HARALD BOHR

ÜBER EINEN SATZ VON EDMUND LANDAU

Über einen Satz von Edmund Landau.

Von

Harald Bohr, Kopenhagen.

---

1. Ein wichtiger Satz in der Theorie der konformen Abbildung besagt die Existenz einer positiven absoluten Konstanten K mit folgender Eigenschaft: Für jede für $|z| \leqq 1$ reguläre Funktion

$$w = f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

mit $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, welche die Kreisscheibe $|z| \leqq 1$ schlicht auf ein Gebiet der w-Ebene abbildet, ist der Radius r_f des größten Kreises $|w| = r_f$, dessen Punkte w sämtlich von der Funktion $f(z)$ ($|z| \leqq 1$) angenommen werden, $\geqq K$. In einer kürzlich erschienenen sehr interessanten Note[1]) hat nun Herr LANDAU bewiesen, daß in diesem Satze die Forderung, daß $f(z)$ das Gebiet $|z| \leqq 1$ schlicht abbilden soll, einfach gestrichen werden kann[2]).

2. Es sei $f(z) = \Sigma a_n z^n$ eine beliebige für $|z| \leqq 1$ reguläre Funktion mit $a_0 = 0$, und es sei $\underset{|z| = \frac{1}{2}}{\mathrm{Max}} |f(z)| = M_f$ gesetzt. Aus dem CAUCHY'schen Satze

---

1) E. LANDAU, Zum KOEBEschen Verzerrungssatz, Palermo Rendiconti, Bd. 46 (1922).

2) Es sei zur Orientierung bemerkt, daß es in der von LANDAU verallgemeinerten Form des Satzes — im Gegensatz zu der ursprünglichen Form, wo die Schlichtheit verlangt wurde — offenbar nicht erlaubt ist die Definition von r_f so zu ändern, daß r_f der Radius der größten Kreisscheibe $|w| \leqq r_f$ (statt des größten Kreises $|w| = r_f$), deren Punkte w sämtlich angenommen werden, bedeutet. Denn zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es Funktionen $f(z) = \Sigma a_n z^n$ mit $a_0 = 0, a_1 = 1$, die für $|z| \leqq 1$ regulär sind, aber nicht den Wert ε annehmen; eine solche Funktion ist ja z. B. die ganze Transzendente $f(z) = -\varepsilon\left(e^{-\frac{z}{\varepsilon}} - 1\right) = z - \frac{z^2}{2\varepsilon} + \dots$, die überall $\neq \varepsilon$ ist.

folgt sofort, daß $M_f \geqq k_1 |a_1|$ ist, wo k_1 eine positive absolute Konstante bedeutet; denn es ist ja

$$|a_1| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z| = \frac{1}{2}} \frac{f(z)}{z^2} dz \right| \leqq 2 M_f.$$

Wenn die betrachtete Funktion $f(z)$ speziell eine schlichte Abbildung der Kreisscheibe $|z| \leqq 1$ vermittelt, gilt ferner nach einem bekannten Satz aus der Theorie der konformen Abbildung die Ungleichung $M_f \leqq k_2 |a_1|$, wo k_2 (ebenso wie k_1) eine positive absolute Konstante bedeutet; aus den somit hier geltenden Ungleichungen $k_1 |a_1| \leqq M_f \leqq k_2 |a_1|$ ist unmittelbar ersichtlich, daß in dem eingangs genannten Satze über schlichte Abbildung, die Voraussetzung $a_1 = 1$ durch die Voraussetzung $M_f = 1$ ersetzt werden kann, d. h. aus $M_f = 1$ (und $a_0 = 0$) folgt $r_f \geqq K_1$, wo K_1 wiederum eine positive absolute Konstante bedeutet. In dieser Note soll nun bewiesen werden, daß auch dieser letzte Satz — ebenso wie der in 1. angeführte Satz — richtig bleibt, wenn die Forderung der Schlichtheit gestrichen wird. Der so entstehende Satz enthält den LANDAU'schen Satz, ist aber nicht unmittelbar aus diesem abzuleiten; denn für nicht-schlichte Abbildung gilt ja die Ungleichung $M_f \geqq k_1 |a_1|$, aber nicht umgekehrt eine Ungleichung der Form $M_f \leqq k_2 |a_1|$ (es kann ja z. B. $a_1 = 0$, $M_f \neq 0$ sein).

3. Ich beweise den verallgemeinerten LANDAU'schen Satz in der folgenden Fassung, wo nicht eben der Kreis $|z| = \frac{1}{2}$, sondern ein beliebiger Kreis $|z| = \rho < 1$ betrachtet wird:

Es sei ρ eine gegebene Zahl im Intervalle $0 < \rho < 1$, und $w = f(z) = \sum a_n z^n$ eine beliebige für $|z| \leqq 1$ reguläre Funktion mit $a_0 = 0$ und $\underset{|z| = \rho}{\mathrm{Max}} |f(z)| = 1$. Dann ist der Radius r_f des größten Kreises $|w| = r_f$, dessen Punkte von $f(z)$ ($|z| \leqq 1$) sämtlich angenommen werden, $\geqq C$, wo $C = C(\rho)$ eine positive Zahl ist, die nur von ρ abhängt.

Der Beweis dieses Satzes verläuft im wesentlichen ganz wie der LANDAU'sche Beweis seines Satzes; nur benutze ich einen anderen Satz aus dem PICARD-LANDAU'schen Satzkreis als denjenigen, welcher von LANDAU angewendet wurde, nämlich den SCHOTTKY'schen Satz in der folgenden von LANDAU verschärften Form: Es sei $g(z)$ für $|z| \leqq 1$ regulär und $\neq 0, 1$, und $|g(0)| \leqq 1$. Dann gibt es zu jedem ρ im Intervalle $0 < \rho < 1$ eine nur von ρ abhängige positive Zahl $\Omega(\rho)$ derart, daß die Ungleichung $|g(z)| < \Omega(\rho)$ für alle $|z| \leqq \rho$ besteht. Aus diesem LANDAU-SCHOTTKY'schen Satze folgt in wenigen Worten die Existenz einer Zahl $C = C(\rho)$ im Sinne des obigen Satzes, und zwar ergibt sich, daß z. B. die Zahl

$$C_0 = C_0(\rho) = \frac{1}{1 + 3\,\Omega(\rho)}$$

die erwähnte Eigenschaft besitzt. In der Tat, wäre dies nicht der Fall, so gäbe es eine für $|z| \leqq 1$ reguläre Funktion $f_0(z) = \Sigma a_n z^n$ mit $a_0 = 0$ und $\underset{|z|=\rho}{\mathrm{Max}} |f_0(z)| = 1$, für welche der Radius $r_{r_0} < C_0$ wäre, und die also weder sämtliche Werte auf dem Kreise $|w| = C_0$ noch sämtliche Werte auf dem Kreise $|w| = 2\,C_0$ annehme, etwa nicht die Werte $\alpha = C_0 e^{i\theta}$ und $\beta = 2\,C_0 e^{i\varphi}$. Ich setze

$$g(z) = \frac{f_0(z) - \alpha}{\beta - \alpha};$$

dann genügt $g(z)$ offenbar den sämtlichen Voraussetzungen des LANDAU-SCHOTTKY'schen Satzes, d. h. es ist $g(z)$ für $|z| \leqq 1$ regulär und $\neq 0, 1$, und ferner

$$|g(0)| = \left|\frac{f_0(0) - \alpha}{\beta - \alpha}\right| \leqq \frac{C_0}{2\,C_0 - C_0} = 1.$$

Also wäre für $|z| \leqq \rho$

$$|g(z)| < \Omega(\rho),$$

d. h. es wäre für $|z| \leqq \rho$

$$|f_0(z)| = |\alpha + (\beta - \alpha)\,g(z)| < C_0 + 3\,C_0\,\Omega(\rho) = 1$$

gegen die Voraussetzung $\underset{|z|=\rho}{\mathrm{Max}} |f_0(z)| = 1$.

4. Es braucht kaum gesagt zu werden, daß der geringfügigen Verallgemeinerung, die der in 3. bewiesene Satz gegenüber dem (neuartigen) LANDAU'schen Satze aufweist, an sich kein großes Interesse zukommt; wenn ich mir aber trotzdem erlaubt habe, ihn zum Gegenstand dieser Note zu machen, liegt es daran, daß ich auf gewisse funktionentheoretische Untersuchungen über Funktionen von mehreren Variablen gestoßen bin, bei welchen die Anwendung des Satzes eben in dieser Formulierung wesentlich bequemer scheint als die Anwendung in der etwas spezielleren LANDAU'schen Formulierung. Als ein möglichst einfaches Beispiel zur Charakterisierung solcher Anwendungen werde ich den folgenden Satz beweisen: Es sei $\varphi(y)$ eine (nicht konstante) ganze Transzendente von y, und $w_1 = P_1(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} x_1^n, \ldots,$

$w_m = P_m(x_m) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} x_m^n$ Funktionen je einer der m Variabeln $x_1, \ldots, x_m$, welche in den respektiven Einheitskreisen $|x_1| \leqq 1, \ldots, |x_m| \leqq 1$ alle regulär sind, und die Bedingungen $a_0^{(1)} = \ldots = a_0^{(m)} = 0$ erfüllen. Es sei die — im Gebiete $|x_1| \leqq 1, \ldots, |x_m| \leqq 1$ absolut konvergente — Potenzreihe in m Variabeln

$$Q(x_1, \ldots, x_m) = \varphi\{P_1(x_1) + \ldots + P_m(x_m)\} = \sum A_{n_1, \ldots, n_m} x_1^{n_1} \ldots x_m^{n_m}$$

gebildet, und es erfülle diese Reihe die Ungleichung $|Q(x_1, \ldots, x_m)| \leqq 1$ für $|x_1| \leqq 1, \ldots, |x_m| \leqq 1$. Dann gibt es zu jedem r des Intervalles $0 < r < 1$ eine nur von der Funktion φ und der Zahl r abhängige (d. h. von m und den m Funktionen $P_1, \ldots, P_m$ unabhängige) Zahl $L = L(\varphi, r)$ derart, daß für $|x_1| = \ldots = |x_m| = r$ die Majorantenreihe

$$\sum \left| A_{n_1, \ldots, n_m} x_1^{n_1} \ldots x_m^{n_m} \right|$$

$\leqq L$ ist. Es genügt offenbar die Existenz einer, nur von φ und r abhängigen, Zahl $L_1 = L_1(\varphi, r)$ zu beweisen derart, daß für $|x_1| = \ldots = |x_m| = r$ die Ungleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n^{(1)} x_1^n \right| + \ldots + \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n^{(m)} x_m^n \right| \leqq L_1$$

besteht, und um die Existenz einer solchen Zahl $L_1(\varphi, r)$ festzustellen, genügt es wiederum (infolge der CAUCHY'schen Ungleichungen) zu beweisen, daß

$$\operatorname*{Max}_{|x_1| = \rho} |P_1(x_1)| + \ldots + \operatorname*{Max}_{|x_m| = \rho} |P_m(x_m)| \leqq L_2$$

ist, wo ρ etwa die Zahl $\frac{1}{2}(1 + r)$ bedeutet und L_2 (ebenso wie L und L_1) nur von φ und r, d. h. von φ und ρ abhängt. Zu diesem Zwecke sei zunächst die Zahl $R_0 = R_0(\varphi)$ so groß gewählt, daß für $R = R_0$ (und also auch für $R \geqq R_0$) die Ungleichung $\operatorname*{Max}_{|y| = R} |\varphi(y)| > 1$ besteht. Bezeichnen nun $r_1, \ldots, r_m$ die Radien der größten Kreise $|w_1| = r_1, \ldots, |w_m| = r_m$, deren sämtliche Punkte von den respektiven Funktionen $w_1 = P_1(x_1), \ldots, w_m = P_m(x_m)$ in ihren Einheitskreisen $|x_1| \leqq 1, \ldots, |x_m| \leqq 1$ angenommen werden, so enthält die Menge der Werte, welche die Summe

$$S(x_1, \ldots x_m) = P_1(x_1) + \ldots + P_m(x_m)$$

im Gebiete $|x_1| \leqq 1, \ldots, |x_m| \leqq 1$ annimmt, offenbar sämtliche Punkte auf dem Kreise $|y| = r_1 + \ldots + r_m$, und es muß daher $r_1 + \ldots + r_m < R_0$ sein. Nun ist aber nach dem Satze in 3.

$$\operatorname*{Max}_{|x_1|=\rho} |P_1(x_1)| \leqq \frac{r_1}{C(\rho)}, \ldots, \operatorname*{Max}_{|x_m|=\rho} |P_m(x_m)| \leqq \frac{r_m}{C(\rho)},$$

und es ist also

$$\operatorname*{Max}_{|x_1|=\rho} |P_1(x_1)| + \ldots + \operatorname*{Max}_{|x_m|=\rho} |P_m(x_m)| \leqq \frac{1}{C(\rho)} (r_1 + \ldots + r_m) < \frac{1}{C(\rho)} R_0 = L_1(\varphi, \rho),$$

womit der Satz bewiesen ist.

Ich füge noch hinzu, daß Herr H. KLOOSTERMAN sich mit der Anwendung des genannten Satzes auf Potenzreihen mit unendlich vielen Variabeln beschäftigt hat, und seine Resultate — sowie ihre Beziehungen zu der Theorie der DIRICHLET'schen Reihen — bald veröffentlichen wird.

Rec. 23. XI. 22.