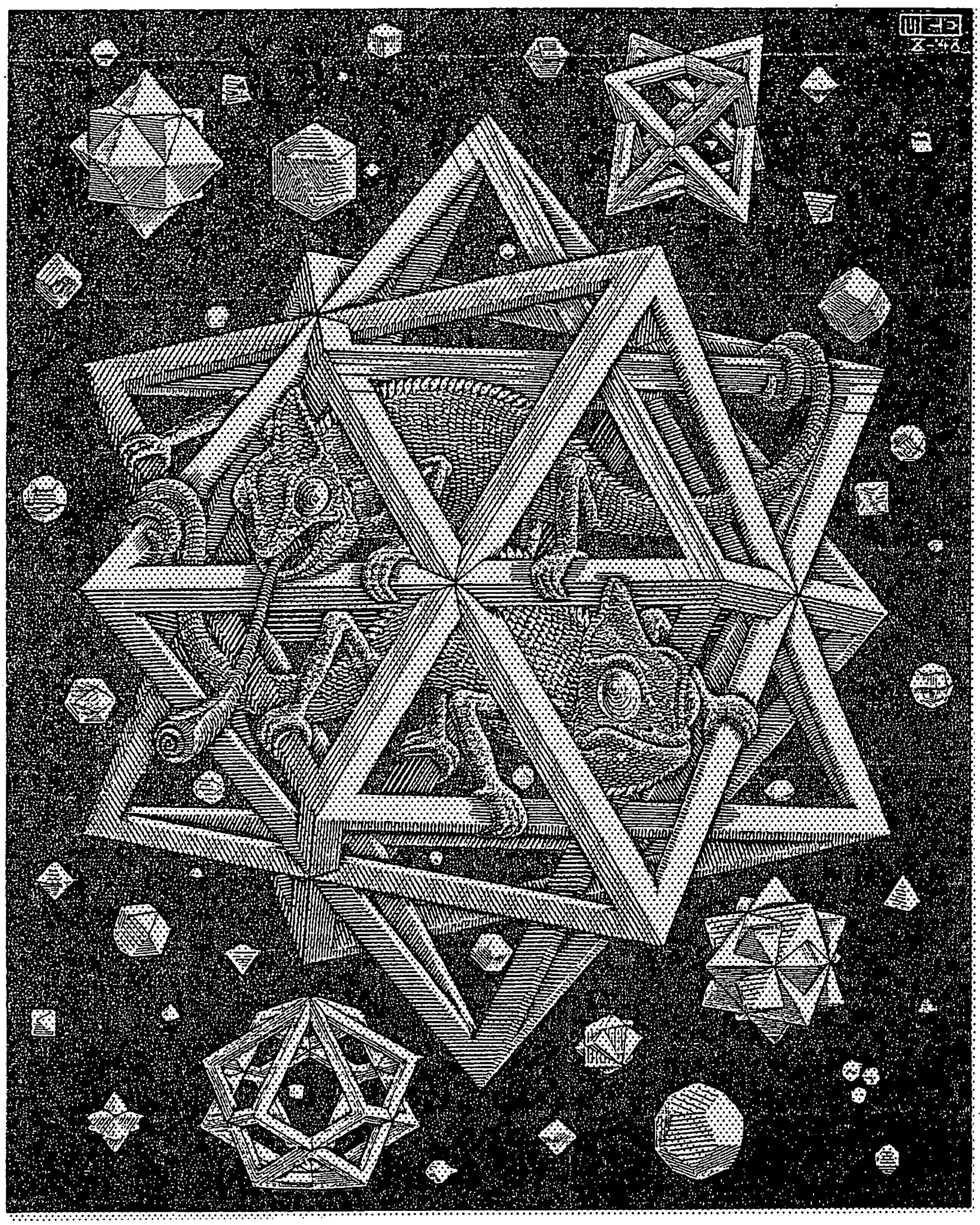
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס' 27 27/28

תשרי תשנ"ד - אוקטובר 1993



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון ויצמן למדע
רחובות

תוכן העניינים

אתגר - גליונות מתמטיקה ISBN = 0334-201

מוצא לאור ע"י הפקולטות למתמטיקה במכון ויצמן ובטכניון.

המערכת:

פרופ' א. ברמן, ד"ר צ. הראל, א. לוי, הפקולטה למתמטיקה בטכניון.

פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שימושית, מכון וייצמן.

הדפסה: חיה איציקוביץ, היחידה לפעולות נוער, מכון ויצמן.

מען המערכת: היחידה לפעולות נוער, מכון ויצמן למדע רחובות 76100 טל-08-343959.

דבר המערכת

בגליון כפול זה אנו מסיימים את שנת הפעילות של מכון ויצמן בעריכת "אתגר" גליונות מתמטיקה. החל מהחוברת הבאה עוברת עריכת העתון לטכניון.

שנת תשנ"ג החולפת היתה שנה מוצלחת עבור חובבי מתמטיקה ישראלים, לפחות במישור הבינלאומי. באולימפיאדה הבינלאומית שהתקיימה באיסטנבול ביולי, השיגו ישראלים תוצאות מכובדות למדי. מבין ששת חברי הנבחרת זכה אחד במדלית זהב, שניים זכו במדלית כסף ושניים במדלית ארד. תיאור מפורט של האירוע תוכלו למצוא בעמוד 20 של גליון זה.

עכשיו אנו פונים לקראת העתיד. במשך שנת תשנ"ד צפויים לנו שני אירועים בינלאומיים; האולימפיאדה הבינלאומית שתתקיים בהונג-קונג ותחרות דו-לאומית נגד הונגריה. לקראת האירועים האלה יתקיימו כמה חוגים ללימודים ואימונים.

כל המעוניין להצטרף לחוג כזה, מתבקש לנסות את כוחו להתמודד עם השאלה בעמוד זה למטה, ולשלוח פתרון (גם רק חלקי!) יחד עם הטופס המצ"ב **לפני התאריך- 31.10.93, אל:**

היחידה לפעולות נוער, מכון ויצמן למדע, רחובות 76100

הוכח כי עבור כל a,b,c **חיוביים**

$$(a+b+c)^2 \ge 3\left\{a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}\right\}$$

ושויון מתקיים אך ורק כאשר $a=b=c$.

שם ומשפחה____________________________

כתובת____________________________

טלפון__________ **כתה**__________ **בי"ס**__________

ולסמן על המעטפה את המילה "פתרון".

מעגל שש הנקודות

א.ב. סיגלר (נהריה)

בעיה: נתון משולש חד זויות שגבהיו AD,BE,CF.
יהיו F_2,F_1,E_2,E_1,D_2,D_1 היטלי קודקודי המשולש האורטי על צלעות ABC. צריך להוכיח שהן על מעגל אחד.

הוכחה: נוכיח תחילה ש- F_2,D_1,E_2,F_1 על מעגל אחד.
לאחר מכן נוכיח ש- E_1,F_2,D_1,E_2 על מעגל אחד.

1. הוכחת F_2,D_1,E_2,F_1 על מעגל אחד.
מספיק להוכיח ש:

$\angle F_1F_2C = \angle D_1E_2C$.

א. משום ש- D_1E_2 אנטי מקביל ל- DE ו-DE אנטי מקביל ל-AB נובע ש- $D_1E_2 \parallel AB$.
לכן - $B = \angle D_1E_2C$.

ב. משום ש- המרובע FE_2CF_1 בר חסימה (כי $180° = F_1 + F_2$).

קיים: $\angle F_1FC = \angle F_1F_2C$ (נשענות על אותה קשת שמיתרה F_1C)

וברור ש: $\angle F_1FC = B$ כי FF_1 גובה במשולש ישר הזוית BFC.

לפי א. ו-ב. $F_1F_2D_1E_2$ בר חסימה.

2. כדי להוכיח ש- E_1,F_2,D_1,E_2 על מעגל אחד מספיק להוכיח ש- $\angle E_1E_2D_1 = \angle AF_2E_1$.

אבל כאמור ב-1. $BC \parallel E_1F_2$

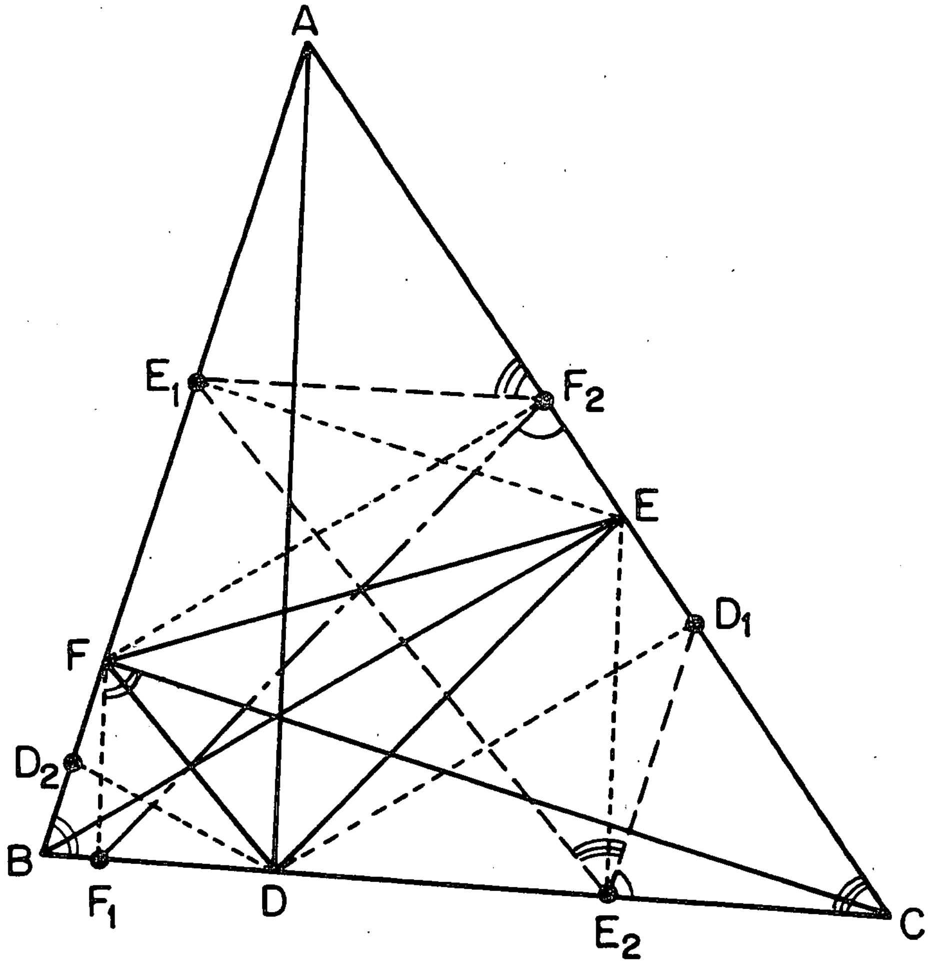
לכן יש להוכיח ש- $\angle E_1E_2D_1 = C$.

משום ש- E_1EE_2B בר חסימה (סכום E_1 ו- E_2 הישרות $180°$), $\angle E_1EB = \angle E_1E_2B$

(נשענות על אותה קשת) $= \hat{A}$ (כי EE_1 גובה במשולש ישר זוית AEB).

מקודם הוכחנו ש- $B = \angle D_1E_2C$.

לכן- $\hat{C} = 180 - \hat{B} - \hat{A} = \angle E_1E_2D_1$.



הנדסת המישור

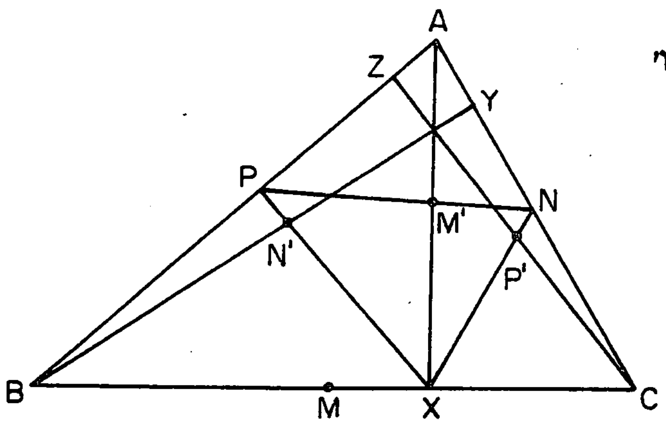
א. מרקוביץ (אשדוד)

יש לבנות 2 משולשים חסומים במשולש כלשהו כך שצלעותיהם המתאימות יהיו מאונכות על צלעות המשולש הנתון.

למה: אם נגדיר את נקודות האמצע של צלעותיו של משולש כלשהו M, N, P ונסמן ב- M', N', P' את אמצעי הגבהים לאותן הצלעות, נקבל נקודה יחידה "0" שהיא נקודת המפגש של MM', MN', PP'.

הוכחה: יהיו AX, BY, CZ הגבהים של המשולש; ו- M', N', P' האמצעים של AX, BY, CZ בהתאמה. קל לראות כי MN מקביל ל-BC ולכן הוא יפגוש את AX ב-M'. מאידך גם ברור כי

$$\frac{NM'}{M'P} = \frac{CX}{XB}$$, וכו'



ולכן

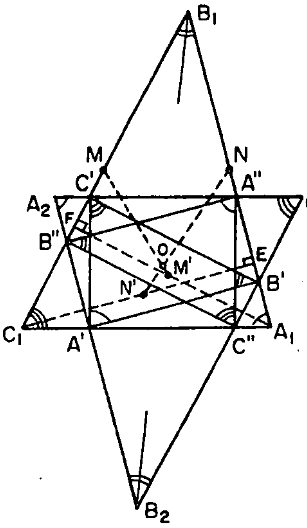
$$\frac{NM'}{M'P} \cdot \frac{PN'}{N'M'} \cdot \frac{MP'}{P'N} = \frac{CX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} = 1$$

ומכאן המסקנה, לפי משפט ציבה.

ציור 1

א. נבנה משולש נתון $A_1 B_1 C_1$ לאחר מכן את המשולש הסימטרי שלו ביחס למרכז "0" לפי ההגדרה שלמעלה (ציור 3).

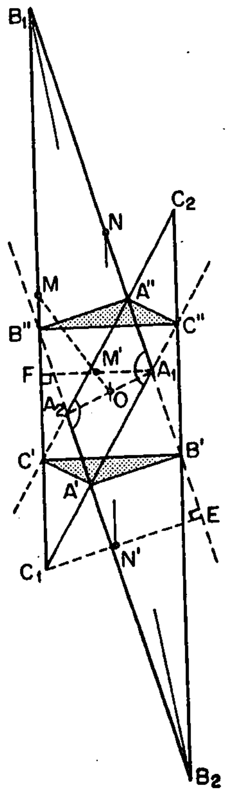
בנקודות המפגש של צלעות המשולשים הנ"ל, נמצאים קודקודי 2 המשולשים החסומים שאנו מחפשים $A'B'C'$ ו- $A''B''C''$. קודקודים אלה נמצאים כולם על המעגל בעל המרכז "0".



ציור 2

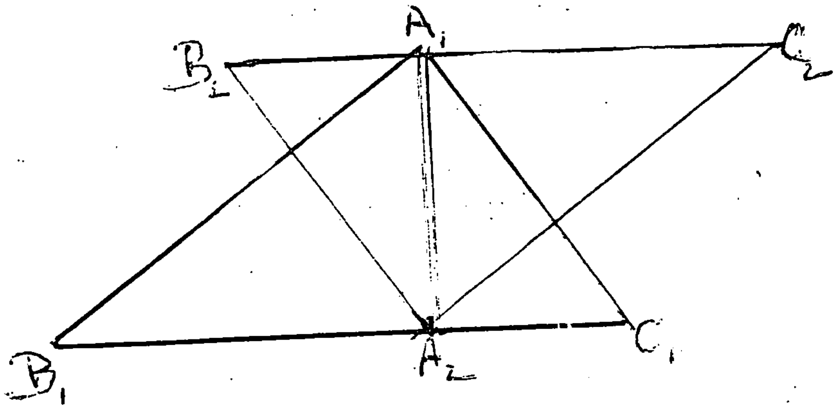
יש לציין שגם המשולשים $A''B''C''$ ו- $A'B'C'$ וגם המשולשים $A_1B_1C_1$ ו- $.A_2B_2C_2$ הם משולשים דומים ושני המשולשים המתקבלים הם חסומים באותם תנאים וגם במשולש הסימטרי $.A_2B_2C_2$

ב. במקרה של משולש קהה זווית יש לציין שלשני המשולשים המתקבלים יש קודקוד אחד על המשכי הצלעות של המשולש הקהה זווית (ציור 3).



ציור 3

ג. מקרה של משולש ישר זווית $C_1 A_1 B_1$. (ציור 4)



ציור 4

לפי הנוסחאות הטריגונומטריות המתאימות, אם נרשום את היחסים בין המשולשים $A_1 B_1 C_1$ ו- $A''B''C''$ נקבל:

$$\begin{cases} A_1B_1 = A''B'' \cot B_1 + \dfrac{C''A''}{\sin A_1} \\ B_1C_1 = B''C'' \cot C_1 + \dfrac{A''B''}{\sin B_1} \\ C_1A_1 = C''A'' \cot A_1 + \dfrac{B''C''}{\sin C_1} \end{cases}$$

למערכת של שלוש משוואות עם שלושה נעלמים שמתוכה מתקבלים אורכי הצלעות $A''B''$, $B''C''$, $C''A''$ של אחד משני המשולשים החסומים $A''B''C''$.

גופים נופלים - משואה פונקציונלית

י. גיליס (רחובות)

כולנו למדנו שגוף הנופל ארצה מקבל תאוצה קבועה, g. הערך המדויק של g תלוי במקום על כדור הארץ וגם במרחק המקום ממרכז כדור זה, אבל הנקודה החשובה היא שאין g תלוי במסה של הגוף הנופל.

נניח, איפוא, כי יש לנו גוף בעל מסה M וכי הכח הפועל עליו בגלל המשיכה של כדור הארץ הוא W. לפי החוק השני של ניוטון תהיה התאוצה $\frac{W}{M}$ ומכאן ש- W=Mg.

ז.א. שהמשקל נמצא ביחס קבוע למסה.

האגדה מוסרת כי גליליאו היה הראשון שהחזיק בדעה זו ושהסתכן בנפשו כשהגן על הדעה מול דעתם של חכמי אוניברסיטת פיזה באיטליה. אלה טענו שגוף כבד יותר בהכרח גם יפול יותר מהר, בהסתמכם על דעתו של אריסטו. ומאחר שהכנסיה הקאתולית החליטה כבר יותר ממאתים שנה לפני זה שהפילוסופיה של אריסטו מתיישבת עם עקרונות הנצרות, הרי לכפור בדעתו של אריסטו כמו לכפור בעקרונות הכנסיה, דבר שיכול היה להוביל לצינוקי האינקויזיציה ולמוקד.

אגב נעיר כאן כי הילת הקדושה שהלבישה הכנסיה הקאתולית על ראשו של אריסטו באה בעיקר הודות לעבודתו של מלומד נוצרי, תומאס אקוינס הקדוש (1226-1274). תומאס הושפע מאוד מכתבי הרמב״ם, ובעיקר ממאמציו להוכיח שאין סתירה בין השקפות אריסטו לבין עיקרי היהדות. מכאן שלרמב״ם היה חלק מסוים באשמה של אלה שירדו לחייו של גליליאו. אבל זה לחוד ונחזור לענייננו.

גליליאו גם הודה שתאוצת הנפילה של גוף קל עשויה להיות שונה מזו של גוף כבד, אבל טען שההפרש נובע רק מהתנגדות האויר, ואילו בחלל ריק היו שני הגופים נופלים באותה תאוצה. יש גם אגדה שהוא הפיל שני גופים כאלה ממעלת מגדלה הנטוי של פיזה, ושניהם נפלו במהירויות שונות. אבל אחרי זה הפיל אותם שני הגופים כשהקל מונח על הכבד. הגוף הכבד דחף הצידה את האויר ושני הגופים נפלו יחד בלי שיפרדו.

האגדה יפה אבל, לצערנו, איננה תואמת למציאות. הנסיון המפורסם הזה לא בוצע אף פעם על ידי גליליאו אלא רק כמה שנים אחרי מותו, ע״י אחד ממתנגדיו, במטרה להפריך את דעתו של גליליאו. מאידך, אפשר ללקט מכתביו של גליליאו רעיון תיאורטי אשר ממנו נובע שהמשקל של גוף נמצא בהכרח ביחס קבוע למסה. נציג כאן את ההוכחה הזאת, אבל מאחר ששורות אלה נכתבות במאה ה-20, נשלים עם הדרישות הנהוגות במאה זו, וננסה להבהיר בדיוק מה הן ההנחות שמהן אנו יוצאים. ובכן אנו מניחים:

א. החוק השלישי של ניוטון, הטוען שלכל כח מופעל יש כח שווה ומנוגד. פירוש הדבר שאם גוף A מפעיל על גוף B כוח F אזי מפעיל B על A כוח שווה בערכו ל-F ובכיוון המנוגד.

ב. שהכוח המופעל על גוף כתוצאה ממשיכת כדור הארץ תלוי אך ורק במסה של הגוף, ז.א. שקיימת פונקציה $f(x)$ כך שאם המסה של גוף היא x אזי כוח המשיכה עליו של כדור הארץ הוא $f(x)$.

ג. $f(x)$ פונקציה רציפה של x.
מההנחות האלה נסיק כי $f(x)$ נמצא ביחס קבוע ל-x.

הוכחה:

ניקח שני גופים A , B בעלי מסה x , y בהתאמה, ונתבר אותם יחד. הכוח הפועל על הגוף הכפול הזה מורכב מ- $f(x)$ על A ; $f(y)$ על B ; הכוח שמפעיל A על B, והכוח שמפעיל B על A. אבל שני אלה האחרונים מבטלים זה את זה לפי הנחה א,
ולכן הכוח השקול הוא: $f(x) + f(y)$. אבל מאידך נוכל לראות את כל המערכת כגוף אחד בעל מסה $x+y$ ולכן הכוח הוא $f(x+y)$. מכאן נובע ש-

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (1)$$

עכשיו נסיק מ-(1) כי הפונקציה $f(x)$ חייבת להיות מהצורה ax, כאשר a הוא קבוע.
א) מ-(1) נובע בדרך האינדוקציה כי, עבור כל $(x_1, x_2, ..., x_n)$ קיים

$$f(x_1 + x_2 + ... + x_n) = f(x_1) + f(x_2) ... + f(x_n) \qquad (2)$$

ב) מ-(2) נובע כי

$$f(nx) = nf(x)$$

הוכחה:

ניקח $x_1 = x_2 ... = x_n = x$ עבור כל x, וכל n טבעי.

ג) נגדיר $f(1) = a$, אזי $f(n) = an$.

ד) עבור m , n טבעיים, קיים $an = f(n) = f(m \cdot \frac{n}{m}) = mf(\frac{n}{m})$

ולכן $f(\frac{n}{m}) = a \cdot \frac{n}{m}$.

הוכחנו, איפוא, כי עבור כל x ראציונלי, קיים

$$f(x) = ax \qquad (3)$$

והמעבר לערכים ממשיים מידי, אם נביא בחשבון הנחה ג׳.

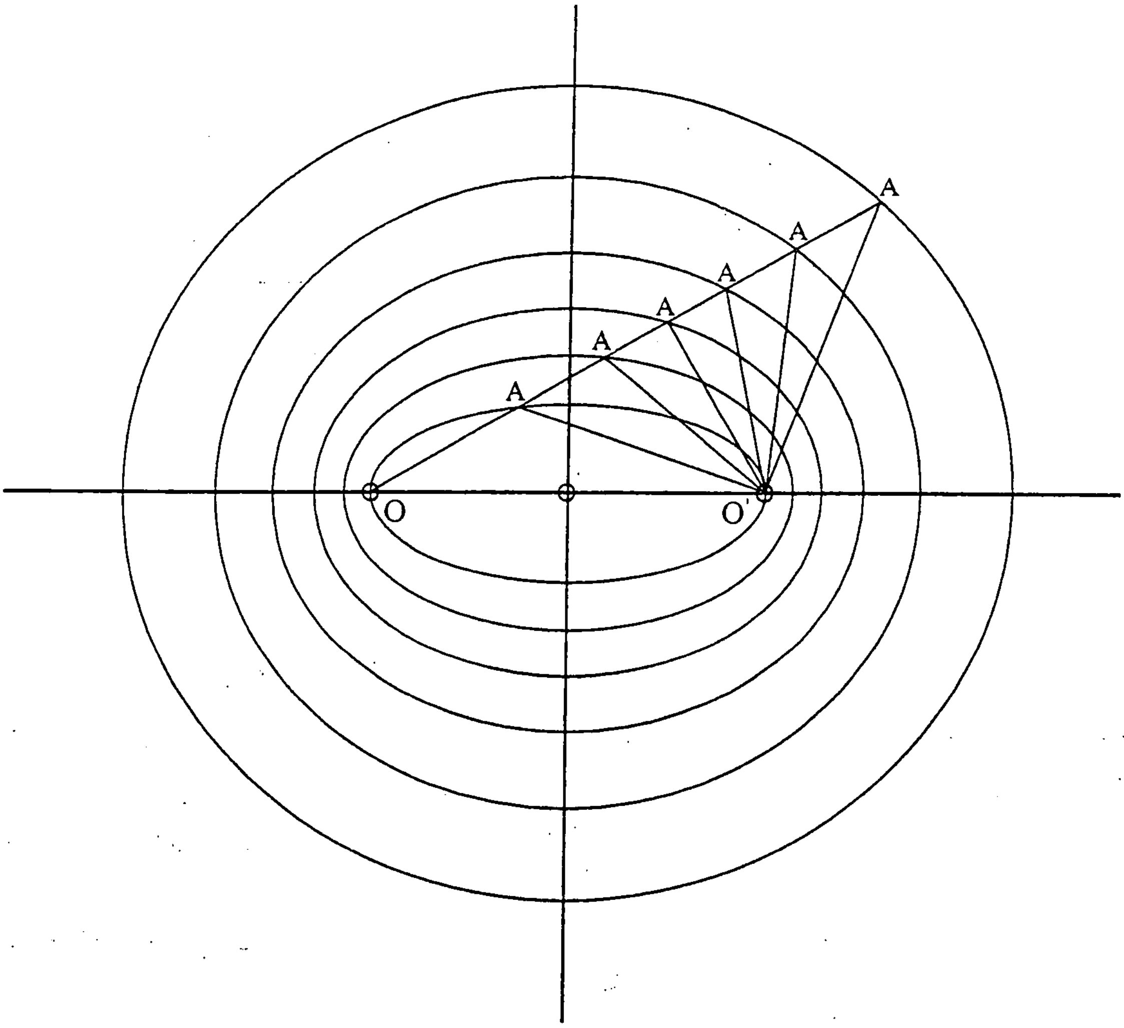
עקומות מוגדרות ע״י קואורדינטות דו-זויתיות
מכשיר מכני-אופטי לשרטוט עקומות אלה (חלק שני)
אברהם יעקובוביץ

בחלק הראשון (אתגר-גליונות מתמטיקה, גליון 26, יוני 1993) עסקנו בעקומות מוגדרות ע״י שתי זויות φ, ψ כאשר ביניהן קיים קשר ליניארי $\psi = k\phi + \alpha$, $(k \in R)$.
נרחיב את הנושא לעקומות אחרות.

ג. עקומות המוגדרות ע״י קשר לא-ליניארי

נעבור לעקומות גאומטריות המוגדרות גם הן ע״י אותן שתי הזויות φ, ψ כאשר הקשר ביניהן אינו ליניארי, אלא, בד״כ הוא נתון בעזרת פונקציות טריגונומטריות. כדי להדגים את השיטה, נסתפק בארבע עקומות בלבד: אליפסה, היפרבולה, פרבולה והציסואיד של דיוקלס.

7. אליפסה (איור 9)



נסמן $OO' = 2c$. אם A נקודה כלשהי על **האליפסה**, אז $OA + O'A = 2a$, ז.א.

$\rho_1 + \rho_2 = 2a$, נשתמש בנוסחות (3) (חלק ראשון, עמ' 4) ונקבל

$$\frac{2c\sin\psi}{\sin(\psi-\varphi)} + \frac{2c\sin\varphi}{\sin(\psi-\varphi)} = 2a.$$

לכן משוואת האליפסה היא $c(\sin\psi + \sin\varphi) = a\sin(\psi - \varphi)$. היות ו- $\frac{c}{a} = e$,

(איפה e הוא האקסצנטריות) המשוואה היא:

$$\frac{\sin\psi + \sin\varphi}{\sin(\psi-\varphi)} = \frac{1}{e}$$

$$\frac{2\sin\frac{\psi+\varphi}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2}}{2\sin\frac{\psi-\varphi}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2}}=\frac{1}{e}.$$

$$\frac{\sin\frac{\psi+\varphi}{2}+\sin\frac{\psi-\varphi}{2}}{\sin\frac{\psi+\varphi}{2}-\sin\frac{\psi-\varphi}{2}}=\frac{1+e}{1-e}$$ מה שנותן $$\frac{tg\frac{\psi}{2}}{tg\frac{\varphi}{2}}=\frac{1+e}{1-e}$$

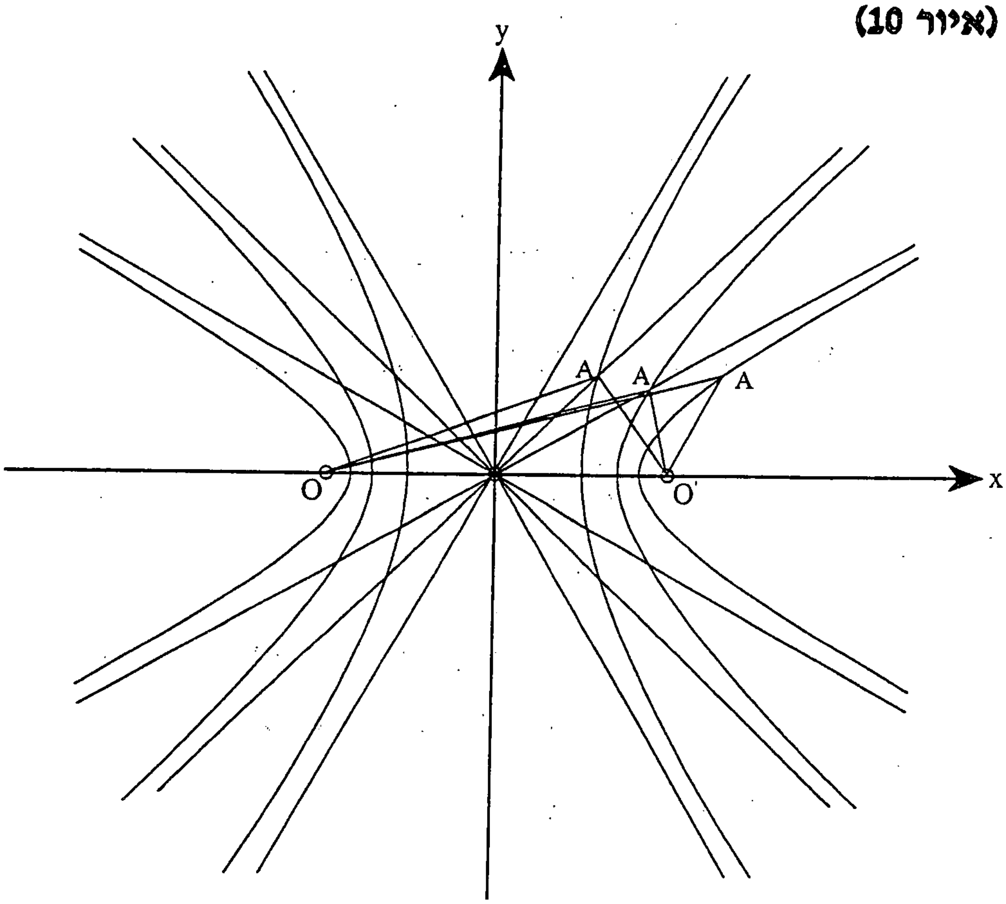
ז.א. $tg\frac{\psi}{2}=\frac{1+e}{1-e}tg\frac{\varphi}{2}$. אם נסמן $k=\frac{1+e}{1-e}$. משוואת האליפסה היא

$$tg\frac{\psi}{2}=k\,tg\frac{\varphi}{2},$$

איפה $k>1$

<u>בנספח 1</u> טבלה עם נתונים עיקריים עבור מספר אליפסות

8. היפרבולה (איור 10)



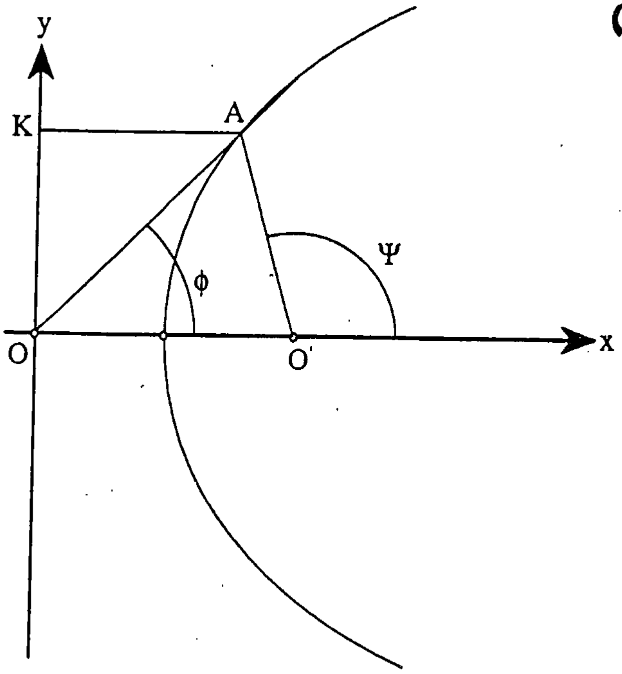
באופן דומה מתקבלת משוואת ההיפרבולה

$$tg\frac{\psi}{2} = ktg\frac{\phi}{2}$$

איפה $k = \frac{1+e}{1-e} < -1$.

בנספח 2 טבלה עם נתונים עיקריים עבור מספר היפרבולות.

9. פרבולה (איור 11)



נשרטט פרבולה שהמוקד שלה ב-O'. הציר על OO' והמדריך בלבד ב-O.
אם A נקודה כלשהי על הפרבולה ו-AK קטע מאונך למדריך, אזי, לפי ההגדרה הגיאומטרית של הפרבולה, קיים השויון $AK = AO'$. מהמשולש ישר זוית AOK, מתקבל $AK = AO\cos\phi$, ז.א. $AK = \rho_1\cos\phi$ ולכן $\rho_1\cos\phi = \rho_2$.

נציב כאן את הנוסחות (3) ונקבל

$$\frac{p\sin\psi\cos\phi}{\sin(\psi-\phi)} = \frac{p\sin\phi}{\sin(\psi-\phi)}$$

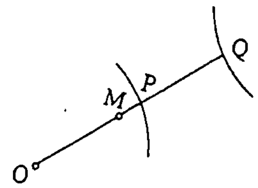
ואחרי הפישוט מתקבלת משוואת הפרבולה

$$\sin\psi = tg\phi$$

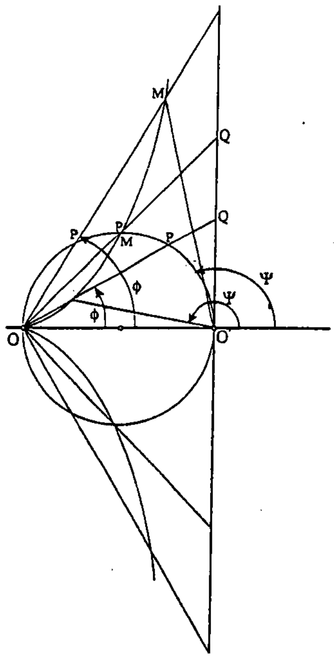
ז.א. $\psi = \arcsin(tg\phi)$

10. הציסואיד של דיוקלס (Diocles)

נתונות שתי עקומות כלשהן ונקודה קבועה O (איור 12). קרן כלשהי שראשיתה ב- O חותכת את העקומות ב-P ו-Q בהתאמה. מקצים על OQ את הקטע OM כך ש: $OM = PQ$.



המקום הגיאומטרי של הנקודה M, כאשר הקרן OM מסתובבת מסביב ל-O היא עקומה הנקראת **הציסואיד** של אותן שתי העקומות הנתונות.
המתמטיקאי העתיק Diocles (בערך בשנת 200 לפני הספירה) עסק במקרה כאשר שתי העקומות הן מעגל ומשיק למעגל (איור 13).



נפעיל את משפט הסינוסים במשולש $OO'M$

$$\frac{OM}{\sin \angle OO'M} = \frac{OO'}{\sin \angle M}$$

וזה נותן

$$\frac{OM}{\sin(\pi-\psi)} = \frac{p}{\sin(\psi-\phi)} \qquad (*)$$

מהגדרת הציסואיד מתקבל

$$OM = PQ = OQ - OP = \frac{p}{\cos\phi} - p\cos\phi = \frac{p\sin^2\phi}{\cos\phi}$$

לכן (*) נותנת

$$\frac{p\sin^2\phi}{\sin\psi\cos\phi}=\frac{p}{\sin(\psi-\phi)}$$

ומזה מתקבל

$$\frac{\sin^2\phi}{\sin\psi\cos\phi}=\frac{1}{\sin\psi\cos\phi-\cos\psi\sin\phi}$$

אחרי הפישוט והצמצום ב-$(\cos\psi\cos^3\phi)$ מקבלים את משוואת הציסואיד של דיוקלס

$$tg\psi=-tg^3\phi$$

ד. מכשיר מכני-אופטי לשרטוט עקומות מסוג $\psi=k\phi+\alpha$

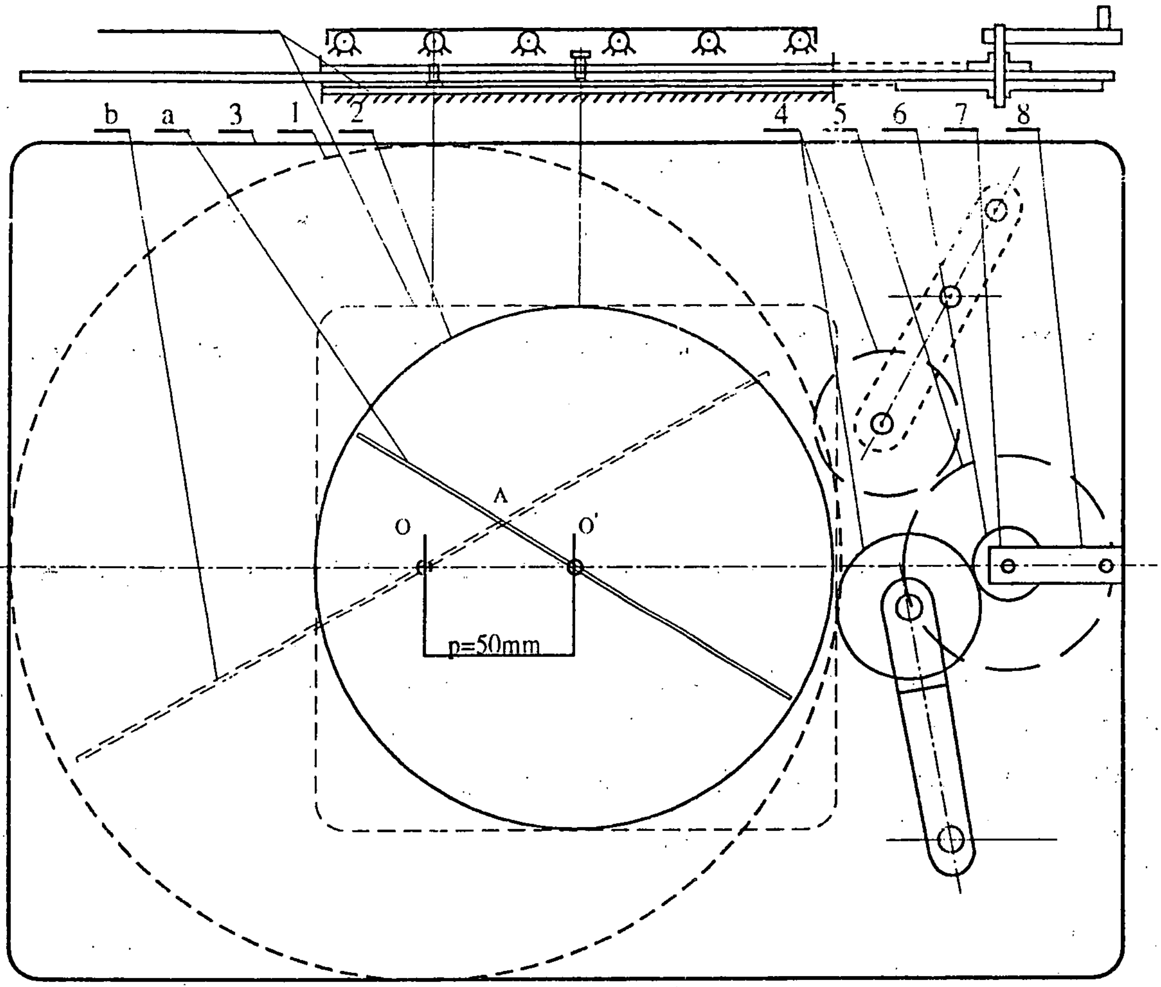
המכשיר (איור 14) מהווה משני גלגלי שניים (1,2) עם חריצים צרים (a,b) לאורך הקוטרים. הגלגלים צמודים במרכזיהם O,O' ללוח שקוף, כל גלגל בצד אחד של הלוח. בעזרת הידית (8) המורכבת כל הגליל (7) מסובבים שני גלגלי-שיניים (5,6) שמעבירים את התנועה בעזרת הגלגלים (4), לגלגלים (1,2). במשך תנועת הגלגלים (1,2) בכיוונים נגדיים זה לזה, החריצים (a,b) נחתכים בנקודה A, שנעה.

מתחת למכשיר נמצא דף של נייר צילום ומעליו נמצאת מנורה. כאשר הגלגלים (1,2) מסתובבים והנקודה A נעה, האור מן המנורה החודר דרך הנקודה A, "משרטט" על נייר הצילום עקומה מסויימת.

את סוג העקומה שתשורטט, קובעים מלכתחילה ע"י שני תנאים:
1. קוטרי ומספרי השיניים של הגלגלים (5,6).
2. הזויות שעושים בהתחלת התנועה החריצים (a,b) עם הישר OO' וביניהם.

לדוגמא: אם הגלגלים (5,6) הינם בעלי 20 ו-60 שיניים בהתאמה, ואם בהתחלת התנועה, החריץ a עושה זוית של $O°$ עם OO' והחריץ b עושה זוית של $90°$ עם הישר OO', אז הנקודה A "משרטטת מעגל. אבל, אם ממצב זה עוברים למצב בו החריץ b עושה בהתחלת התנועה זוית של $45°$ עם OO' - כאשר זהו השינוי היחיד לעומת המצב הקודם, אז הנקודה A "משרטטת" סטרופואיד ישר. אם במקום $45°$ נותנים לזוית זו ערך אחר (אבל שונה מ-$90°$), אז מקבלים סטרופואיד משופע.

אם רוצים לשרטט עקומות המוגדרות ע"י מקדם k שלילי, אז צריך להפריד את הגלגלים 4,6 זה מזה ולהכניס ביניהם גלגל נוסף בעל מספר שיניים כלשהו.



איור 14 - המכשיר

בנספח 3 נתונה טבלה עם הנתונים הנחוצים להכנת המכשיר לפעולה. נציין כי במכשיר שהמחבר בנה, הנתונים דלהלן: המרחק 50 מ"מ= OO'. קוטרי הגלגלים (1,2) הם: 315 מ"מ= d_1 , 210 מ"מ= d_2 . מספרי השיניים שלהם הם: n_2=210 , n_1=140 , היחס $i = \frac{z_1}{z_2}$ בין קוטרי הגלגלים (5,6) מגדיר $k = 1.5i$.

קוראים המעונינים בנושא, יוכלו להתקשר למחבר המאמר בכתובת הבאה: מהנדס אברהם יעקובוביץ, מרכז מסחרי 5/3 (9683) תל-חנן (נשר) 2030.

נספח 1

טבלה 1: נתונים עבור מספר אליפסות

חצי הציר הגדול = a

חצי הציר הקטן = b

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$p = OO'(=1)$

$tg\frac{\psi}{2} = k\, tg\frac{\varphi}{2}$

n.	$e = \frac{t}{a}$	$k = \frac{1+e}{1-e} \cdot p$
1.	0.2	1.5
2.	0.4	2.3
3.	0.6	4
4.	0.8	9
5.	0.9	19

נספח 2

טבלה 2: נתונים עבור מספר היפרבולות

חצי הציר הגדול = a

חצי הציר הקטן = b

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$p = OO'(=1)$

$tg\frac{\psi}{2} = k\, tg\frac{\varphi}{2}$

n.	$e = \frac{c}{a}$	$k = \frac{1+e}{1-e}$
1.	1.05	-41
2.	1.41	-5.8
3.	2.5	-2.3
4.	5.0	-1.5
5.	10	-1.2

טבלה 3: נתונים הנחוצים להכנת המכשיר לפעולה

קוטר הגלגל 6 = z_2 ; קוטר הגלגל 5 = z_1 ; $m = \frac{\psi}{\varphi}$

הזוית ההתחלתית של החריץ על הגלגל φ = $\propto_2^{\circ}$; הזוית ההתחלתית של החריץ על הגלגל ψ = $\propto_1^{\circ}$

3/4	-3/4	3	2	1	1	1/2	1/2	1/2	k
30	-30	60	40	40	40	20	20	20	z_1
60	60	30	30	60	60	60	60	60	z_2
0	0	0	0	0	0'	0'	0'	0'	0
0	0	0	0	שרירותי	90°	שרירותי	45°	90°	$\propto_2^0$
עקומה דו-תלתלית	היפרבולה	הטריס-קטריצה	חשבלולית של פסקל	מעגל העובר ב-O וב O'	מעגל שמרכזו ב-O'	סטרופואיד משופע	סטרופואיד ישר	מעגל שמרכזו ב-O	

על צירוף שני מקרים מסויימים בחיי מישהו-הכללה

דוד רימר (רחובות)

צירוף המקרים: תהא n שנת לידתו של מישהו X ו-$(n+p)$, (p ראשוני) השנה בה הגיע X לגיל p. נשאלת השאלה: באיזה תנאים עבור n, יהיה n+p מספר ראשוני ובזאת יקויים אצלו צירוף שני המקרים: **בשנה מספר ראשוני, גילו של X אף הוא מספר ראשוני, ובנוסף, האם צירוף מקרים זה הינו חד-פעמי בחייו של X או שהוא יכול לקרות יותר מפעם אחת?**

נדגים את התשובות בנתונים מחיי מתמטיקאים ידועים.

1. **n אי-זוגי.** עבור $p > 2$, $n+p$ זוגי ולכן פריק והצירוף הדרוש לא מתקיים אף פעם. B. Pascal (נולד ב- 1623), L. Euler (נולד ב-1707). כל פעם שהם היו בגיל מספר ראשוני גדול מ-2, השנה היתה מספר זוגי.

עבור $p = 2$, $n + p = n + 2$ יכול להיות מספר ראשוני, אבל לא בהכרח. כך, למשל, בשתי הדוגמאות דלעיל, כש-Pascal היה בגיל שנתיים, השנה היתה 1625, מספר פריק, אבל כש-Euler היה בגיל שנתיים, היתה השנה 1709 מספר ראשוני. דוגמאות נוספות: J. Hadamard מתמטיקאי צרפתי שנולד ב-1865, היה בגיל שנתיים בשנת 1867 מספר ראשוני, אצלו קויים צרוף שני המקרים. לעומתו F. Klein, מתמטיקאי גרמני, שנולד ב-1849, כשהיה בגיל שנתיים היתה השנה 1851, מספר פריק; לכן אצלו לא קויים צירוף שני המקרים.

2. n זוגי. אז גם $n+2$ זוגי ולכן פריק, והצירוף לא מתקיים. עבור $p>2$, $n+p$ יכול להיות מספר ראשוני או פריק; אין תשובה כללית. דוגמאות: W. Leibniz (שנולד ב-1646) במשך 70 שנות חייו, היו 8 שנים מספרים ראשוניים; ב-6 מהן היה גילו מספר ראשוני, לכן בהן (ורק בהן) קויים צירוף שני המקרים. N. Abel, מתמטיקאי נורבגי, שנולד ב-1802, במשך 27 שנות חייו, היו 2 שנים מספרים ראשוניים אבל בשתיהן הוא היה בגיל מספר פריק. אזי, אצלו לא קויים אף פעם צירוף שני המקרים.

הערה לסיכום: אם ספרת האחדות של n היא 3, אז ספרת האחדות של $n+2$ היא 5 ולכן $n+2$ פריק. מכאן נובע כי עבור האנשים שספרת האחדות של שנת לידתם n היא 1 או 5 או 7 או 9 (אנשים אלה מהווים 2/5 מכלל האוכלוסיה), מספיק לבדוק אם $n+2$ מספר ראשוני או פריק כדי להחליט בנושא. אם $n+2$ מספר ראשוני, אז קיים צירוף המקרים ודהיינו פעם אחת בלבד.

אם n זוגי (והאנשים האלה מהווים 1/2 מכלל האוכלוסיה) צריך לבדוק עבור כל אחד את שנות חייו מסוג $n+p$, כאשר p ראשוני וגדול מ-2. בכל מקרה ו-($n+p$) ראשוני, קיים צירוף המקרים.

הכללה: במבט כללי, היו לעיל, בכל מקרה, שתי קבוצות שקולות של מספרים טבעיים: $A = \{1,2,...,r\}$ ו- $B = \{n+1,n+2,...,n+r\}$ והמטרה היתה למצוא, אם אפשר, את התנאים עבור n, כך שלמספר ראשוני p מהקבוצה A יתאים מספר ראשוני $n+p$ בקבוצה B. היות וב-A היה מדובר בגילי אנשים, הקבוצות היו די קטנות, דהיינו, פחות מ-100 איברים בכל קבוצה A, ואותו דבר ב-B.

עתה נוותר על הסיפור עם גילי אנשים, נגדיל באופן משמעותי את הקבוצות ונשים לנו כמטרה למצוא, **בערך**, את **מספר הזוגות** $(p,n+p)$ כאשר $p \in A$ ו- $(n+p) \in B$, p ו-$n+p$ מספרים ראשוניים.

ניקח לדוגמא $r=2000$ ו- $n=3760$. אז הקבוצות הן $A = \{1,2,...,2000\}$,

$B = \{3761,3762,...,5760\}$, דהיינו A היא קבוצת 2000 השנים הראשונות לפי הלוח האוניברסלי ו-B היא קבוצת השנים, הבו-זמניות, לפי הלוח המסורתי העברי, והבעיה היא לדעת כמה פעמים במשך 2000 שנה היו (ויהיו בהמשך), **בו זמנית**, בשני הלוחות השנים מספרים ראשוניים (לדוגמא, כמו: $5711 \leftrightarrow 1951$). הקורא מוזמן לבדוק בעצמו מספר מקרים פרטיים של בעיה זו.

האולימפיאדה הבינלאומית במתמטיקה, 1993

י. גיליס (רחובות)

התחרות הנ"ל התקיימה השנה באיסטנבול והשתתפה בה גם נבחרת מישראל. במשך 35 שנות קיומה פיתחה האולימפיאדה מבנה מסורתי. ואולי כדאי להקדים בתיאור כללי של מבנה זה.

כל נבחרת באה יחד עם מלווה ראשי וסגנו. קבוצת המלווים הראשיים היא הגוף האחראי לניהול תקין של התחרות, לעריכת השאלונים, לבדיקת הבחינות, ולקביעת ציונים, פרסים וכו'. הסגנים אחראים לטפל כל אחד בנבחרת שלו וגם להשתתף, יחד עם המלווה, בבדיקת הבחינות.

להלכה, מוסמכת המדינה המארחת, שהיא נושאת בכל ההוצאות הקשורות בניהול התחרות ובאיכסון של הנבחרות והמלווים השונים, גם להחליט איזו מדינות היא תזמין לאירוע. למעשה התפתחה מסורת להזמין את כל המדינות שהשתתפו אי פעם בעבר, אלא שהמדינה יכולה להזמין גם מדינות נוספות לפי ראות עיניה. בעבר היו רק שתי סטיות מנוהל זה, כאשר ישראל הושמטה מרשימת המדינות המוזמנות לצ'כיה ב-1984 ולקובה ב- 1987.

המדינות המוזמנות יכולות לשלוח כל אחת עד 6 מתחרים ואמנם נהוג כי כולן, פרט לכמה מדינות קטנות מאוד, גם מנצלות אפשרות זו במלואה. השנה השתתפו 416 תלמידים מ-73 מדינות. פרסים מוענקים למתחרים על סמך ציונו האישי של כל אחד ואחד. השנה הוענקו מדליות זהב ל-35 מתוך 416 המתחרים, כסף ל-65 וארד ל-97. מבין חברי נבחרת ישראל זכה תלמיד אחד במדלית זהב, שניים במדלית כסף ושניים במדלית ארד, תוצאה נאה למדי. נהוג גם לסדר את המדינות לפי הציון הכולל של הנבחרת כולה ולפי סדר זה הופענו במקום ה-17, יחד עם קנדה.

ברור שמדינות רבות אוכלוסין נהנות מסיכוי יותר גדול למצוא בתוכן 6 תלמידים מצויינים, ואמנם זה כמה שנים שסין העממית מגיעה תמיד למקום הראשון! למעשה כל המדינות אשר עלו עלינו ברשימה זו היו בעלות אוכלוסיות גדולות משלנו, אבל אין להיחפז למסקנה כי זה מסביר את הכל. ממבט ברשימת התוצאות רואים שהגורם הדמוגרפי בהחלט אינו היחיד. נכון כי את שלושת המקומות הראשונים תפסו סין העממית, גרמניה המאוחדת והרפובליקה הרוסית, אבל בלטו גם בולגריה והונגריה אשר מספר אוכלוסיתן הוא בערך 12,000,000 כל אחת.

יתכן שהצלחת המדינות האלה קשורה במאמצים שהן משקיעות באיתור כשרונות טובים ובאימונים אינטנסיביים. מאידך ישנן מדינות אחרות הפועלות בדרך דומה ומשיגות הרבה פחות. לדעתי יסוד היסודות להצלחה הוא רמה טובה של הוראת המתמטיקה בבתי ספר תיכוניים. בזמן האחרון הצליחה אירן לשפר מדי שנה את ציונה הכולל עד שהשנה, 1993, היא עלתה על ארה"ב, דבר שהכה בהלם את מלווי הנבחרת האמריקאית. אני מסיק מהעליה המתמדת של אירן הוכחה ברורה לרצונה של מדינה זו להתקדם מבחינה גיאופוליטית, תוך הכרה מצדה שהדבר תלוי לא מעט בשיפור הרמה והעומק של החינוך המדעי. ידוע כי לפני 100

שנה הגיע הקנצלר ביסמרק בדיוק להחלטה דומה לגבי גרמניה ונקט באותה מדיניות כדי להשיגה, וגם הצליח.

אינני מיחס חשיבות מיוחדת דוקא לתחרות, פרט לשני שיקולים:

1. השתתפות מוצלחת בה, למשל כמו בקיץ זה, מוסיפה כבוד לישראל ומעניק לה יותר משקל והערכה מצד עולם המדע. מובן שזה לא יפתור את בעיותינו המדיניות, אבל בכל זאת יש לו ערך רב.

2. עצם קיומה של התחרות עוזרת ללא ספק לחדד ולהעמיק את ההתענינות במקצוע מצד תלמידים בעלי נטיה לנושא. מנסיוני למדתי להעריך דוקא עובדה זו. תחרויות מסוג זה מאפשרות גם להסיק מסקנות לגבי רמת ההוראה בעיקר בשכבה החזקה במתמטיקה, וזאת אולי השכבה שתקבע את עתידנו התרבותי-טכנלוגי.

הבחינה עצמה השנה השתרעה כרגיל על יומיים, בהם הוצגו בפני המתחרים שני שאלונים. אלה היו כדלקמן:

יום ראשון

1. יהיה $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, כאשר $n > 1$ הוא מספר שלם. הוכח כי אי אפשר להציג את $f(x)$ כמכפלה של שני פולינומים אשר כל המקדמים שלהם הם מספרים שלמים ושניהם בעלי מעלה לפחות 1.

2. נתון משולש ABC אשר כל זויותיו חדות, ונקודה פנימית D כך ש-

$$\angle ADB = \angle ACB + 90^\circ$$

ו-

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC$$

א) חשב את היחס

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$$

ב. הוכח כי המשיקים בנקודה C למעגלים החוסמים את המשולשים ACD ו- BCD, הם מאונכים זה לזה.

3. על לוח שחמט אינסופי משחקים את המשחק הבא:

ראשית מסדרים n^2 כלים על הלוח בצורת ריבוע של $n \times n$ משבצות סמוכות, כלי אחד בכל משבצת. מהלך במשחק זה הוא להקפיץ כלי בכיוון אופקי או מאונך מעל לכלי שנמצא במשבצת סמוכה לתוך המשבצת שמעבר לה, בתנאי שזו האחרונה ריקה. הכלי אשר קפצת מעליו יורד מהלוח.

מצא עבור אילו ערכים של n יוכל המשחק להיגמר בכך שנשאר רק כלי אחד על הלוח.

4. עבור כל שלוש נקודות P,Q,R במישור, אנו מגדירים $m(PQR)$ שהוא האורך המינימלי של הגבהים של המשולש PQR (כאשר P,Q,R נמצאים על קו ישר, מגדירים $m(PQR) = 0$).

יהיו A,B,C נקודות כלשהן במישור. הוכח כי עבור כל נקודה X במישור,

$$m(A\,B\,C) \le m(A\,B\,X) + m(A\,X\,C) + m(X\,B\,C)$$

5. N מסמן את הקבוצה $\{1,2,...,N\}$. קבע האם קיימת פונקציה $f : N \to N$ כך ש -

$$f(1) = 2$$

$f(f(n)) = f(n) + n$. עבור כל - $n \in N$

$f(n) < f(n+1)$ עבור כל $n \in N$.

6. נתון מספר שלם $n > 1$, המנורות $L_{n-1},...,L_1,L_0$ מסודרות במעגל וכל אחת מהן יכולה להיות דלוקה או כבויה. מבצעים לפי הסדר את הצעדים $S_0,S_1,...,S_i,S_j$..... לפי החוקים הבאים:-

עבור כל j הצעד S_j פועל אך ורק על המנורה L_j בלי להשפיע על המנורות האחרות. אם בשעת הפעלת S_j נמצאת המנורה L_{j-1} דלוקה, אזי מחליפים את המצב של L_j (דהיינו מדלוק לכבוי או מכבוי לדלוק). אם בשעת הפעלת S_j נמצאת L_{j-1} כבויה, אזי מצבה של L_j לא ישתנה.

הסימון המספרי של המנורות הוא $(\bmod n)$, כלומר $L_{-1} = L_{n-1}, L_0 = L_n, L_1 = L_{n+1}$, וכו'. בהתחלת הפעולה, כל המנורות דלוקות.

הוכח כי:

(i) קיים מספר טבעי $M(n)$ כך שעם בצוע $S_{M(n)}$, שוב תהיינה כל המנורות דלוקות.

(ii) אם n הוא בעל הצורה 2^k, אזי תהיינה כל המנורות דלוקות אחרי $n^2 - 1$, צעדים.

(iii) אם n הוא בעל הצורה $2^k + 1$, אזי תהיינה כל המנורות דלוקות אחרי $n^2 - n + 1$ צעדים.

מבין נבחרת ישראל זכו:

מדלית זהב: עומר אנגיל, כתה י"ב, תיכון ליאו בק, חיפה.

מדליות כסף: אבישי ונונו, כתה י"ב, בי"ס למדעים ולאמנויות, ירושלים.
אורן נחושתן, כתה י"ב, הגמנסיה הריאלית, ראשון-לציון.

מדליות ארד: מקסים איורש, כתה י', תיכון ליאו בק, חיפה.
מרק גולדשמידט, ירושלים.

בעיות חדשות

1. הפונקציה $f(a,b)$ מוגדרת עבור כל a,b שלמים ולא שליליים. נתון כי

(i) עבור $a<b$, $f(a,b)=0$

(ii) עבור $a \ge b$, קיים

$$f(a,b)=f(a-1,b)+f(a,b-1)$$

מצא את $f(a,b)$.

2. הקודקודים D,E,F של משולש שווי צלעות נמצאים על שלוש הצלעות של משולש A,B,C.
אם a,b,c הם אורכי הצלעות של ABC ו-S הוא שטחו, הוכח כי

$$DE \ge 2\sqrt{2}\,S\cdot\left\{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S\right\}^{-1/2}$$

3. אם $\{x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n\}$ הם מספרים שונים כלשהם, ממשיים או מרוכבים, פשט את הנוסחה

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\left\{1-\prod_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{n}\left(1+\frac{1}{x_j-x_k}\right)\right\}$$