$ יהיה גם $S=k(k^2+1)/2$

כמו כן

$$T = k\sum_{i=1}^{k}\alpha_k + \sum_{i=1}^{k}\beta_{2i-k}+k$$

וכמו במקרה של S נבטיח כי $T = k(k^2+1)/2$ אם

אם ניקח $\alpha_k=(k-1)/2$.

נוכל לסכם:

יהיו $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k\}$, $\{\beta_1\beta_2,\dots,\beta_k\}$ תמורות של סדרת המספרים $\{0,1,\dots,k-1\}$ כך ש-$\alpha_k=\beta_1=(k-1)/2$.

המטריצה $A=\{a_{ij}\}$ המוגדרת ע"י $a_{ij}=k\alpha_{i+j-1}+\beta_{i-j+1}+1$ תהווה ריבוע קסם. (נדגיש שוב כי הסיומות $i\pm j+1$ הן כולן $(\text{mod } k)$).

III <u>סדר שהוא כפולה של 4</u>

הבניה במקרה זה דומה מאוד לבניה הקודמת פרט לכמה שינויים המתחייבים מהעובדה ש-k אינו עוד אי-זוגי . נניח כי $k=4m$ ונסתכל בשתי תמורות שונות - $\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1}\},\{\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_{k-1}\}$ של המספרים $\{0,1,\dots,k-1\}$.

הפעם נגדיר

$$a_{ij} = 4m\alpha_{i+2mj} + \beta_{2mi+j}+1$$

ראשית כל עלינו להוכיח כי איברי המטריצה $\{a_{ij}\}$ הם כולם בין 1 ל- $16m^2$ ושכולם שונים זה מזה. אבל ברור ש: -

$$1\le a_{ij}\le 4m(4m-1)+(4m-1)+1 = 16m^2$$

מאידך אם $a_{i,j}=a_{i',j'}$ יהיה

$$4m(\alpha_{i+2mj}-\alpha_{i'+2mj'}) = \beta_{2m'+j'} - \beta_{2mi+j}$$

יוצא ש - $\beta_{2mi'+j'} - \beta_{2mi+j}$
מתחלק ב-4m, ולכן בדומה למקרה של k אי-זוגי אנו מסיקים ש-

$$2mi'+j'- (2mi+j)\equiv 0(\text{mod } 4m)$$

אבל מניה וביה יוצא שגם $\alpha_{i+2mj} = \alpha_{i'+2mj'}$

ולכן גם $(i'-i) + 2m(j'-j) \equiv 0 \pmod{4m}$

יש לנו אפוא

$$2m(i'-i) + (j'-j) \equiv 0 \pmod{4m}$$

וגם

$$i'-i + 2m(j'-j) \equiv 0 \pmod{4m}$$

אם נחלץ את $(j'-j)$ נקבל:

$$(4m^2-1)(i'-i) \equiv 0 \pmod{4m}$$

ברור שלמספרים $4m$, ו-$4m^2-1$ אין גורם משותף, ולכן:

$$i'-i \equiv 0 \pmod{4m}$$

ובדרך דומה גם

$$j'-j \equiv 0 \pmod{4m}$$

דהיינו $i'=i$, $j'=j$, כלומר: איברי המטריצה $\{a_{ij}\}$ הם כולם שונים זה מזה ולכן הם למעשה קבוצת המספרים הטבעיים מ-1 עד $16m^2$ כאשר כל אחד מופיע בדיוק פעם אחת. במקרה של k אי-זוגי הבטחנו את תכונת "הקסם" ע"י האילוצים: $\alpha_k = \beta_1 = (k-1)/2$. עכשיו נראה אלו אילוצים יהיו דרושים כאשר $k=4m$.

1) <u>סכומי העמודות</u>. נסתכל בעמודה j. סכום האיברים בה הוא

$$4m\sum_{i=1}^{4m}\alpha_{i+2mj} + \sum_{i=1}^{4m}\beta_{2mi+j} + 4m$$

מאחר ש j כאן קבוע, יוצא כי הסכום הראשון הוא אמנם זהה עם

$\sum_{i=1}^{4m}\alpha_i$ דהיינו $2m(4m-1)$. נוכל להבטיח ערך דומה עבור הסכום השני

אם נקבע כי עבור $1\le n\le 2m$,

$$\beta_{n+2m}+\beta_n = 4m+1$$

ואז יהיה סכומה של כל שורה

$$4m\cdot 2m(4m-1) + 2m(4m-1)+4m = 2m(16m^2+1)$$

2) <u>סכומי השורות</u>. בדומה למקרה של העמודות, נוכל כאן לדאוג לסכומי השורות אם נקבע כי עבור $1\le n\le 2m$,

$$\alpha_{n+2m}+\alpha_n=4m-1$$

3) <u>האלכסון הראשון, $i=j$.</u>

הסכום כאן הוא

$$4m\sum_{i=1}^{4m}\alpha_{(2m+1)i} + \sum_{i=1}^{4m}\beta_{(2m+1)i}+4m$$

אבל למספרים $4m$, $2m+1$ אין גורם משותף. לכן סדרת הסיומות $(2m+1)i$ זהה, $(\mathrm{mod}\ 4m)$, עם הסדרה α_i, והמסקנה מיידית.

4) <u>האלכסון השני, $j=4m+1-i$</u>

הסכום פה יהיה

$$4m\sum_{i=1}^{4m}\alpha_{i+2m(4m+1-i)} +\sum_{i=1}^{4m}\beta_{4m+1+(2m-1)i}+4m$$

$$= 4m\sum_{i=1}^{4m}\alpha_{(1-2m)i}+\sum_{i=1}^{4m}\beta_{(2m-1)i}+4m =$$

$$= 4m\sum_{i=1}^{4m}\alpha_i+\sum_{i=1}^{4m}\beta_i+4m =$$

$$= 4m\sum_{i=1}^{4m} \; + \; \sum_{i=1}^{4m}\beta_i+4m = 2m(16m^2+1)$$

(לפי שיקולים דומים לאלה של המקרה הקודם)
ושוב מגיעים מיד למסקנה.

בסיכום נוכל לתת תרשים לבנית ריבועי קסם מסדר $4m$:

א) ליצור שתי סדרות $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{4n}\}$, $\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_{4m}\}$
שתיהן תמורות של סדרת המספרים $\{0,1,2,\dots,4m-1\}$
המקיימות עבור $1\le r\le 2m$
$\beta_r+\beta_{2m+r}=\alpha_r+\alpha_{2m+r}=4m-1$

ב) להגדיר את המטריצה $A=\{a_{ij}\}$ ע"י

$$a_{ij}= 4m\alpha_{i+2mj} + \beta_{2mi+j}+1$$

כאשר כל הסיומות מחושבות $(\mathrm{mod}\ 4m)$.
המערכת a_{ij} תהווה ריבוע קסם מסדר $4m$.

דוגמה:

ניקח $m=1$ ונגדיר: -

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\} = \{0,2,3,1\}$$

$$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\} = \{3,1,0,2\}$$

המשך בע' 31.

פתרון בעיות מהאולימפיאדה
המתמטית הבינלאומית - 1988

1. נתונים שני מעגלים, בעלי מרכז משותף O ורדיוסים R ו-r ($R>r$). P היא נקודה קבועה על המעגל הקטן, וישר העובר דרך P פוגש את המעגל הגדול ב- B,C. A היא נקודה על המעגל הגדול כך ש-AP מאונך ל BC.

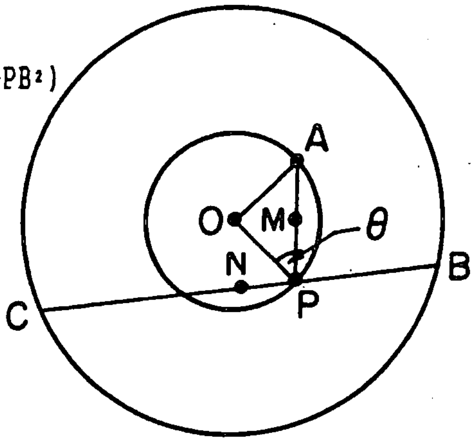
(i) קבע את קבוצת הערכים האפשריים של $BC^2+AB^2+CA^2$, כאשר הישר BPC משתנה.

(ii) אם U הוא האמצע של AB, ו-V הוא האמצע של AC, קבע את מקומם ההנדסי של U, V.

<u>פתרון :</u>

תהא $\sphericalangle OPA=\theta$ ויהיה PO הקוטר העובר דרך P; ו-M,N אמצעי הקטעים BC ו-PA בהתאמה (ראה ציור). ברור כי

$$S = BC^2+CA^2+AB^2$$
$$= (BP+PC)^2+(PC^2+PA^2)+(PA^2+PB^2)$$
$$= 2(PA^2+PB^2+PC^2+PB\cdot PC)$$



אבל

$$PA = 2r\cos\theta$$
$$PB = BN-PN = \sqrt{R^2-r^2\cos^2\theta} -r\sin\theta$$
$$PC = PN+NC = \sqrt{R^2-r^2\cos^2\theta} +r\sin\theta$$

ולכן

$$PB\cdot PC = R^2-r^2$$

יוצא כי

$$S=2\{4r^2\cos^2\theta+2(R^2-r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)+R^2-r^2)\} = 6R^2+2r^2$$

ומכאן שהסכום S קבוע ואינו תלוי ב-θ.

יהיה B'AC' מיתר של המעגל הגדול המקביל ל-BC ועובר דרך A. אזי PAB'B, PAC'C, הם מלבנים, ולכן אמצע BA מתלכד עם האמצע של PB', כלומר - $PU=½PB'$,

וכמו כן $PV=\frac{1}{2}PC'$. אבל $B'C'$ נעים לאורך היקף המעגל הגדול ולכן יש ל-U ול-V אותו מקום הנדסי, דהיינו מעגל בעל רדיוס R/2 אשר מרכזו האמצע של PO.

2. נתון מספר שלם n ו- $A_1, A_2 \ldots A_{2n+1}$ שהם 2n+1 קבוצות, כל אחת בעלת 2n איברים. כמו כן נתון, כי לכל זוג מבין הקבוצות האלה יש בדיוק איבר אחד משותף, בעוד כל איבר של האיחוד

$$B=\bigcup_{i=1}^{2n+1} A_i$$

שייך לפחות לשתיים מהקבוצות הנתונות. רוצים להתאים לכל איבר מהאיחוד הזה אחד המספרים 0 או 1, כך שבכל אחת מהקבוצות A_r $(r=1,2\ldots 2n+1)$ יהיו בדיוק n איברים אשר להם מותאם 0. עבור אילו ערכים של n אפשרי הדבר?

<u>פתרון:</u>

ראשית כל נוכיח כי כל איבר של B שייך <u>בדיוק</u> לשתיים מהקבוצות A_i כי ברור ש-

$$A_j=\bigcup_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{2n+1}(A_j\cap A_i) \qquad (j=1,2,\ldots,2n+1)$$

אם ישנן שלוש קבוצות, נגיד A_3, A_2, A_1, בעלות איבר משותף a, הרי היינו מסיקים כי בכל אחת מהקבוצות

$(A_1\cap A_2),(A_1\cap A_3),(A_1\cap A_i),(i=4,5,\ldots,2n+1)$

יש בדיוק איבר אחד, ולכן מספר אברי A_1 יהיה לא גדול מ-(2n-1), בניגוד לנתון.

עכשיו נוכיח כי תנאי מספיק והכרחי לכך שאפשר להתאים 0 או 1 לכל אברי B באופן הדרוש הוא ש- n יהיה זוגי.

הכרחי. נניח שהדבר אפשרי. נבנה מטריצה $2n \times 2n$ כדלקמן:
עבור $i \neq j, 1 \le i, j \le 2n$ יהיה a_{ij} שוה למספר שהותאם לאבר (היחידי) של $A_i \cap A_j$. עבור $i=j$ יהיה a_{ii} שוה למספר שהותאם לאיבר היחידי של $A_i \cap A_{2n+1}$. במטריצה כולה, שהיא סימטרית, סביב האלכסון הראשי נמצאים $2n^2$ אפסים, שזה מספר זוגי. לכן מספר האפסים שבאלכסון הראשי, n, חייב גם כן להיות זוגי.

מספיק. אם n זוגי, נגיד, $n=2k$, נוכל להתבסס על המטריצה

$$T=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

והמטריצה

$$S=\begin{bmatrix} T & T & \dots & T \\ T & T & \dots & T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T & T & \dots & T \end{bmatrix}$$

הבנויה מטבלה של $k \times k$ עותקים של T, תקיים את כל התנאים.

3. הפונקציה $f(n)$ מוגדרת על המספרים הטבעיים וגם ערכי הפונקציה הם כולם מספרים טבעיים. נתון כי:

$f(1)=1$, $f(3)=3$

ועבור כל n, $f(2n)=f(n)$

$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n)$

$f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n)$

כמה מספרים טבעיים ישנם מ-1 עד 1988 המקיימים $f(n)=n$? נמק!

<u>פתרון:</u>

אם נחשב את $f(n)$ עבור כמה ערכים קטנים של n, נתרשם כי $f(n)$ הוא המספר שמתקבל כאשר כותבים את n בצורה בינרית והופכים את סדר הסיביות.

<u>לדוגמה.</u> עבור $n=6$ נקבל $n=(110)_2$ ואמנם $f(n) = 3 = (011)_2$

כמו כן $13=(1101)_2$ ואילו $f(n)= 11 = (1011)_2$.

נוכיח בעזרת אינדוקציה שדבר זה נכון עבור כל n.

מאחר ש-$f(2n)=f(n)$ נוכל להצטמצם למספרים אי-זוגיים. ישנן שתי אפשרויות:-

א) $n=4m+1= \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j \cdot 2^j$ כאשר $\varepsilon_1=0$ $\varepsilon_0=1$

במקרה זה יהיה

$$m = \sum_{j=2}^{k} \varepsilon_j \cdot 2^{j-2}$$

$$2m+1 = 1 + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j \cdot 2^{j-1}$$

לפי ההנחה האינדוקטיבית נקבל

$$f(2m+1) = 2^{k-1} + \sum_{j=2}^{k} \varepsilon_j \cdot 2^{(k-1)-(j-1)}$$

$$=2^{k-1} + \sum_{j=2}^{k} \varepsilon_j \cdot 2^{k-j}$$

בעוד $f(m) = \sum_{j=2}^{k} \varepsilon_j \cdot 2^{k-j}$

ולכן

$$f(4m+1) = 2f(2m+1) - f(m)$$

$$= 2^k + 2\sum_{j=2}^{k} \varepsilon_j \cdot 2^{k-j} - \sum_{j=2}^{k} \varepsilon_j \cdot 2^{k-j}$$

$$= 2^k + 2\sum_{j=2}^{k} \varepsilon_j \cdot 2^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j \cdot 2^{k-j}$$

האפשרות השניה היא:

$$n = 4m+3 = \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j \cdot 2^j$$

כאשר $\varepsilon_0=\varepsilon_1=1$ יוצא כי

$$m = \sum_{j=2}^{k} \varepsilon_j \cdot 2^{j-2}$$

ואילו

$$2m+1 = 1+\sum_{j=2}^{k} \varepsilon_j \cdot 2^{j-1}$$

ולכן, בדומה למקרה הקודם נקבל

$$f(4m+1) = 3f(2m+1)-2f(n)$$

$$= 2^k+2^{k-1} + \sum_{j=2}^{k} \varepsilon_j \cdot 2^{k-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j \cdot 2^{k-j}$$

המשואה $f(n)=n$ תתקים אפוא אם ורק אם n סימטרי, (כלומר סדרת הסיביות בהצגתו הבינרית היא סימטרית). יהיה $\psi(k)$ המספר של מספרים סימטריים בעלי k סיביות. ברור כי: (למה?)

$$\psi(2k) = \psi(2k-1) = 2^{k-1}$$

מאידך

$$2^{10} < 1988 < 2048 = 2^{11}$$

עכשיו מספר המספרים הסימטריים הקטנים מ- 2^{11} הוא

$$2\sum_{r=0}^{4} 2^{r}+2^{5} = 94$$

מאידך ישנם בדיוק שני מספרים סימטריים בעלי 11 ספרות שהם גדולים מ-1988
(הקורא מתבקש לבדוק נקודה זו) ולכן מספר הפתרונות של $f(n)=n$ שהם קטנים מ-
1988 הוא 2-94, דהינו 92.

4. הוכח כי קבוצת המספרים הממשיים x המקיימים את אי-השוויון

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq 5/4$$

היא איחוד של אינטרולים זרים אשר סכום אורכיהם הוא 1988.

<u>פתרון:</u>

נגדיר $f(x) = \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k}$.

אם נציר את הגרף של הפונקציה $f(x)$, נראה מיד כי קבוצת האמת של
אי השויון

$$f(x) \geq 5/4$$

היא האיחוד של האינטרולים $(i,x_i]$ $(i=1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots,70)$
כאשר

$$i<x_i<i+1<x_{i+1}$$

עבור $1\leq i\leq 69$, והמספרים x_i הם שורשי המשואה

$$\psi(x) = 5\prod_{j=1}^{70}(x-j) - 4\sum_{k=1}^{70} k\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{70}(x-j) = 0$$

סכום אורכי האינטרולים הללו הוא:

$$\sum_{j=1}^{70} (x_j - j)$$

קל לראות כי

$$\psi(x) = 5x^{70} - 9x^{69} \cdot \sum_{j=1}^{70} j + \ldots..$$

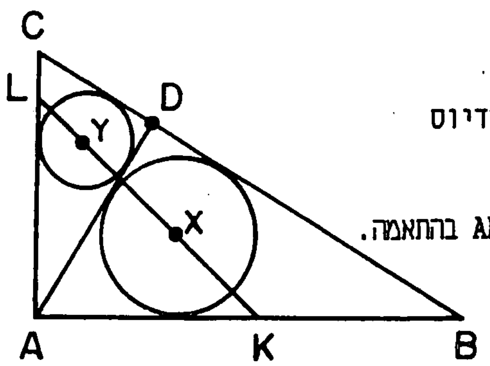
ולכן מנוסחת ויטה (VIETA) נקבל שסכום אורכי האינטרולים הוא

$$\frac{9}{5} \sum_{j=1}^{70} j - \sum_{j=1}^{70} j$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \sum_{j=1}^{70} j = \frac{4}{5} \cdot \frac{70 \cdot 71}{2} = 1988$$

5. במשולש ABC, A היא זוית ישרה ו-D היא עקב הגובה מ-A ל-BC. הישר העובר דרך מרכזי המעגלים החסומים במשולשים ABD,ACD פוגש את הצלעות AC, AB בנקודות K,L בהתאמה. אם S,T הם שטחי המשולשים ABC, AKL בהתאמה, הוכח כי $S \geq 2T$.

<u>פתרון:</u>



נסמן כרגיל את אורכי הצלעות BC, CA, AB ב- c, b, a בהתאמה.

נתון כי $\measuredangle BAC = \measuredangle BDA = 90^\circ$. יהיה r הרדיוס של המעגל החסום במשולש ABC, ו- r_1, r_2 הרדיוסים של המעגלים החסומים ב- ACD, ABD בהתאמה.

ידוע כי שטח המשולש הוא

$$S = bc/2 = rs$$

כאשר $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

מאחר שהמשולשים DBA , ABC דומים, קיים

$$r_1 = rc/a$$

וכמו כן
$$r_2 = rb/a$$

יהיו Y, X מרכזי המעגלים החסומים במשולשים CBA, ABD בהתאמה, ו- L, K נקודות הפגישה של הישר XY עם AC ו- AB בהתאמה.

ברור ש- $\measuredangle ADX=\measuredangle ADY=45^\circ$ ולכן $\measuredangle XDY=90^\circ$. מאידך קל לראות כי

$$DX = r_1\sqrt{2} = rc\sqrt{2}/a$$

$$DY = r_2\sqrt{2} = rb\sqrt{2}/a$$

ולכן המשולשים XDY,BAC דומים. יוצא כי

$$\measuredangle DYX = \measuredangle BCA$$

$$\measuredangle DXY = \measuredangle CBA$$

קל להוכיח (את זה נשאיר לקורא) כי $\measuredangle BLK = 135^\circ$ = $\measuredangle BKL$ ולכן AKL הוא משולש שוה שוקיים. יהיה XZ האנך מ-X ל-AB ואז

$$XZ = r_1 = rc/a = c(s-a)/a$$

מאידך
$$AZ = c(s-c)/c$$

ומכאן

$$AL = AK = c(2s-a-c)/c = bc/a$$

מזה נובע כי

$$S/T = \left[\frac{ab}{bc}\right] \cdot \left[\frac{ac}{bc}\right] = \frac{a^2}{bc} = \frac{b^2+c^2}{bc} \geq \frac{2bc}{bc} = 2$$

6. a,b הם מספרים טבעיים כך ש- $(ab+1)$ מחלק את (a^2+b^2). הוכח כי

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

הוא ריבוע שלם.

<u>פתרון</u> (פתרון של שוני דר)

$$x = \frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

כאשר a,b,x הם מספרים שלמים ו- $a \geq b \geq 0$ ברור שאם $a=b$ אזי יהיה x שלם אך ורק עבור $a=b=1$ ואז גם $x=1$, שהוא ריבוע שלם. נסתכל איפוא במקרה $a>b$. במקרה זה נוכיח שקיימים מספרים שלמים (a_1,b_1) כך ש:-

$$a_1 > b_1 \geq 0$$

$$(a_1^2+b_1^2)/(a_1b_1+1) = x$$

$$a_1+b_1 < a+b$$

אם גם $b_1>0$ נוכל להמשיך כנה גם ל- (a_2,b_2), ... עד שנגיע ל- (a_n,b_n) עם $b_n=0$. אבל אז נקבל $x=a_n^2$ שהוא ריבוע שלם.
נגדיר:

$$a_1 = b$$

$$b_1 = bx-a$$

$$= \frac{b^3-a}{ab+1}$$

נעיר כי $b^2x-ba+1$, שהוא מספר שלם, שווה ל-

$$(b^4+1)/(ab+1)$$

ולכן

$$ab+1 \le b^4+1$$

ומכאן

$$a \le b^3$$

אם $a=b^3$ אזי יהיה $b_1=0$, $x=a_1^2$.

אחרת $a<b^3$ ו-

$$b_1 = \frac{b^3-a}{ab+1} < \frac{b^2a+a}{ab+1} = b = a_1$$

ולכן

$b_1 + a_1 < 2b \le a+b$.

נשאר להוכיח שאמנם

$$\frac{a_1^2+b_1^2}{a_1b_{1+1}} = x$$

אבל זה נובע ישירות מההגדרה של b_1,a_1.

על החלוקות של מספר טבעי

ר' הולצמן (רחובות)

עבור מספר טבעי n, <u>חלוקה</u> של n היא סדרה של מספרים טבעיים $a_1,a_2,\dots,a_k$ כך ש- :

$$a_1 \le a_2 \le \dots \le a_k \ , \quad a_1+a_2+\dots+a_k = n$$

לשם קיצור, נסמן חלוקה כזאת ע"י $\underline{a}$; אורך החלוקה (מספר אברי הסדרה יסומן $k(\underline{a})$. קבוצת כל החלוקות של n תסומן $P(n)$).

נגדיר העתקה (פונקציה) T מ- $P(n)$ לתוך $P(n)$ כדלקמן : $T(\underline{a})$ היא החלוקה שאבריה הם המספרים a_i-1, כאשר i עובר על כל האינדכסים ב- $\{1,\dots,k(\underline{a})\}$ שעבורם $a_i>1$, ועל המספר הנוסף $k(\underline{a})$. למשל אם $n=11$ ו- a היא החלוקה $1,1,3,6$ אז $T(a)$ היא החלוקה $2,4,5$ (יש לשים לב כי המספר $k(\underline{a})$, במקרה זה 4, ממוקם בחלוקה $T(a)$ כך שישמר סדר המספרים לפי גדלם).

נתחיל מ- $a\in P(n)$ כלשהי, ונפעיל את ההעתקה T בזה אחר זה. אם נתבונן בסדרת החלוקות המתקבלת

$$\underline{a},\ T(\underline{a}),\ T^2(\underline{a}),\ T^3(\underline{a}),\ \dots$$

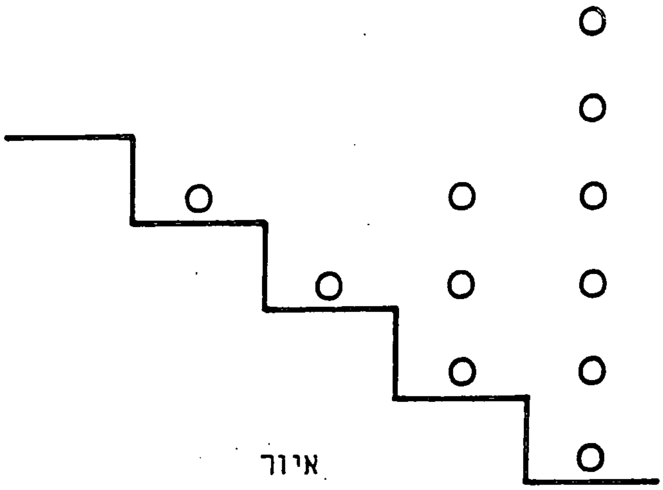
חייבים להגיע למחזור, כי הרי $P(n)$ היא קבוצה סופית. להלן נציג תיאור מלא של כל המחזורים האפשריים של T עבור n כלשהו.

<u>טענה 1</u>. אם $\underline{a}\in T(P(n))$ (דהיינו, a מתקבלת בטווח של T) אזי $a_k \ge k-1$.

<u>הוכחה</u>. נניח $\underline{a} = T(\underline{a'})$ אזי $a_k \ge k(\underline{a'}) \ge k(\underline{a})-1$ (אי השוויון השמאלי נובע מכך ש- $k(\underline{a'})$ הוא אחד ה-a_i, ואילו הימני נובע מכך שבהפעלת T אורך החלוקה גדל ב-1 לכל היותר).

<u>טענה 2</u>. אם $\underline{a}$ שייכת למחזור של T (דהיינו קיים m טבעי כך ש- $T^m(\underline{a}) = \underline{a}$) אזי $k \ge a_k-1$.

__הוכחה__. נציג כל $\underline{a}\in P(n)$ על ידי סידור n כדורים ב-k עמודות בגדלים $a_1,a_2,\dots,a_k$ המוצבות משמאל לימין על בסיס דמוי מדרגות יורדות.
למשל, החלוקה 1,1,3,6 של 11 מוצגת על-ידי:



איור

כדי לקבל את ההצגה של $T(\underline{a})$ מתוך זו של $\underline{a}$, אנו מבצעים את הפעולות הבאות:

(א) מזיזים את הכדור התחתון בכל עמודה באופן אפקי אל העמודה הקיצונית מימין (יש לשים לב כי הכדור התחתון בעמודה זאת נשאר במקומו).

(ב) מזיזים כל כדור אחר באופן אפקי מקום אחד שמאלה.

(ג) מסדרים את העמודות שנתקבלו כך שגדליהן יהיו בסדר לא יורד משמאל לימין.

אנו מגדירים את __האנרגיה__ של $\underline{a}$ בתור סכום הגבהים של הכדורים (הנמדדים באופן אנכי ביחס לקו אופקי קבוע). הפעולות (א) ו-(ב) דלעיל משמרות את האנרגיה, ואילו החלפת שתי עמודות a,b כדי לקבל b,a (כאשר $a>b$) מפחיתה את האנרגיה. מכאן נובע כי לאורך מחזור של T האנרגיה היא קבועה, ופעולה (ג) איננה נדרשת, דהיינו, $k \geq a_k-1$.

מכאן ולהבא, נתבונן במחזור של T

$$\underline{a}^0, \underline{a}^1,\dots,\underline{a}^{m-1}, \underline{a}^m = \underline{a}^0$$

(כלומר $T(\underline{a}^i) = \underline{a}^{i+1}$ עבור $i=0,\dots,m-1$; כאן , ובהמשך , חיבור וחיסור לאורך

המחזור יש לבצע מודולו m - למשל, אם $i = m-1$ אז $\underline{a}^{i+1} = \underline{a}^{0}$). נסמן עבור
$i = 0,\dots,m-1$:

$$k_i = k(\underline{a}^i)$$

מטענה 2 נובע כי

$$a^{i}_{k_i} = k_{i-1}, \quad a^{i}_{k_{i-1}} = a^{i-1}_{k_{i-1}} - 1 = k_{i-2} - 1,$$

וכן הלאה. אנו מקבלים את העובדות החשובות הבאות:

$$(*) \quad a^{i}_{k_{i-h}} = k_{i-1-h} - h \qquad (h=0,1,\dots,k_i-1)$$

$$(**) \quad k_{i-1-k_i} - k_i \le 0$$

<u>טענה 3</u>. $|k_i - k_j| \le 1$ לכל $i,j \in \{0,\dots,m-1\}$.

<u>הוכחה</u>. נטפל תחילה במקרה $j=i+1$. מטענות 1 ו-2 נובע כי
$|a^{j}_{k_j} - k_j| \le 1$. מכיון ש- $a^{i}_{k_j} = k_i$, מקבלים $|k_i - k_j| \le 1$.

נניח עתה שהטענה אינה נכונה. אזי קיים קטע של המחזור
$k_0,k_1,\dots,k_{m-1}, k_m = k_0$ שצורתו:

$$k, \underbrace{k-1, \dots, k-1}_{v \text{ פעמים}}, k-2$$

מבין כל הקטעים שצורתם כזאת, נבחר קטע שעבורו v הוא מינימלי. תהי $\underline{a}^i$ החלוקה במחזור המתאימה לקצה הימני של הקטע;
לפיכך $k_i = k-2$.

על סמך החלק הראשון של ההוכחה, $v \ge 1$. נראה גם כי $v \le k-2$. ואמנם אם
$v \ge k-1$, אזי $i-1-k_i = i-(k-1) \ge i-v$; מכיון שבמקומות $i-v$ עד $i-1$

במחזור אורך החלוקה הוא תמיד $k-1$, הרי ש- $k_{i-1-k_i}=k-1$, אך זה סותר
את (**).

שימוש ב- (*) עבור $\underline{a}^{i+1}$ מראה כי $V+2$ האיברים האחרונים שלה הם:

$$k-v-1 , k-v-1 , k-v , \dots , k-3 , k-2 , k-2$$

(כאן מסתמכים על כך ש- $k-v-1\geq1$) מכאן נובע שקיים קטע של המחזור,
שתחילתו $k-v-2$ צעדים הלאה וצורתו:

$$k' , \underbrace{k'-1 , \dots , k'-1}_{\text{פעמים } v-1} , k'-2$$

אך זה סותר את המינימליות של v.

נסמן $k^* = \max_{0\leq i\leq m-1} k_i$. על סמך טענה 3, לכל $i = 0 , \dots , m-1$:

$$k^*-1\leq k_i\leq k^*$$

שימוש ב- (*) נותן

$$(***)\quad k^*-1-h \leq a^i_{k_{i-h}} \leq k^*-h \quad (h=0, \dots , k_i-1)$$

אם נתבונן ב-i המקיים $k_i=k^*$ ונשים לב כי עבור $h = k^*-1$ אי
השוויון השמאלי הוא חזק, נוכל לחבר את אי השוויונים ולקבל:

$$\begin{bmatrix}k^*\\2\end{bmatrix} < n \leq \begin{bmatrix}k^*+1\\2\end{bmatrix}$$

כעת ניתן לכתוב את n באופן יחיד בצורה:

$$n = \begin{bmatrix}t\\2\end{bmatrix} + r \qquad (0 < r \leq t)$$

המחזור יש לבצע מודולו m - למשל, אם $i = m-1$ אז $(\underline{a}^{i+1} = \underline{a}^0)$. נסמן עבור $i = 0,\dots,m-1$:

$$k_i = k(\underline{a}^i)$$

מטענה 2 נובע כי

$$a^i_{k_i} = k_{i-1}, \quad a^i_{k_{i-1}} = a^{i-1}_{k_{i-1}} - 1 = k_{i-2} - 1,$$

וכן הלאה. אנו מקבלים את העובדות החשובות הבאות:

$$(*) \quad a^i_{k_{i-h}} = k_{i-1-h} - h \qquad (h=0,1,\dots,k_i-1)$$

$$(**) \quad k_{i-1-k_i} - k_i \le 0$$

<u>טענה 3</u>. $|k_i - k_j| \le 1$ לכל $i,j \in \{0,\dots,m-1\}$.

<u>הוכחה</u>. נטפל תחילה במקרה $j=i+1$. מטענות 1 ו-2 נובע כי $|a^j_{k_j} - k_j| \le 1$. מכיון ש- $a^i_{k_j} = k_i$, מקבלים $|k_i - k_j| \le 1$.

נניח עתה שהטענה אינה נכונה. אזי קיים קטע של המחזור $k_0, k_1, \dots, k_{m-1}, k_m = k_0$ שצורתו:

$$k, \underbrace{k-1, \dots, k-1}_{v \text{ פעמים}}, k-2$$

מבין כל הקטעים שצורתם כזאת, נבחר קטע שעבורו v הוא מינימלי. תהי $\underline{a}^i$ החלוקה במחזור המתאימה לקצה הימני של הקטע; לפיכך $k_i = k-2$.

על סמך החלק הראשון של ההוכחה, $v \ge 1$. נראה גם כי $v \le k-2$. ואמנם אם $V \ge k-1$, אזי $i-1-k_i = i-(k-1) \ge i-v$; מכיוון שבמקומות $i-v$ עד $i-1$

במחזור אורך החלוקה הוא תמיד $k-1$, הרי ש- $k_{i-1-k_i}=k-1$, אך זה סותר את (**).

שימוש ב- (*) עבור $\underline{a}^{i+1}$ מראה כי $V+2$ האיברים האחרונים שלה הם:

$$k-v-1 \ , \ k-v-1 \ , \ k-v \ , \ \dots \ , \ k-3 \ , \ k-2 \ , \ k-2$$

(כאן מסתמכים על כך ש- $k-v-1\geq 1$) מכאן נובע שקיים קטע של המחזור, שתחילתו $k-v-2$ צעדים הלאה וצורתו:

$$k' \ , \ \underbrace{k'-1 \ , \ \dots \ , \ k'-1}_{v-1 \ \text{פעמים}} \ , \ k'-2$$

אך זה סותר את המינימליות של v.

נסמן $k^* = \max_{0\leq i\leq m-1} k_i$. על סמך טענה 3, לכל $i = 0 \ , \ \dots \ , \ m-1$:

$$k^*-1\leq k_i\leq k^*$$

שימוש ב- (*) נותן

$$(***) \quad k^*-1-h \leq a^i_{k_{i-h}} \leq k^*-h \quad (h=0, \ \dots \ , \ k_i-1)$$

אם נתבונן ב-i המקיים $k_i=k^*$ ונשים לב כי עבור $h = k^*-1$ אי השוויון השמאלי הוא חזק, נוכל לחבר את אי השוויונים ולקבל:

$$\left[\frac{k^*}{2}\right] < n \leq \left[\frac{k^*+1}{2}\right]$$

כעת ניתן לכתוב את n באופן יחיד בצורה:

$$n = \left[\frac{t}{2}\right] + r \qquad (0 < r \leq t)$$

מכאן שבהכרח $k^*=t$. במקרה המיוחד שבו n מספר משולשי (כלומר $r=t$), כל אי השוויונים הימניים לעיל חייבים להתקיים עם שויון, ולפיכך:

$$\underline{a}^i = 1,2,\ldots,t$$

כפי שרואים מייד מועתקת חלוקה זו על-ידי T לעצמה. הראינו אפוא כי עבור n משולשי יש ל-T מחזור יחיד, והוא מורכב מן החלוקה הבודדת $1,2,\ldots,t$.

עבור n כללי המצב מסובך יותר. אבל עדיין מקבלים תאור מלא כדלקמן.

<u>משפט</u>. נניח כי $n=\binom{t}{2}+r$ כאשר $0<r\le t$. נסמן:

$$B_{t,r}=\{\underline{b}=(b_1,\ldots,b_t) : b_i=0 \text{ או } 1 \ (i=1,\ldots,t), \sum_{i=1}^{t} b_i=t-r\}$$

(כלומר, $B_{t,r}$ היא קבוצת כל הסדרות של t מספרים, אשר r מהם 0 ו- $t-r$ מהם 1.)
תהי π התמורה הפועלת על $B_{t,r}$ כסיבוב פשוט:
$\pi(b_1,\ldots,b_t) = (b_2,\ldots,b_t,b_1)$. עבור $\underline{b}\in B_{t,r}$, תהי $f(\underline{b})$ החלוקה
$1-b_1,2-b_2,\ldots, t-b_t$

של n (אם $b_1=1$ יש להתעלם מן האיבר הראשון). אזי f היא התאמה חד-חד-ערכית בין $B_{t,r}$ לבין האיחוד $C=C_1\cup\cdots\cup C_m$ של כל המחזורים של T. יתר על כן $f\circ\pi=T\circ f$ (כלומר, הפעלת π ולאחריה f מביאה תמיד לאותה חלוקה כמו הפעלת f ולאחריה T). בפרט כל C_i מתאים למחזור של π. לפיכך מספר המחזורים הוא כמספר המחרוזות השונות של t חרוזים, r מהם לבנים ו- $t-r$ מהם שחורים (כשאין מבחינים בין שתי מחרוזות המתקבלות זו מזו על-ידי סיבוב); מספר זה נתון ע"י הנוסחה

$$m = \frac{1}{t}\sum \phi(d)\binom{t/d}{r/d}$$

שבה ϕ היא פונקצית אוילר (כלומר $\phi(d)$ הוא מספר המספרים הטבעיים הקטנים או

השווים מ-$\hat{d}$ והזרים ל-$\hat{d}$) והסכום עובר על כל המחלקים d של המחלק המשותף המכסימלי של t ו-r.

המספר הכולל של חלוקות השייכות למחזור של T הוא

$$.|C|=\begin{bmatrix}t\\r\end{bmatrix}$$

<u>הוכחה</u>: למרבה המזל הוכחת משפט זה קצרה מניסוחו (הודות להכנות שקדמו לו). קל לבדוק כי $f(\underline{b})$ היא אכן חלוקה של n, וכי f חד-חד-ערכית. כעת,

$$(f\circ\pi)(\underline{b}) = f(b_2,\dots,b_t,b_1) = 1-b_2,\dots,\ t-1-b_t,\ t-b_1$$

$$(T\circ f)(\underline{b})=T(1-b_1,2-b_2,\dots,t-b_t)=1-b_2,\dots,t-1-b_t,k(f(\underline{b})).$$

מכיון ש-$k(f(\underline{b}))$ הוא t או t-1 בהתאם לכך אם b_1 הוא 0 או 1 שתי התוצאות שוות. לפיכך, $f\circ\pi=T\circ f$. מאחר שכל $\underline{b}\in B_{t,r}$ שייך למחזור של π, נובע כי כל $f(\underline{b})$ שייך למחזור של T, ולפיכך f מקבלת את כל ערכיה בתוך C.
בכיוון הפוך בעזרת (***) ניתן לכתוב כל $\underline{a}\in C$ בצורה
$1-b_1,2-b_2,\dots,t-b_t$ כאשר כל b_i הוא 0 או 1 ו-

$$;\sum_{i=1}^{t} b_i = t-r$$

לפיכך כל חלוקה ב-C מתקבלת ע"י f. בכך הוכחו כל חלקי המשפט, למעט הנוסחה עבור מספר המחרוזות הנובעת ממשפט יסודי בקומבינטוריקה (משפט Polℓya).

לסיום, נדגים את השימוש במשפט עבור $n = 6,7,8$:

א) המספר 6 משולשי, עם $t=r=3$. יש מחרוזת יחידה בת שלושה חרוזים לבנים, ולה מתאים $\underline{b}$ יחיד והוא $(0,0,0)$, אשר לו מתאימה החלוקה $1-0,2-0,3-0=1,2,3$.
לפיכך לכל $\underline{a}\in P(6)$ הסדרה $\underline{a},T(\underline{a}),T^2(\underline{a})$ מגיעה בשלב מסוים לחלוקה 1,2,3 ונשארת שם.

ב) המספר 7 נכתב כ- $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}+1$, ולפיכך $t=4$, $r=1$.

בהתאם לכך יש שני מחזורי חלוקות:

2,2,4	1,3,4
1,1,3,3	2,3,3
	1,2,2,3
	1,1,2,4

המספר הכולל של חלוקות השייכות למחזור הוא, כאמור במשפט $6=\begin{bmatrix}4\\ \cdot\\ 2\end{bmatrix}$

אם יוצאים מ- $\underline{a}\in P(8)$ והולכים לאורך הסדרה $\underline{a},T(\underline{a}),T^2(\underline{a}),\ldots$ מגיעים תמיד לאחד משני המחזורים דלעיל ומשם והלאה מסתובבים בו.

המשך מעי 12

עכשיו בהתאם לחדשים ניקח

$$a_{ij} = 4\alpha_{i+2j}+\beta_{2i+j}+1$$

$$a_{11} = 4\alpha_3+\beta_3+1 = 13$$

$$a_{12} = 4\alpha_1+\beta_4+1 = 4\alpha_1+\beta_4+1 = 3$$

$$a_{13} = 4\alpha_3+\beta_1+1 = 16$$

$$\alpha_{14} = 4\alpha_1+\beta_2+1 = 2$$

ולכן השורה הראשונה של המטריצה תהיה:

(13 ,3 ,16 ,2)

נוכל לחשב בדרך זו את כל המטריצה, ובסוף נקבל את ריבוע הקסם: -

13	3	16	2
8	10	5	11
1	15	4	14
12	6	9	7

אשר כל שורותיו, עמודותיו ואלכסוניו מסתכמים ב-34.

בעיות חדשות

(הוצעו ע"י ז. גייזל)

.69 $\{a_1\ a_2\ \ldots\ldots\ldots,a_{300}\}$ הם סדרה של 300 מספרים טבעיים וידוע כי מבין כל שלושה איברים שלה יש תמיד שניים אשר אחד הוא כפולה של השני.

הוכח כי:

$$\sum_{r=1}^{300} a_r \geq 6(2^{100}-1)$$

האם יתכן שוויון?

.70 הוכח כי עבור כל x,y,z חיוביים

$$x^x \cdot y^y \cdot z^z \geq xyz^{\frac{x+y+z}{3}}$$

.71 הנקודות P,Q,R נמצאות מחוץ למשולש ABC ונתון כי:

$$AQ^2+CP^2+BR^2 = QC^2+PB^2+RA^2$$

הוכח כי הניצבים מ-P,Q,R לישרים BC,CA,AB בהתאמה נפגשים בנקודה אחת.