הרלד בוהר

על משפט אחד של ארמונד לנדאו

על משפט אחד של ארמונד לנדאו.

הרלד בוהר, קופנהגן.

תרגם בנימין אמירה, תל־אביב.

א. משפט השוב אחד בתורת ההעתקה הקונפורמית מורה על מציאותו של גדל חיובי קבוע ומוחלט K בעל תכונה זו: לכל פונקציה הולומורפית בשביל $|z| \leqq 1$

$$w = f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

עם $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, המעתיקה באפן פשוט (schlicht) את העגול $|z| \leqq 1$ על איזה חבל של מישור הw, יהיה הרדיוס r_f של המעגל הכי גדול $|w| = r_f$, אשר הפונקציה $f(z)$ ($|z| \leqq 1$) מקבלת את ערכי כל נקודותיו w, $\leqq K$. והנה הוכית מר לנדאו זה לא כבר במאמר מענין מאד[1], שממשפט זה אפשר להרחיק את הדרישה, שהפונקציה $f(z)$ תעתיק את החבל $|z| \leqq 1$ באפן פשוט[2].

ב. תהי $f(z) = \sum a_n z^n$ איזו פונקציה הולומורפית בשביל $|z| \leqq 1$, ויהי $M_f = \underset{|z| = \frac{1}{2}}{\mathrm{Max}} |f(z)|$.

ממשפט קושי נראה בבירור: $|a_1| \leqq k_1 M_f$, כש k_1 מציין גדל חיובי קבוע ומוחלט; כי הן

$$|a_1| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z| = \frac{1}{2}} \frac{f(z)}{z^2}\, dz \right| \leqq 2 M_f.$$

כשמקבלים בפרט באמצעות הפונקציה הנ״ל $f(z)$ העתקה פשוטה של העגול $|z| \leqq 1$,

---

1) E. Landau, Zum Koebeschen Verzerrungssatz, Palermo Rendiconti, T. 46 (1922).

2) הנני מעיר לשם הדרכה, כי בצורה הכללית שנתנה למשפט זה ע״י לנדאו — בנגוד לצורה הקודמת שכללה את הדרישה לפשטות ההעתקה — אכור כמובן לשנות את הגדרת r_f באפן ש־r_f יצין את הרדיוס של העגול הכי גדול $|w| \leqq r_f$ (במקום המעגל הכי גדול $|w| = r_f$) אשר הפונקציה מקבלת את ערכי כל נקודותיו. כי לכל $\varepsilon > 0$ ישנן פונקציות $f(z) = \sum a_n z^n$ עם $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, אשר הן הולומורפיות בשביל $|z| \leqq 1$, אבל אינן מקבלות את הערך ε; פונקציה כזו היא, למשל, הטרנסצנדנטית השלמה

$$f(z) = -\varepsilon\left(e^{-\frac{z}{\varepsilon}} - 1\right) = z - \frac{z^2}{2\varepsilon} + \dots,$$

אשר היא בכל מקום $\neq \varepsilon$.

הרי מתקים, עפ״י משפט ידוע בתורת ההעתקה הקונפורמית, גם אי־השויון $k_2|a_1| \geqq M_f$, כש k_2 (כמו k_1) מציין גדל חיובי קבוע ומוחלט; מתוך אי־השויונות $k_2|a_1| \geqq M_f \geqq k_1|a_1|$ הקיומים כאן נראה הדבר בבירור, שבמשפט הנ״ל על ההעתקה הפשוטה אפשר להמיר את התנאי $1 = a_1$ בתנאי $1 = M_f$, ז. א. ב $1 = M_f$ (וגם $0 = a_0$) יוצא $K_1 \leqq r_f$, כש K_1 מציין גדל חיובי קבוע ומוחלט. והנה במאמר הזה נוכיח, שהמשפט האחרון הזה עומד בתקפו — כמשפט הנזכר בסעיף א׳ — גם לאחר שנרחיק ממנו את הדרישה לפשטות ההעתקה. יש בכלל משפט זה משפטו של לנדאו, אך אין ללמד עליו ממנו באפן ישר; כי בהעתקה שאינה פשוטה קים אמנם אי־השויון $k_1|a_1| \leqq M_f$, אבל לא, להפך, אי־השויון בצורת $k_2|a_1| \geqq M_f$ (הן יכול, למשל, היות $0 = a_1$, $0 \neq M_f$).

ג. אני מוכיח את המשפט הנכלל של לנדאו בנוסח הבא להלן, כשאין אנו דנים במעגל $|z| = \frac{1}{2}$ דוקא, אלא באיזה מעגל שהוא $|z| = \rho < 1$.

יהי ρ מספר נתון באנטרול $0 < \rho < 1$, ו $w = f(z) = \Sigma a_n z^n$ תהי איזו פונקציה הולומורפית בשביל $|z| \leqq 1$ עם $a_0 = 0$ וגם $\underset{|z|=\rho}{\mathrm{Max}}|f(z)| = 1$. אז יהיה הרדיוס r_f של המעגל הכי גדול $|w| = r_f$, אשר הפונקציה $f(z)$ מקבלת, $\geqq C$, כש $C = C(\rho)$ יהי מספר חיובי התלוי רק ב־ρ.

הוכחת המשפט הזה דומה בעיקרה לזו שהביא לנדאו למשפטו, אלא שבמקום המשפט, שלנדאו משתמש בו הנני משתמש במשפט אחר מסדר־המשפטים של פיקר(ד)־לנדאו, היא המשפט של שוטקי (SCHOTTKY) בצורתו החריפה ביותר, שנתנה לו ע״י לנדאו: בשביל $|z| \leqq 1$ תהי $g(z)$ הולומורפית ו־$\neq 0, 1$, ויהי $|g(0)| \leqq 1$. אז יש לכל ρ באנטרול $0 < \rho < 1$ מספר חיובי $\Omega(\rho)$, התלוי רק ב־ρ, באפן שיתקים אי־השויון $|g(z)| < \Omega(\rho)$ בשביל כל $|z| \leqq \rho$. מהמשפט הזה של לנדאו־שוטקי אפשר ללמד בקצור על מציאותו של מספר $C = C(\rho)$, בהוראת המשפט הנ״ל, וכך יוצא מזה, למשל, שהמספר

$$C_0 = C_0(\rho) = \frac{1}{1 + 3\,\Omega(\rho)}$$

הוא בעל התכונה הדרושה. ואמנם, לולא זאת, כי אז היתה פונקציה אחת $f_0(z) = \Sigma a_n z^n$ הולומורפית בשביל $|z| \leqq 1$ עם $a_0 = 0$ וגם $\underset{|z|=\rho}{\mathrm{Max}}|f_0(z)| = 1$, אשר בשבילה יהיה הרדיוס $r_{f_0} < C_0$, ואשר לא תקבל איפוא לא את כל הערכים שעל המעגל $|w| = C_0$ ולא את כל הערכים שעל המעגל $|w| = 2C_0$; לדוגמא לא את הערכים $\alpha = C_0 e^{i\delta}$ ו־$\beta = 2C_0 e^{i\varphi}$. כשנניח

$$g(z) = \frac{f_0(z) - \alpha}{\beta - \alpha},$$

הרי ברור, ש־$g(z)$ ממלאה אז אחרי כל התנאים של משפט לנדאו־שוטקי, ז. א. $g(z)$ הולומורפית ו־$\neq 0, 1$ בשביל $|z| \leqq 1$, ומלבד זה:

$$|g(0)| = \left|\frac{f_0(0) - \alpha}{\beta - \alpha}\right| \leqq \frac{C_0}{2C_0 - C_0} = 1.$$

אם כן יהיה בשביל $|z| \leqq \rho$

$$|g(z)| < \Omega(\rho),$$

ז. א. בשביל $|z| \leqq \rho$ יהיה

$$|f_0(z)| = |\alpha + (\beta - \alpha)\, g(z)| < C_0 + 3\, C_0\, \Omega(\rho) = 1$$

בנגוד לתנאי $\max\limits_{|z|=\rho} |f_0(z)| = 1$.

ד. למותר לנו להגיד, שההכללה הקלה, המציגה את המשפט שהוכחנו בסעיף ג׳ על פני משפטו (החדש) של לנדאו, אינה ראויה כשהיא לעצמה לתשומת לב מיוחדת; ואם בכל זאת התרתי לעצמי לעשותה לנושא המאמר הזה, אין זאת אלא משום שנתקלתי בחקירות ידועות בתורת הפונקציות בעלות משתנים רבים, שבהן נוח להשתמש במשפט זה בנוסח הנ״ל מאשר בנוסח של לנדאו הפרטי יותר. בתור דוגמא פשוטה ביותר אוכיח כאן את המשפט הבא: תהי $\varphi(y)$ פונקציה טרנסצנדנטית שלמה (שאיננה גדל קבוע) של y, תהיינה $w_1 = P_1(x_1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} x_1^n, \ldots, w_m = P_m(x_m) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} x_m^n$ פונקציות, אשר כל אחת מהן היא פונקציה של אחד מ־m המשתנים $x_1, \ldots, x_m$, ואשר כולן הולומורפיות בהתאמה בעגולים $|x_1| \leqq 1, \ldots, |x_m| \leqq 1$, ומקימות את התנאים $a_0^{(1)} = a_0^{(2)} = \cdots = a_0^{(m)} = 0$. נבנה את שורת החזקות ב־m משתנים

$$Q(x_1, \ldots, x_m) = \varphi\{P_1(x_1) + \ldots + P_m(x_m)\} = \Sigma A_{n_1, \ldots, n_m} x_1^{n_1} \ldots x_m^{n_m}$$

המתכנסת בהחלט בתחום $|x_1| \leqq 1, \ldots, |x_m| \leqq 1$, ותקים השורה הזאת את אי־השויון $|Q(x_1, \ldots, x_m)| \leqq 1$, בשביל $|x_1| \leqq 1, \ldots, |x_m| \leqq 1$. אז יש לכל r באינטרבל $0 < r < 1$ מספר אחד $L = L(\varphi, r)$, התלוי רק בפונקציה φ ובמספר r (ז. א. שאינו תלוי ב־m וב־m הפונקציות $P_1, \ldots, P_m$), באפן שבשביל $|x_1| = \ldots = |x_m| = r$ תהי שורת המיורנטית

$$\Sigma |A_{n_1, \ldots, n_m} x_1^{n_1} \ldots x_m^{n_m}|$$

יותר קטנה או שוה ל־L. ברור הדבר, שדי לנו להוכיח את מציאותו של מספר אחד $L_1 = L_1(\varphi, r)$ התלוי רק ב φ וב r באפן שבשביל $|x_1| = \ldots = |x_m| = r$ יתקים אי־השויון

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(1)} x_1^n| + \ldots + \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(m)} x_m^n| \leqq L_1,$$

ובכדי להוכח ממציאות מספר כזה $L_1(\varphi, r)$ די להוכיח (מפני אי־השויונות של קושי), כי

$$\max_{|x_1| = \rho} |P_1(x_1)| + \ldots + \max_{|x_m| = \rho} |P_m(x_m)| \leqq L_2,$$

כש ρ מצין, למשל, את המספר $\frac{1}{2}(1 + r)$; L_2 (כמו L ו L_1) תלוי רק ב φ וב־r ז. א. ב φ ורק. למטרה זו נבחר ראשית במספר $R_0 = R_0(\varphi)$ כל כך גדול עד שיתקים אי־השויון

$1 < \underset{|y|=R}{\mathrm{Max}}\,|\varphi(y)|$ בשביל $R_0 = R$ (וממילא גם בשביל $R_0 \leqq R$). עכשו, כשיצינו $r_1, \ldots, r_m$ את הרדיוסים של המעגלים הכי גדולים $r_1 = |w_1|, \ldots, r_m = |w_m|$, אשר הפונקציות $P_1(x_1) = w_1, \ldots, P_m(x_m) = w_m$ מקבלות את ערכי כל נקודותיהם בהתאמה בעגולי האחד שלהן $|x_1| \leqq 1, \ldots, |x_m| \leqq 1$, אז יכיל, כנראה, קבוץ הערכים, אשר הסכום

$$S(x_1, \ldots, x_m) = P_1(x_1) + \ldots + P_m(x_m)$$

מעלה בתוך התחום $|x_1| \leqq 1, \ldots, |x_m| \leqq 1$, את ערכי כל הנקודות של המעגל $|y| = r_1 + \ldots + r_m$, ולפיכך מן הדין הוא שיהא $r_1 + \ldots + r_m < R_0$. ואולם עפ״י המשפט בסעיף ג׳

$$\underset{|x_1|=\rho}{\mathrm{Max}}\,|P_1(x_1)| \leqq \frac{r_1}{C(\rho)}, \ldots, \underset{|x_m|=\rho}{\mathrm{Max}}\,|P_m(x_m)| \leqq \frac{r_m}{C(\rho)};$$

ולכן:

$$\underset{|x_1|=\rho}{\mathrm{Max}}\,|P_1(x_1)| + \ldots + \underset{|x_m|=\rho}{\mathrm{Max}}\,|P_m(x_m)| \leqq \frac{1}{C(\rho)}(r_1 + \ldots + r_m) < \frac{1}{C(\rho)} R_0 = L_2(\varphi, \rho),$$

ובזאת הוכחנו את המשפט.

והנני עוד להוסיף, שמר ה. קלוסטרמן (H. Kloosterman) התעסק בשמוש המשפט הנ״ל לשורות של הזקות בעלות מספר אין־סופי של משתנים ובקרוב יפרסם את מסקנותיו וכמו כן את היחסים שביניהן ובין תורת השורות של דיריכלֶט.