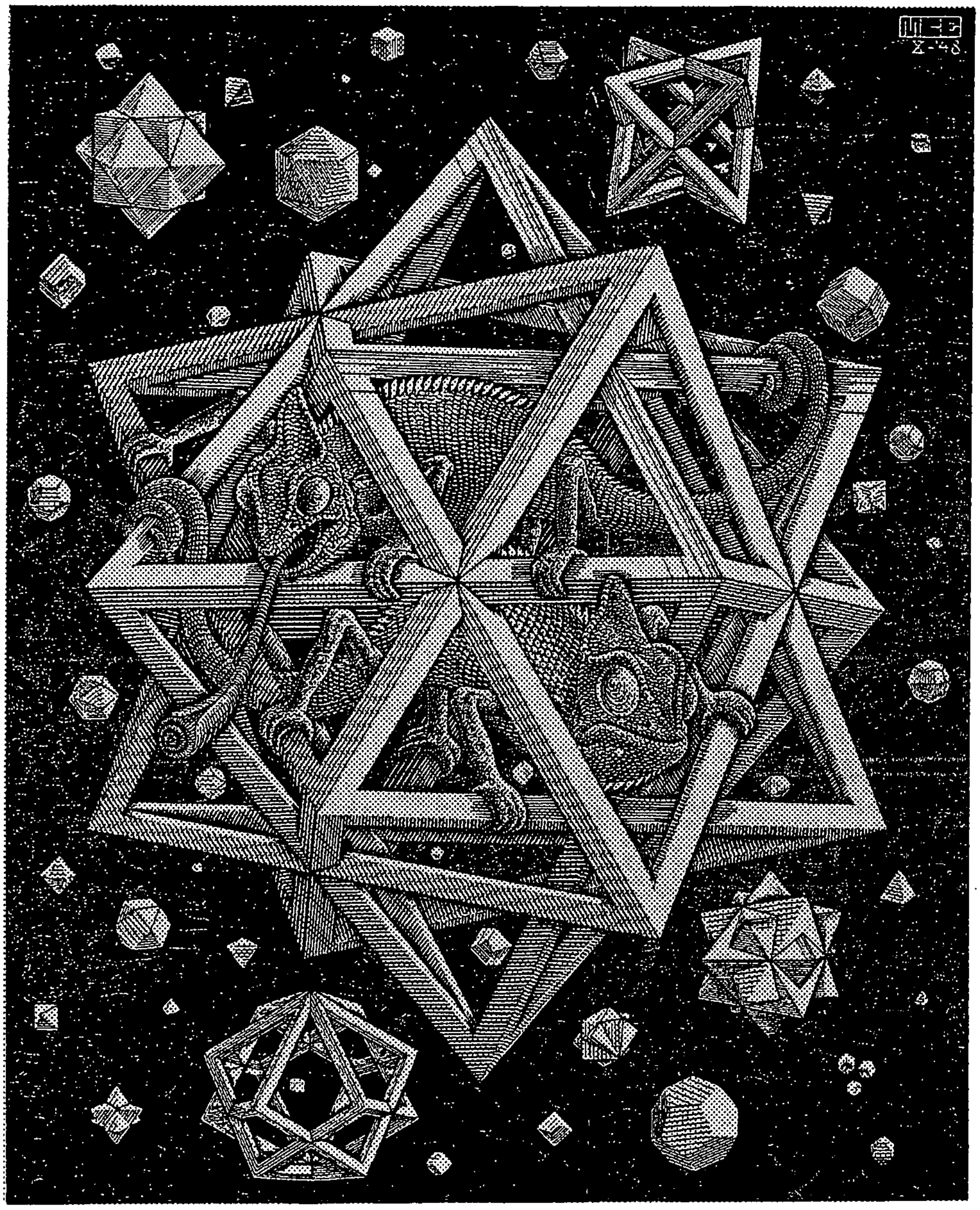
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס' 4 אדר ב' תשמ"ו - מרץ 1986



הפקולטה למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון ויצמן למדע
רחובות

בחסות המרכז המדעי י.ב.מ. ישראל

תוכן העניינים **עמוד**

אתגר - גליונות מתמטיקה

מוצא לאור ע"י הפקולטות למתמטיקה במכון ויצמן למדע ובטכניון.

המערכת: פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שימושית, מכון ויצמן למדע.

פרופ' א. ברמן, המחלקה למתמטיקה, הטכניון.

מען המערכת: הפקולטה למתמטיקה שימושית, מכון ויצמן למדע, ת.ד. 26

רחובות - 76100, טל. 08-483544.

דבר המערכת

עם הופעת גליון זה עוברת מערכת עתוננו לשנת 1986 מהטכניון למכון ויצמן. שיתוף הפעולה בין העורכים נמשך כפי שהיה ואנו מקוים גם להמשך שיתוף הפעולה מצד הקוראים ואף להגברתו. מספר הקוראים השולחים פתרונות על הבעיות גדל בזמן האחרון במידה ניכרת אם כי עדין לא הגיע לממדים שלהם היינו מצפים.

כבר נכנס אדר ואנחנו מאחלים לכל קוראינו שיקראו את החוברת הזאת בשמחה ויהנו מפתרון הבעיות.

* * *

בעיה

בציור מוצגת סכימה של תרגיל חלוק. אחה מתבקש לכתב את הספרות במקום הכוכבים. קיים רק פתרון אחד. (שים לב לנקודה העשרונית במנה).

```
****.****
---------
 ****** (***
 ***
 ---
   ***
   ***
   ---
    ***
    ***
    ---
     ***
     ***
     ---
       ****
       ****
       ----
       ----
```

(הפתרון בעמ' 26)

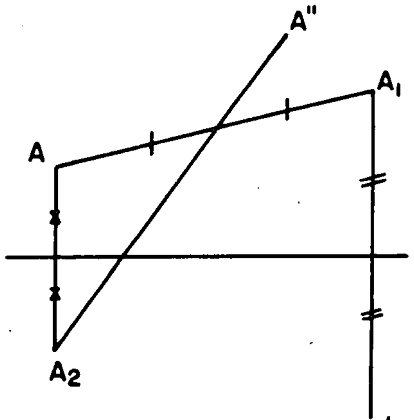
טרנספורמציות של המישור - סיבובים (המשך)

ר. רוטנברג, חיפה

IV מכפלת טרנספורמציות

א. הגדרה:

תהינה T_1, T_2 שתי טרנספורמציות של E^2. נגדיר את מכפלתן T_2oT_1 כהעתקה של E^2 ל-E^2 אשר לכל נקודה A במישור מתאימה הנקודה $(T_2oT_1)(A)=A'$ על-ידי $T_2(T_1(A))=A'$, במלים אחרות: בשלב ראשון נעתיק A ל-$T_1(A)=A_1$ ולאחר מכן נעתיק A_1 לנקודה A': $T_2(A_1)=A'$.
בצענו, זו אחר זו את הטרנספורמציות T_1 , T_2 (שים לב ש-T_1 מופעלת ראשונה למרות שבסימון T_2oT_1 היא כאילו שניה).



איור 12

דוגמא: אם T_1 הוא שיקוף בנקודה 0 , $\sigma_o=T_1$, ו-T_2 שיקוף בישר 1 שאינו עובר דרך 0: $\sigma_1=T_2$, אנו רואים באיור 12 את תוצאת המכפלה $\sigma_1 o\sigma_0=T_2oT_1$; $\sigma_o(A)=A_1$ ו-$A'=\sigma_1(A_1)$, לכן $(\sigma_1 o\sigma_o)(A)=A'$. רואים גם באיור 12 שאם נבצע מכפלה בסדר הפוך T_1oT_2 אז $\sigma_1(A)=A_2$, לכן $(\sigma_o o\sigma_1)(A)=A''$ וברור כי $A'=A''$, ז"א $\sigma_o o\sigma_1=\sigma_1 o\sigma_o$; מכפלת טרנספורמציות אינה מקיימת, בדרך כלל, חוק החילוף (קומוטטיביות).

ב. משפטים:

1. מכפלה של שתי טרנספורמציות היא בעצמה טרנספורמציה.
2. אם T טרנספורמציה ו-T^{-1} הטרנספורמציה ההפוכה (סעיף I, ד) אזי $e=ToT^{-1}=T^{-1}oT$ (e הזהות).
3. לכל טרנספורמציה T; $T=eoT=Toe$.
4. אם T_1, T_2, T_3 הן שלוש טרנספורמציות של המישור אזי $(T_3oT_2)oT_1=T_3o(T_2oT_1)$. מקום הסוגריים מסביר מהי הכוונה במכפלות. זהו חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות).
5. מאחר ש-T_2oT_1 היא טרנספורמציה (סעיף 1 לעיל), יש לה טרנספורמציה הפוכה $(T_2oT_1)^{-1}$ ואמנם: $(T_2oT_1)^{-1}=T_1^{-1}oT_2^{-1}$ (שים לב לסדר הגורמים בכל אגף).

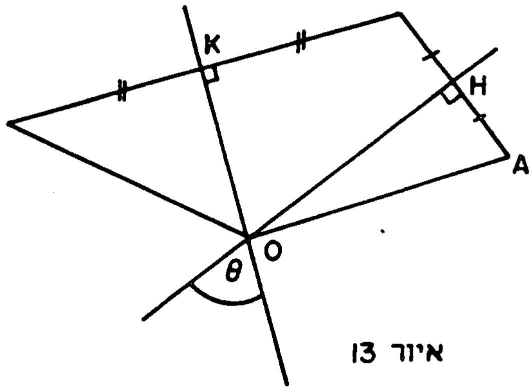
הוכחת המשפטים הנ"ל לא קשה. נסה להוכיחם.

6. ראינו כי עבור שקופים: $\sigma_o^{-1}=\sigma_o$ ו-$\sigma_1^{-1}=\sigma_1$ (ראה סעיף ID) לכן בשימוש תכונה 2 לעיל נקבל $e=\sigma_o o\sigma_o$ ו-$e=\sigma_1 o\sigma_1$.

7. אם ρ_1,ρ_2 הם שני סיבובים סביב אותה נקודה 0 בזויות φ_1, φ_2 בהתאמה, אזי $\rho_1\circ\rho_2=\rho_2\circ\rho_1=\rho_{(o,\varphi_1+\varphi_2)}$. למשל, אם ρ_1 הוא סיבוב סביב 0 ב-$\varphi_1=+140^\circ$, ו-ρ_2 סיבוב סביב 0 ב-$\varphi_2=+55^\circ$, אזי $\rho_2\circ\rho_1$ הוא סיבוב סביב 0 בזוית $+195^\circ$ (או היינו הך ב--165°) ואם $\varphi_1=80^\circ$, $\Phi_2=-100^\circ$ אזי $\rho_2\circ\rho_1$ הוא סיבב 0 ב--20°. במקרה זה של מכפלת סיבובים סביב אותה נקודה חוק החילוף פועל: $\rho_1\circ\rho_2=\rho_2\circ\rho_1$. (הוכח זאת!)

ג. מכפלת שיקופים בישרים נחתכים:

משפט: מכפלת שני שיקופים בישרים l_1, l_2 הנחתכים בנקודה 0 כך שהזוית (המכוונת) בין l_1 ל-l_2 היא בת θ°, היא סיבוב סביב 0 בזוית $\Phi=2\theta^\circ$: $\sigma_{l_2}\circ\sigma_{l_1}=\rho_{(o,2\theta)}$.



איור 13

הוכחה: (ראה איור 13): לכל A ב-E^2, תהי $\sigma_{l_1}(A)=A_1$ לכן l_1 הוא אנך-אמצעי לקטע AA_1; 0 על l_1 ולכן: $|0A|=|0A_1|$. כמו כן אם $H=l_1 \cap AA_1$, אזי $m\measuredangle A0H=m\measuredangle H0A_1$. כעת אם $\sigma_{l_2}(A_1)=A'$ אזי, מסיבות דומות $|0A_1|=|0A'|$ ואם $K=l_2 \cap A_1A'$, $m\measuredangle A_1OK=m\measuredangle KOA'$. כל הזויות הן "מכוונות", ז"א עם סימן מתאים (חיוביות, שליליות ואפס).

מסקנה ראשונה $|OA|=|OA'|$.

וכמו כן (החיבור להלן הוא אלגברי),

$\measuredangle AOA'=\measuredangle AOA_1+\measuredangle A_1OA'=2\measuredangle HOA_1+2\measuredangle A_1OK=2\theta^\circ$

קבלנו שהאורכים $|OA|$, $|OA'|$ שווים והזוית $\measuredangle AOA'$ היא בעלת גודל קבוע $\Phi=2\theta$. זה בדיוק אומר ש-A' מתקבל מ-A ע"י סיבוב סביב 0 בזוית $\Phi=2\theta$: $A'=\rho_{o,2\theta}(A)$ וזה נכון לכל נקודה A במישור; לכן, $\sigma_{l_2}\circ\sigma_{l_1}=\rho_{(o,2\theta)}$. מ.צ.ל.

ד. משפט הפוך:

אם נתון סיבוב ρ של המישור E^2 סביב נקודה O בזוית Φ° אזי אפשר לקבל ρ כמכפלת שני שיקופים בישרים l_1, l_2 העוברים דרך 0 כשהזוית מ-l_1 ל-l_2 היא בת $\theta^\circ=\Phi^\circ/2$. אפשר לבחור באופן שרירותי אחד הישרים l_1 או l_2.

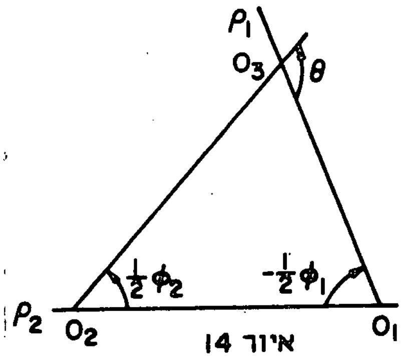
הוכחה: יהיו 0 ו-Φ° נתונים. נבחר ישר l_1 דרך 0 ונסובב l_1 סביב 0 בזוית $Q^{\circ}=\Phi/2$. נקבל ישר שני l_2, ברור כי $\rho_{(o,\Phi)}=\sigma_{l_2}\circ\sigma_{l_1}$ ואם נרצה לבחור דוקא l_2 עובר דרך 0, אז נסובב l_2 סביב 0 בזוית $-\Phi/2$ לקבל l_1.

ה. הערות:

1. אם $\rho=\sigma_{l_2}\circ\sigma_{l_1}$ אזי $\rho^{-1}=\sigma_{l_2}\circ\sigma_{l_1}$.
2. אם l_1 ניצב ל-l_2 כך ש-$\theta=90^{\circ}$ אזי $2\theta=\Phi=180^{\circ}$. במקרה זה המכפלה נותנת חצי סיבוב או שיקוף ב-0: $\sigma_{l_1}\circ\sigma_{l_2}=\sigma_{l_2}\circ\sigma_{l_1}=\sigma_o$. מכאן המשפט: מכפלת שני שיקופים בישרים ניצבים זה לזה נותנת שיקוף בנקודת החיתוך של הישרים והסדר במכפלה לא חשוב. להיפך: כל שיקוף בנקודה 0 הוא מכפלה של שני שיקופים בישרים ניצבים זה לזה העוברים דרך 0, כאשר ניתן לבחור אחד הישרים.

ו. מכפלת סיבובים במרכזים שונים:

משפט: מכפלת שני סיבובים ρ_1, ρ_2 במרכזים שונים 0_1, 0_2 בזוויות Φ_1, Φ_2 כאשר $\Phi_1+\Phi_2=0^{\circ}$, הוא סיבוב סביב מרכז שלישי 0_3 ובזוית $\Phi_1+\Phi_2=\Phi_3$.



איור 14

הוכחה: הדרישה $\Phi_1+\Phi_2=0^{\circ}$ היא בהנחה ש: $-180^{\circ}<\Phi_1<180^{\circ}$ וגם $-180^{\circ}<\Phi_2<180^{\circ}$ ופירושה למעשה ש: $\Phi_2=-\Phi_1$. כעת יהיה ρ_1 הסיבוב סביב 0_1 בזוית Φ_1 ו-ρ_2 הסיבוב סביב 0_2 בזוית Φ_2 (ראה איור 14). בעזרת סעיפים ג' וד' בפרק זה (ראה לעיל), נבחר $l_2=0_10_2$ וישר l_1 דרך 0_1 כך שהזוית המכוונת בין l_1 ל-l_2 (0_10_2) תהי $+\Phi_1/2$ ויהיה l_3 הישר דרך 0_2 העושה עם 0_10_2 זוית מכוונת בת $\Phi_2/2$. מסעיפים ג' וב' לעיל נובע כי: $\rho_1=\sigma_{l_2}\circ\sigma_{l_1}$, $\rho_2=\sigma_{l_3}\circ\sigma_{l_2}$, לכן:

$$\rho_2\circ\rho_1=(\sigma_{l_3}\circ\sigma_{l_2})\circ(\sigma_{l_2}\circ\sigma_{l_1})=\sigma_{l_3}\circ(\sigma_{l_2}\circ\sigma_{l_2})\circ\sigma_{l_1}$$

לפי חוק הקיבוץ זה $\equiv\sigma_{l_3}\circ\sigma_{l_1}=$ מאחר ש: $\sigma_{l_2}\circ\sigma_{l_2}=e$.

$\Phi_2=-\Phi_1$ לכן $\Phi_2/2=-\Phi_1/2$, זה אומר ש: l_1 ו-l_3 אינם מקבילים זה לזה, לכן הם נחתכים בנקודה 0_3 ואז לפי המשפט בסעיף ג' בפרק זה $\sigma_{l_3}\circ\sigma_{l_1}$ נותנת סיבוב סביב 0_3 בזוית $2\theta^{\circ}$ כאשר θ היא הזוית בין l_1 ל-l_3. כפי שרואים באיור 14, θ היא זוית חיצונית במשולש $0_10_20_3$ ואז (בהתחשב בצורה נכונה בסימנים) נקבל $\theta=1/2\Phi_1+1/2\Phi_2$, ז"א $2\theta=\Phi_1+\Phi_2$. הוכחנו אם כן ש: $\rho_2\circ\rho_1=\rho_{(0_3,\Phi_1+\Phi_2)}$.

נעיר כאן שבהוכחת המשפט ניתנת גם דרך לבנית הנקודה 0_3, מרכז הסיבוב שהוא מכפלת הסיבובים ρ_1, ρ_2.

ז. <u>מסקנה:</u>
המכפלה של שני סיבובים ρ_1, ρ_2 במרכזים שונים O_1, O_2 ובזויות ישרות: $\Phi_1=\Phi_2=90^\circ$ (או $\Phi_1=\Phi_2=-90^\circ$) היא חצי סיבוב או שיקוף בנקודה O_3 כך שהמשולש $O_1O_2O_3$ הוא ישר-זוית ושווה-שוקיים: $|O_1O_3|=|O_2O_3|$.

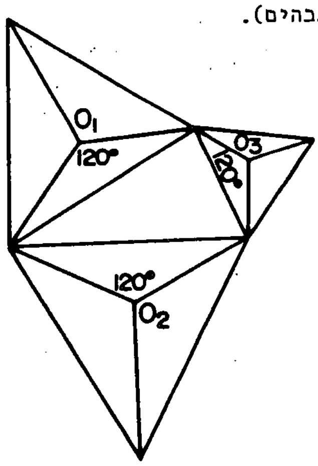
<u>הוכחה:</u> זה נובע מהמשפט הקודם: $1/2\Phi_1=1/2\Phi_2=45^\circ$ לכן המשולש $O_1O_2O_3$ הוא שווה שוקיים והזוית השלישית $m\sphericalangle O_1O_3O_2=90^\circ$. מ.צ.ל.

V. <u>שימושים נוספים של סיבובים במישור</u>

נביא בפרק זה מספר תרגילים נוספים לאלה שבפרק III כשכאן נוכל להעזר במכפלת סיבובים כפי שפתחנו בפרק הקודם. שני התרגילים הראשונים הם מעין המשכים לשני התרגילים הראשונים בפרק III.

1. יהיה ABC משולש נתון ב-E^2. על כל אחת מצלעותיו ומחוץ למשולש, נבנה משולשים שווי צלעות 'ABC, 'BCA, 'CAB. הוכח כי מרכזי משולשים אלה הם קודקודי משולש שווה-צלעות (מרכז משולש שוה צלעות הוא מרכז מעגל החוסם, ז"א פגישת הגבהים).

<u>פתרון</u>



איור 15

יהיו $O_1O_2O_3$ מרכזי המשולשים 'ABC, 'BCA, 'ACB בהתאמה (ראה איור 15). משולשים אלה הם שווי צלעות לכן $|O_1A|=|BO_1|, |O_3C|=|AO_3|$ (זה נכון כי O_1, O_3 הם מרכזי מעגלים חוסמים), וגם $m\sphericalangle BO_1A=m\sphericalangle AO_3C=+120^\circ$. יהיו: ρ_1 סיבוב סביב O_1, ρ_3 סיבוב סביב O_3, שניהם בזוית בת $+120^\circ$, אזי: $\rho_1(B)=A$ ו-$\rho_3(A)=C$. לכן המכפלה $\rho_3 \circ \rho_1$ מעתיקה B ל-C. לפי משפט בסעיף ו' פרק IV, $\rho_3 \circ \rho_1$ הוא סיבוב סביב נקודה O ובזוית $\Phi=240^\circ=120^\circ+120^\circ$ או אם נגביל Φ: $-180^\circ<\Phi<180^\circ$: $\Phi=240^\circ-360^\circ=-120^\circ$. כעת אם ρ_2 הוא סיבוב סביב O_2 בזוית -120°, אזי $\rho_2(B)=C$ וגם $(\rho_3 \circ \rho_1)(B)=C$ ובשני המקרים זוית הסיבוב היא -120°.
לפי סעיף ג'7 בפרק II (תכונות של סיבוב) קיים סיבוב יחיד המעתיק B ל-C עם זוית נתונה. המסקנה היא: $\rho_2=\rho_3 \circ \rho_1$, וזה אומר ש-$\theta=0$. לפי הבניה שבהוכחת המשפט שבסעיף ו' פרק ≈ז (מכפלת סיבובים), נקבל כי $\mu\sphericalangle O_2O_1O_3 \approx$ °° וגם $\mu\sphericalangle O_1O_3O_2 \approx$ °° (חצי זוית הסיבוב של ρ_1 ו-ρ_3). לכן המשולש $O_1O_2O_3$ הוא שווה צלעות. מ.צ.ל.

2. על כל אחת מצלעותיו של משולש ABC ומחוצה לו נבנה ריבועים. יהיו O_1,O_2,O_3, מרכזי הרבועים הבנויים על AB,BC,CA בהתאמה (מרכז רבוע הוא נקודת פגישה של אלכסוניו, וגם מרכז המעגל החוסם); ויהיו 'A,'B,'C אמצעי הצלעות AB,CA,BC בהתאמה. הוכח כי המשולשים

$O_1B'O_2$, $O_2C'O_3$, $O_2A'O_3$ הם ישרי זוית ושווי-שוקיים (הזוית הישרה היא בקודקודים B', C', A' בהתאמה) כמ-כן הישרים AO_2, BO_3, CO_2 נפגשים בנקודה אחת.

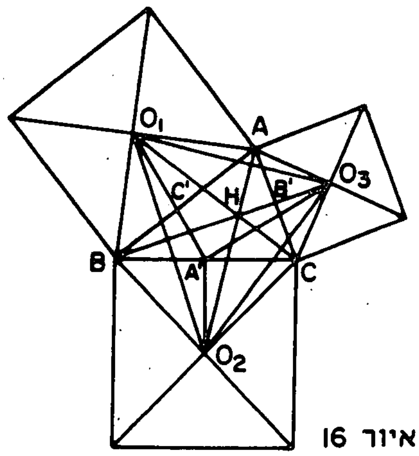
<u>הוכחה:</u> (ראה איור 16):

נוכיח כי המשולש $O_1A'O_3$ ישר זוית ושווה-שוקיים: $m\sphericalangle O_1A'O_3=90^\circ$, $|A'O_3|=|O_1A'|$. ברבוע, האלכסונים ניצבים זה לזה ושווים באורכם, לכן $|BO_1|=|O_1A|$, $|CO_3|=|O_3A|$ ו-$90^\circ=m\sphericalangle AO_3C=m\sphericalangle BO_1A$ לכן אם ρ_1 הוא סיבוב סביב O_1 ו-ρ_3 סיבוב סביב O_3, שניהם בזוית $+90^\circ$: $\rho_1(B)=A$ $\rho_3(A)=C$, נובע שהמכפלה $\rho_2\circ\rho_1$ מעתיקה B ל-C: $(\rho_2\circ\rho_1)(B)=C$, אבל במקרה זה, זוית סיבוב המכפלה היא $180^\circ=90^\circ+90^\circ$

לכן אם A' אמצע BC קבלנו ש: $\rho_3\circ\rho_1=\sigma_{A'}$, המכפלה $\rho_3\circ\rho_1$ היא שיקוף ב-A' (ראה סעיף ז' בפרק IV) ואז $90^\circ=m\angle O_3A'O_1$, $|O_1A'|=|A'O_3|$. באופן דומה נוכיח כי $O_2B'O_1$ ו-$O_2C'O_3$ הם משולשים ישרי זוית (ב-B' ו-C') ושווי-שוקיים. כעת, ידוע כי O_2A' אנך-אמצעי ל-BC (O_2 מרכז הרבוע כש-BC היא אחת מצלעותיו), לכן $m\sphericalangle BA'O_2=90^\circ$ ו-$1/2|BC|=|O_2A'|=|BA'|$.

מתוצאה זאת והתוצאה הקודמת על המשולש $O_1A'O_3$ נובע שאם ρ הוא סיבוב סביב A' בזוית 90° נקבל: $\rho(B)=O_2$ ו-$\rho(O_3)=O_1$, ז"א $\rho(BO_3)=O_2O_1$, ואז לפי סעיפים ג'1 ו-ג'3 בפרק II מקבלים כי $|O_1O_2|=|BO_3|$ וגם כי BO_3 ניצב ל-O_1O_2. באופן דומה AO_2 ניצב ל-O_1O_3 ו-CO_1 ניצב ל-O_2O_3. אם כך AO_2, BO_3, CO_1 הם גבהים של המשולש $O_1O_2O_3$; לכן הם נפגשים בנקודה אחת H. מ.צ.ל.

3. נרשום כאן תרגיל דומה לתרגיל 2 לעיל ונשאיר לקורא לפתור אותו: יהיה ABCD מרובע נתון. על כל אחת מצלעותיו, בונים מחוץ למרובע ריבועים. יהיו O_1, O_2, O_3, O_4 מרכזי ריבועים אלה (O_1 מרכז הרבוע הבנוי על AB, O_2 על BC וכן הלאה לפי הסדר). הוכח כי O_1O_3 ניצב ל-O_2O_4. ו-$|O_2O_4|=|O_2O_3|$. כמו כן הוכח כי $O_1O_2O_3O_4$ הוא בעצמו ריבוע אם ורק אם ABCD היא מקבילית.



איור 16

תחרות במתמטיקה ע"ש פרופ' י. גרוסמן ז"ל

תחרות זו נערכת מדי שנה בל"ג בעומר בטכניון.

הזוכים בתחרות בשנת תשמ"ה היו:

פרס ראשון - שכר לימוד לשנתים - שוני דר - ביה"ס עירוני ד', ת"א.

פרס שני - שכר לימוד לשנה - יגאל גלפרין - חיל אויר, צה"ל.

רז נאות - ביה"ס אורט, ק. ביאליק.

ציונים לשבח

מיכאל גולן - צה"ל.

עמרי גת - ביה"ס ליאו-בק, חיפה.

יעקב כהן - ביה"ס הריאלי, חיפה.

אלי מוהילבר - ביה"ס הריאלי, חיפה.

להלן שאלון התחרות לשנת תשמ"ה (פתרונות בעמ' 18).

שאלה מס. 1

הוכח שלא קימים מספרים שלמים X,Y המקימים את המשוואה:-

$$(X-1)(X+1)+(Y-1)(Y+1)=1985.$$

שאלה מס. 2

יהיו m,n שני מספרים שלמים חיובים שונים. הוכח כי המחלק המשותף המקסימלי של המספרים : $2^{(2^m)}+1;\ 2^{(2^n)}+1$ שווה ל-1.

שאלה מס. 3

מצא את כל הפתרונות הממשיים של מערכת המשוואות:

$$X^4+Y^4=82$$

$$X-Y=2$$

שאלה מס. 4

יהא ABC משולש כלשהו ויהא M המעגל החוסם אותו. חוצה הזוית $\sphericalangle BAC$ חותך את הצלע BC בנקודה P והמשכו של חוצה זוית זה חותך את המעגל M בנקודה Q.
נסמן ב-t_a את אורך הקטע AP וב-T_a את אורך הקטע AQ. באופן זהה יוגדרו באמצעות שני חוצי הזוית האחרים של המשולש האורכים t_b, T_b, t_c, T_c. לבסוף נסמן את אורכי הצלעות שמול הקדקדים C,B,A ב-c,b,a בהתאמה.

הוכח כי: $abc=\sqrt{T_aT_bT_ct_at_bt_c}$

שאלה מס. 5

שתי משלחות של דיפלומטים, אחת מאמריקה ואחת מרוסיה נפגשו במסיבה. כל דיפלומט לחץ ידיהם של מספר חברים במשלחת הנגדית (לא נלחצו ידיים בין חברים של אותה משלחת); לאחר מכן נשאל כל משתתף כמה ידיים לחץ. תשובות הדיפלומטים היו:
8 אנשים ענו כי לחצו 3 ידיים (כל אחד), אדם אחד ענה כי לחץ 5 ידיים, 7 אנשים ענו כי לחצו 6 ידיים (כל אחד). הוכח כי לפחות אחד מהדיפלומטים שיקר.

שאלה מס. 6

הוכח כי עבור כל שתי סדרות של מספרים ממשיים חיוביים $X1,X2,...,Xn$ ו- $Y1,Y2,...Yn$ מתקיים אי השוויון: $\sqrt[n]{(X_1+Y_1)(X_2+Y_2)...(X_n+Y_n)} > \sqrt[n]{(X_1X_2...X_n)} + \sqrt[n]{Y_1Y_2...Y_n}$

שאלה מס. 7

מתוך קבוצה של n אנשים בוחרים m ועדים. עבור כל ועד A, נסמן ב-$|A|$ את מספר האנשים בו. עבור כל אדם x נסמן ב-$d(x)$ את מספר הועדים בהם הוא משתתף. נתון כי עבור על אדם x וכל ועד A כך ש-x שייך ל-A מתקיים $d(x)<|A|$.
הוכח כי $m<n$.

על אודות בעיה "מפתיעה"

הכללת בעיה מהאולימפיאדה הארצית

ד. רימר, רחובות

הקדמה

באחת האולימפיאדות הארציות במתמטיקה, הופיעה הבעיה הבאה:

מהו המספר הטבעי הקטן ביותר, שספרת היחידות שלו היא 2, וכשמעבירים את הספרה 2 מהמקום האחרון למקום הראשון, מתקבל מספר חדש גדול פי 2 מהמספר המקורי ? [1], [2].

במאמר זה נעסוק בשאלה הבאה: בבעיות מסוג זה, מהם כל הערכים האפשריים של ספרת היחידות, וכמו כן של היחס בין המספר החדש והמספר המקורי? התשובה:

משפט. עבור כל שני מספרים (n,p). $n=1,2,\dots,9$; $p=2,3,\dots,9$ קיים ואפשר לבנות מספר טבעי, הקטן ביותר, שספרת היחידות שלו היא n וכאשר מעבירים את הספרה n מהמקום האחרון למקום הראשון, מתקבל מספר חדש גדול פי p מהמספר המקורי.

הוכחה

נניח שקיים מספר A כזה. אזי נכתוב:

$$A=10q+n \qquad (1)$$

$$(n=1,2,\dots,9;\ q=a_1\cdot 10^{s-1}+a_2\cdot 10^{s-2}+\dots+a_{s-1}\cdot 10+a_9;$$

אזי המספר החדש הוא:

$$B=n\cdot 10^s+q \qquad (2)$$

אבל $B=pA$ ולכן:

$$n\cdot 10^s+q=p(10q+n)$$

מכאן מתקבל:

$$q=n\cdot\frac{10^s-p}{10p-1}$$

נציב ב-(1) את הביטוי הזה ונקבל את A כפונקציה של n ו-p.

$$A(n,p)=n\cdot\frac{10^{s+1}-1}{10p-1} \qquad (3)$$

נובע כי אם לפי ההנחה קיים A בעל התכונות הנ"ל, אזי קיים מספר טבעי s כך שהנוסחה מהאגף הימני של (3) מייצגת מספר טבעי ולהיפך.

יוצא מזה כי כדי להוכיח קיומו של המספר A, מספיק להוכיח כי לכל זוג (n,p) מהתחום הנתון, קיים לכל הפחות מספר טבעי s כך ש-

$$n\cdot\frac{10^{s+1}-1}{10p-1}$$

יהיה מספר טבעי. לשם כך נזדקק לפונקציה חשובה, פונקצית אוילר (Euler) ולמשפט מפורסם, משפט של אוילר.

פונקצית אוילר. נסמן כרגיל ב-(m,n) את הגורם המשותף המירבי של המספרים הטבעיים x ו-n; תהיה-M_n קבוצת המספרים הקטנים מ-n וזרים לו, ז.א.:

$$M_n=(y\,|\,y<n,(y,n)=1)$$

הגדרה. פונקצית אוילר של המספר הטבעי n, $\varphi(n)$, הוא מספר האיברים של הקבוצה M_n.

משפט אוילר. אם $(m,n)=1$ אז $n^{\varphi(m)}-1$ מתחלק ב-m.

דוגמאות:

א. $M_8=(1,3,5,7)$ לכן $\varphi(8)=4$; $(3,8)=1$ ולכן, לפי משפט אוילר צריך 3^4-1 להתחלק ב-8 (ואמנם $3^4-1=80$).

ב. $M_{36}=\{1,5,7,11,13,17,19,23,25,29,31,35\}$ ולכן $\varphi(36)=12$. מאחר ש-$(7,36)=1$, יוצא ממשפט אוילר כי $7^{12}-1$ מתחלק ב-36 (בדוק!).

- עכשיו נוכל להוכיח קיום המספרים $A(n,p)$:

עבור $p=2,3,\ldots,9$ המספרים 10 ו-$(10p-1)$ זרים, ולכן, לפי משפט אוילר $10^{\varphi(10p-1)}-1$ מתחלק ב-$(10p-1)$. מספיק שניקח בנוסחה (3) $s+1=\varphi(10p-1)$ ומתקבל $A(n,p)$ מספר טבעי.

ובזה הוכח קיומם של המספרים הטבעיים $A(n,p)$.

כיצד מקבלים את המספרים $A(n,p)$ הקטנים ביותר? לצורך זה נתחיל עם $A(1,p)$ (ז.א. עבור $n=1$).

היות וכל המספרים 10p-1 (p=2,9) מכילים גורמים ראשוניים שונים מ-2 ו-5, נובע כי כל חילוק מסוג $\frac{m}{10p-1}$ (m<10p-1) נותן כמנה מספר עשרוני מחזורי. אורך המחזור הוא מספר r בעל התכונות: $r<\varphi(10p-1)$ ו-r גורם של (10p-1) ([5] עמ' 150,155). יוצא כי

$$\frac{10^r-1}{10p-1}$$

יהיה המספר הטבעי הקטן ביותר שמתקבל מן הנוסחה (3), ז.א. עבור (k=2,3,...) s+1=r מתקבל מספר טבעי גדול ממנו.

בטבלה הבאה נתנים הערכים של $\varphi(10p-1)$ ו-r.

p	2	3	4	5	6	7	8	9
$\varphi(10p-1)$	18	28	24	42	58	22	78	88
r	18	28	6	42	58	22	13	44

כשנכפיל את A(1,p) ב-n (n=2,3,...,9) כדי לקבל A(n,p), לפי הנוסחה (3), אז רק במקרה אחד (n=7,p=5) קיימת אפשרות לצמצום, היות ש-

$$7 \mid \frac{10^{42}-1}{49}$$

מצטמצם ב-7 ולכן המכנה הוא 7 ולא 49, כדי לקבל את המספר הקטן ביותר נחליף המעריך 42 ב-6, היות ש:

$$\frac{10^{42}-1}{7} > \frac{10^6-1}{7}$$ -ו

ואז $A(7,5)=\frac{10^6-1}{7}$. זהו הקטן ביותר.

ובזאת מצאנו את המספרים A(n,p) הקטנים ביותר בעלי התכונה המצויינת במשפט מההקדמה. סה"כ קימים 8x9=72 מספרים מהמשפחה הזאת.

<u>המבנה המשותף של המספרים A(1,p)</u>

נסמן: $A(1,p)=C_s\ 10^s+C_{s-1}\ 10^{s-1}+\ldots+C_k\ 10^k+\ldots+C_2\ 10^2+C_1\ 10+C_0$

נובע מיד $C_0=1$.

$$10^{s+1}-1=(10p-1)(C_s\ 10^s+\ldots+C_k\ 10^k+\ldots+C_2\ 10^2+C_1\ 10+C_0) \quad (*)$$

נפשט פעולת הכפל באגף הימני של הזהות (*) ונציב בפולינום שמתקבל $C_0=1$ הזהות (*) נעשית:

$$10^{s+1}=10^s(p\ C_{s-1})+10^{s-1}(-C_{s-1}+p\ C_{s-2})+10^{s-2}(-C_{s-2}+p\ C_{s-3})+\ldots+10^k(-C_k+p\ C_{k-1})+$$
$$\ldots+10^2(-C_2+pC_1)+10(-C_1+p)$$

אחרי צמצום ב-10 מתקבל מיד $C_1=p$. היות ו-$C_0=1$, נוכל לרשום זאת $C_1=pC_0$. נציב בזהות האחרונה $C_1=pC_0$ ואח"כ נצמצם ב-10 ונקבל:

$$10^{s-1}=10^{s-2}(pc_{s-1})+10^{1-3}(-c_{s-1}+pc_{s-2})+\ldots+10(-c_3+pc_2)+\ldots+(-c_2+pc_s)$$

נובע מיד כי $-c_2+pc_1$ שווה ל-0 או לכפולה של 10. נרשום זאת כך:

$-c_2+pc_1=10t_2(t_2\epsilon N\ \ 0\ )$ ולכן $c_2=pc_1-10t_2$ ז.א. כי c_2 הינה ספרת היחידות של המספר pc_1. נציג בזהות הקודמת $-c_2+pc_1=10t_2$ והזהות נעשית ל-

$$10^{s-1}=10^{s-2}(pc_{s-1})+10^{s-3}(-c_{s-1}+qc_{s-2})+\ldots+10^{k-2}(-c_k+pc_{k-1})+\ldots$$
$$\ldots+10^2(-c_4+pc_3)+10(-c_3+pc_2+t_2)$$

אחרי צמצום נוסף ב-10 נובע כי $-c_3+pc_2+t_2=10t_3(t_3\epsilon N\ \ 0\ )$ וממשיכים באופן דומה עד שמתקבלות כל ספרות המספר $A(1,p)$.

בדרך כלל התקבל השוויון

$$p\ c_k+t_k=c_{k+1}+10t_{k+1}\qquad (k=0,1,\ldots,s;\ t_0=0)$$

ומכאן קיימת האפשרות לבנות כל ספרות המספרים $A(1,p)$ $(p=2,3,\ldots,9)$.

הנה דוגמא עבור $p=4$:

$c_0=1;\ t_0=0$

$pc_0+t_0=4\ \ 1+0=4=c_1+10t_1\ \ \Longrightarrow\ c_1=4;\ t_1=0$

$pc_1+t_1=4\ \ 4+0=16=c_2+10t_2\ \Longrightarrow\ c_2=6;\ t_2=1$

$pc_2+t_2=4\ \ 6+1=25=c_3+10t_3\ \Longrightarrow\ c_3=5;\ t_3=2$

$pc_3+t_3=4\ \ 5+2=22=c_4+10t_4\ \Longrightarrow\ c_4=2;\ t_4=2$

$pc_4+t_4=9\ \ 2+2=10=c_5+10t_5\ \Longrightarrow\ c_5=0;\ t_5=1$

והתהליך נעצר (היות ועבור $p=4$, $s+1=6$ לפי הטבלה הנתונה לעיל).

הערה:

במספר (1,p) יש לכתוב את ה-0 במקום הראשון משמאל ($c_1=0$), אעפ"י שה-0 הזה אינו משנה ערך המספר. הנה בדוגמה, למה זה נחוץ.

(בדוק!) A(1,8)=0,126,582,278,481=126,582,278,481

נעביר את ה-1 מהמקום האחרון למקום הראשון. כדי לקבל המספר B(1,8)

B(1,8)=1,012,658,227,484=112,658,227,484

אבל 1,012,658,227,484=8A(1,8) בזמן ש- 112,658,227,484<A(1,8) לכן צריך לרשום את האפס שבמקום הראשון בשמאל המספר A(1,p)

ביבליוגרפיה

1. יוסף גיליס ואברהם קריימר, האולימפיאדה הארצית במתמטיקה, מכון ויצמן, רחובות (1984).
2. אתגר - גיליונות מתמטיקה, מס' 1 (1985), הטכניון - חיפה, מכון ויצמן - רחובות.
3. אברהם קריימר, רוחמה אבן, אביגדור רוזנטולר. החוג הארצי במתמטיקה. מכון ויצמן רחובות (1985) שני חלקים.
4. אביגדור רוזנטולר, הפתעה בבעיה מתמטית. גליונות מתמטיקה. כרך 7 מס' 1. מכון ויצמן רחובות.
5. Hans Rademacher and Otto Toeplitz, The Enjoyment of Mathematics, Princeton University Press, (1957).

האולימפיאדה לנוער במתמטיקה תשמ"ו

(מכון ויצמן למדע בשיתוף עם תכניות חסכון לנוער של בנק הפועלים בע"מ)

תחרות זו התקיימה במכון ויצמן למדע, רחובות, ביום ה' 13.2.86, בהשתתפות 86 תלמידים אשר באו מכל רחבי הארץ.

להלן השאלון שהוצג בפני המתחרים. פתרון השאלות וגם תוצאות התחרות יופיעו בחוברת הבאה.

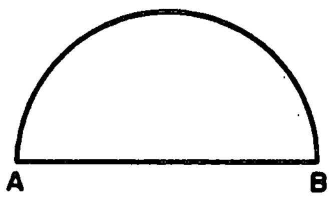
(המספר בסוגריים אחרי מספר השאלה, הוא מספר הנקודות שיוענקו בעד תשובה מלאה ומדוייקת על השאלה.)

1. (10) הוכח כי עבור כל m שלם וחיובי וכל α ממשי, הפולינום
$x^{m+1}\cos(m-1)\alpha-x^m\cos m\alpha-x\cos\alpha+1$
מתחלק ב-$x^2-2x\cos\alpha+1$.

2. (10) מצא את כל הזוגות של מספרים שלמים (x,y) המקיימים $(x-1)\cdot x\cdot(x+1)=y^5$.

3. (10) הוכח כי אין למצוא מספרים שלמים x, y המקיימים $x^3-y^3=5746$

4. (15) נתון חצי עיגול על הקוטר AB (ראה ציור). מבין כל המצולעים הקמורים בעלי n צלעות אשר כל קדקודיהם נמצאים בחצי העיגול, מהו המצולע בעל השטח המירבי? נמק.



5. (15) $a_1, a_2, \ldots\ldots$ מהווים סדרה אינסופית של מספרים ממשיים, כולם שונים זה מזה. הוכח כי ניתן לבחור מסדרה זו סדרה חלקית שהיא אינסופית ומונוטונית.

6. (15) נתונים מספרים ממשיים a,b,c,p,q,r המקיימים:

(I) $a<b<c$

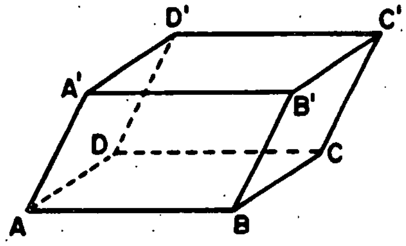
(II) $p>0$, $q>0$, $r>0$

הוכח כי למשואה

$$\frac{p}{x-a}+\frac{q}{x-b}+\frac{r}{x-c}=1$$

יש שלושה פתרונות ממשיים, אשר בדיוק אחד מהם גדול מ-c.

7. (20) $ABCDA'B'C'D'$ הוא מקבילון תלת-מימדי (ראה ציור).
דרך C' מעבירים מישור מחוץ
למקבילון החותך את הישרים AB, AD, AA'
בנקודות R,Q,P בהתאמה.
עליך לקבוע את R,Q,P על הישרים האלה
כך שנפח הפירמידה $APQR$ יהיה
קטן ככל האפשר.



8. (25) המערכת a_{ij} מוגדרת עבור $i\geq 0$ וכל j שלם $(-\infty<j<\infty)$ כדלקמן:

(I) $a_{o,o}=1$

(II) $a_{o,j}=o$ עבור $j\neq o$

(III) עבור כל $i>o$

$$a_{i,j}=2(a_{i-1,j-1}+a_{i-1,j+1})-a_{i-1,j}$$

הוכח כי:

$$a_{n,o}=(-1)^n\sum_{r=o}^{[n/2]}2^{2r}\frac{n!}{(n-2r)!(r!)^2}$$

9. (25) ידוע כי מספר הפרמוטציות של הקבוצה $(1,2,\ldots,n)$
היא $n!$ ונסמן את הפרמוטציות האלה $\pi_1,\pi_2,\ldots\pi_{n!}$.
אם π_k היא הסדרה $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ מגדירים

$$S_k=(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+\ldots+(a_{n-1}-a_n)^2$$

חשב את הממוצע החשבוני של המספרים S_k, דהיינו

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n!}S_k$$

תחרות במתמטיקה ע"ש פרופסור י. גרוסמן ז"ל - תשמ"ה

פתרונות לשאלות

פתרון לשאלה מס. 1

המשוואה היא $X^2+Y^2=1978$. לכל מספר של N השארית מחלוקת N^2 ב-4 היא 0 או 1. לכן השארית מחלוקת X^2+Y^2 ב-4 היא 1,0 או 2, בעוד ש-1987 משאיר שארית 3 בחלוקה ב-4, ולכן אין X ו-Y שלמים שיקימו את המשוואה.

פתרון לשאלה מס. 2

ידוע כי עבור $k.l$ טבעיים $X^{kl}-1=(X^k-1)\left\{X^{k(l-1)}+X^{k(l-2)}+\ldots+1\right\}$ ומכאן ש- $(2^{kl}-1)$ מתחלק תמיד ב-(2^k-1). כאשר k זוגי, נגיד $k=2r$, יוצא ש-2^{2rl} מתחלק ב-$(2^{2r}-1)$ ולכן גם ב-2^r+1.

עכשיו נניח כי $m>n$ ונגדיר $A=2^{(2^n)}+1$, $B=2^{(2^m)}+1$, $r=2^n$, $l=2^{m-n-1}$, ונקבל $B-2=2^{2rl}-1$; יוצא כי $B-2$ מתחלק ב-A. אילו היה גורם משותף ל-A ו-B אזי היה גורם זה צריך לחלק גם את $B-2$ ולכן גם את $B-(B-2)$ דהינו 2. אבל $A.B$ הם אי-זוגיים ולא יתכן שיתחלקו ב-2.

פתרון לשאלה מס. 3

נסמן $X=u+v;\ Y=u-v$. נציב זאת למשוואה השניה $X-Y=u+v-u+v=2$ ולכן $2v=2$ או $v=1$; מכאן $X=u+1$ ו-$Y=u-1$. נציב זאת למשוואה הראשונה:

$$(u+1)^4+(u-1)^4=82$$

$$(u^2+2u+1)^2+(u^2-2u+1)^2=82$$

$$u^4+4u^2+1+4U^3+2u^2+4u+u^4+4u^2+1-4u^3+2u^2-4u=82$$

$$2u^4+12u^2+2=82$$

$$2(u^4+6u^2+1)=82$$

$$u^4+6u^2+1=41$$

$$u^4+6u^2-40=0$$

זו משוואה דו ריבועית ורואים מיד כי 4 או $u^2=-10$. כיון ש-u ממשי $u^2=4$ ולכן $u=\pm2$.

אם $u=2$ אזי $x=u+v=3$

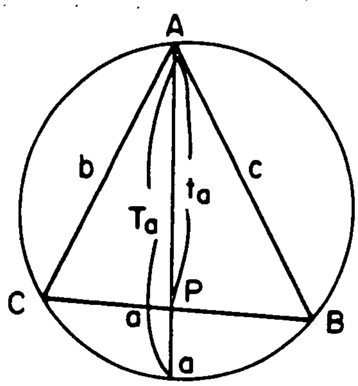
$y=u-v=1$

אם $u=2$ אזי $x=u+v=-1$

$y=u-v=-3$

לכן הפתרונות הממשיים הם $(3.1);\ (-1,-3)$.

<u>פתרון לשאלה מס. 4</u>



אורך $t=AP$

אורך $T_a=AQ$

המשולשים BAQ, CAP הם דומים, זאת כיוון ש-α היא זוית בכל אחד מהמשולשים ואלו <CAP=<BAC כיון שאלו זויות הקפיות הנשענות על אותה קשת. מכאן כי $\frac{t_a}{b}=\frac{c}{T_a}$ או

$bc=t_aT_a$ באותו אופן נקבל $ba=t_cT_c$

$ac=t_aT_a$

נכפיל משוואות אלו ונקבל $bcbaac=t_aT_at_ct_bT_b$ או $(abc)^2=t_at_bt_cT_aT_bT_c$

<u>פתרון לשאלה מס. 5</u>

סכומי לחיצות הידיים של האנשים בכל משלחת שווים. אבל סכום לחיצות הידיים באותה משלחת שבה משתתף זה שלחץ 5 פעמים, משאיר שארית 2 מ-3. ואילו סכום לחיצות הידיים במשלחת השניה מתחלק ב-3 (רק מספר אחד, 5, אינו מתחלק ב-3).

פתרון לשאלה מס. 6

נחלק באגף שמאל ונקבל:

$$1 \geq \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_1+y_1} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_n+y_n}} + \sqrt[n]{\frac{y_1}{x_1+y_1} \cdot \ldots \cdot \frac{y_n}{x_n+y_n}}$$

באגף ימין כתובים עתה שני ממוצעים גאומטריים, ולפי אי שיוון הממוצעים סכומם קטן או שווה ל:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{x_1+y_1} + \ldots + \frac{x_n}{x_n+y_n}\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{y_1}{x_1+y_1} + \ldots + \frac{y_n}{x_n+y_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{x_1+y_1}{x_1+y_1} + \ldots + \frac{x_n+y_n}{x_n+y_n}\right) = \frac{1}{n} \cdot n = 1$$

פתרון לשאלה מס. 7

מן הנתון נובע ש- $\frac{1}{|A|} > \frac{1}{d(x)}$ כל אימת שאדם x שייך לועד A.

נסכם אי שויונות אלו על כל האנשים x והועדים A המכילים אותם. אלא שבאגף שמאל נסכם תחילה על האנשים x ולכל x נסכם על פני הועדים המכילים אותו, ובאגף ימין על פני הועדים A ולעל ועד A על פני האנשים x השייכים אליו נקבל:

$$\sum_{x}\sum_{\substack{A \\ x\in A}} \frac{1}{d(x)} \geq \sum_{A}\sum_{\substack{x \\ x\in A}} \frac{1}{|A|}$$

אבל לכל x מספר הועדים A המכילים אותו הוא $d(x)$ ולכן $\sum_{\substack{A \\ x\in A}} \frac{1}{d(x)} = 1$

לכן באגף שמאל כתוב $\sum_x 1$ כלומר מספר האנשים, כלומר n בדומה, באגף ימין כתוב $\sum_A 1$.

כלומר m. וקבלנו $n>m$.

פתרונות לבעיות מגליון "אתגר" מס. 2

7. (הוצעה ע"י ב.פ.). מצא את כל הפתרונות הממשיים של

$$3^x+4^x=5^x$$

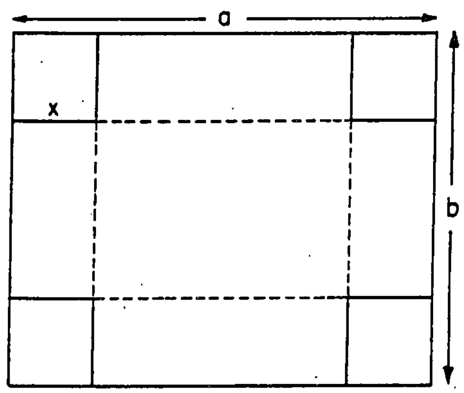
<u>פתרון</u>: נוכל לכתוב את המשוואה בצורת

$$(\tfrac{3}{5})^x+(\tfrac{4}{5})^x=1$$

קל לאשר כי היא מתקיימת כאשר x=2, מאידך $\frac{3}{5}$ ו-$\frac{4}{5}$ קטנים מ-1 ולכן הפונקציה $(\frac{3}{5})^x+(\frac{4}{5})^x=1$ יורדת כאשר x עולה עבור כל x ממשי. יוצא כי x=2 הוא הפתרון היחידי.

----

8. נתון מלבן בעל צלעות a,b. בכל פנה של המלבן גוזרים רבוע קטן שאורך צלעו x. את הצורה שנשארה מקפלים לפי הקוים המקוטעים ומקבלים תיבה פתוחה.



יש לקבע את x כך שנפח התיבה יהיה מירבי.

<u>פתרון</u>. ברור כי הנפח הוא

$$V=(a-2x)(b-2x)x$$
$$=abx-2(a+b)x^2+4x^3$$
$$\frac{dV}{dx}=12x^2-4(a+b)x+ab$$

וזה מתאפס כאשר

$$X_{\pm}=\frac{2(a+b)\pm\sqrt{4(a+b)^2-12ab}}{12}$$

$$= \frac{(a+b)\pm\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 4\{6x-(a+b)\}=\pm 4\sqrt{a2-ab+b^2}$$

ולכן $\frac{d^2V}{dx^2}$ שלילי כאשר $x=x_-$ וחיובי עבור $x=x_+$; מכאן שהמכסימום מתקבל כאשר

$$x = \frac{(a+b)-\sqrt{a2-ab+b^2}}{6}$$

<u>פתרון שני:</u>

קבלנו ממר ו. גרשוביץ פתרון שני שאינו מסתמך על חשבון דיפרנציאלי. הבעיה היא לקבוע את x כך ש-

$$V=x(a-2x)(b-2x)$$

יהיה גדול ככל האפשר.

נכפיל את הגורם השלישי ב-t ואת הגורם הראשון ב- $2(t+1)$ ונקבל

$$2t(t+1)V(x)= (2t+2)x\ (a-2x)\ (-b-2tx)$$

אבל

$$(2t+2)x+(a-2x)+(bt-2bx)=a+bt$$

ואינו תלוי ב-x; לכן לפי משפט הממוצעים יהיה $V(x)$ מירבי אם ניתן לקבוע t ו-x כך שלושת הגורמים האלה יהו שווים, כלומר

$$2(t+1)x=a-2x=bt-2tx$$

זה גורר

$$x=\frac{a}{2t+4}$$

וגם

$$x=\frac{bt}{4t+2}$$

ולכן הפתרון הזה יהיה אפשרי אם נבחר t כך ש-

$$\frac{a}{2t+4} = \frac{bt}{4t+2}$$

הפתרון החיובי של המשואה הרבועית הוא

$$t= \frac{a-b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{b}$$

ואז

$$x= \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{b}$$

---

9. הוכח שבכל קבוצה של n מספרים שלמים יש תת-קבוצה לא ריקה (היכולה להיות הקבוצה כולה) שסכום איבריה מתחלק ב-n.

<u>פתרון</u>:

יהיו $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ איברי הקבוצה. נגדיר

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$$

ותהיה r_i $(i=1,2,\ldots\ldots n)$ השארית המתקבלת כאשר מחלקים את s_i ב-n. עבור כל i, $0 \leqslant r_i < n$. אם קיים i כך ש- $r_i = 0$ אזי פירוש הדבר ש-s_i מתחלק ב-n ו- $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_i)$ היא הקבוצה המבוקשת. אם אין i כזה אזי הערכים האפשריים עבור n המספרים $(r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n)$ הם המספרים הטבעיים מ 1- עד $(n-1)$. מעקרון המגירות נובע כי קיימים $i<j$ כך ש- $r_i = r_j$ דהינו ש-$(s_j - s_i)$ מתחלק ב-n. ואז הקבוצה $(a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots\ldots, a_j)$ ממלאת את דרישות הבעיה.

<u>פתרון אחר</u> ומעניין התקבל מאחד מקוראי העיתון, דני בונה (כתה י"א, ביה"ס הריאלי העברי, חיפה).

במקום הקבוצה המקורית נגדיר קבוצה חדשה $(b_1, b_2, \ldots\ldots b_n, b_{n+1}, \ldots\, b_{2a-1})$ כאשר

$b_i = a_i$ עבור $1 \leqslant i < n$

$b_i = 0$ עבור $n \leqslant i < 2n-1$

לפי תרגיל מס. 4 (גליון מס. 1 של עתון זה) יש תת-קבוצה של הקבוצה החדשה ובה n איברים אשר סכומם מתחלק ב-n. אבל לא כל n האיברים האלה יוכלו להיות 0 (למה?) והמסקנה מידית.

---

10. מטריצה ממשית מסדר mxn היא טבלה של mn מספרים ממשיים, מסודרים ב-m שורות ו-n עמודים.

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

פעולות מותרות על מטריצה הן כפל כל האיברים של שורה שלמה ב- 1- או כפל כל האיברים של עמוד ב- 1-. ע"י פעולה מותרת כזו מקבלים מטריצה חדשה. הראה כי ע"י סדרה סופית של פעולות מותרות ניתן לקבל מטריצה אשר בה סכומי האיברים בכל שורה ושורה וגם סכומי האיברים בכל עמוד ועמוד הם כולם אי-שליליים.

פתרון:

מספר המטריצות השונות שאפשר לקבל ממטריצה נתונה ע"י סדרות של פעולות מותרות הוא 2^{m+n} (למה?) ולכן סופי. לכן אם נחשב עבור כל מטריצה כזאת את הסכום של כל איבריה יהיו רק מספר סופי של ערכים אפשריים עבור הסכומים האלה.

יהיה S הגדול בין הסכומים האלה ונקח מטריצה אשר סכום איבריה S. במטריצה זו סכום האיברים באף אחד מהעמודים והשורות לא יוכל להיות שלילי כי אילו היה סכום האיברים באיזו שורה (או עמוד) שווה ל- $-K$, כאשר $K>0$, הרי בהכפלת אותה שורה (או אותו עמוד) ב--1- נקבל מטריצה אשר סכום כל איבריה הוא $S+2K$, בניגוד להגדרת S כערך המירבי.

----

11. משולש ABC חסום במעגל, המשיקים למעגל ב-B ו-C נפגשים בנקודה X. M היא נקודת האמצע של BC. הוכח כי $\sphericalangle BAM=\sphericalangle CAX$.

פתרון:

יהיה O מרכז המעגל.

נחבר OX, OC. XO פוגש את הצלע BC ב-M ואת הקשת BC ב-Y, כאשר Y הוא אמצע הקשת (למה?). יוצא כי AY חוצה את הזוית $\sphericalangle BAC$. מספיק איפוא להוכיח כי הוא גם חוצה את הזוית $\sphericalangle MAX$. אבל המשולשים OCM, OXC דומים (למה?) ולכן $OX=OC^2/OM$. מזה נובע כי המעגל ABC הוא מעגל של אפולוניוס לגבי הנקודות M,X ולכן:

$$YM/YX = AM/AX$$

ומכאן ש-AY הוא אמנם חוצה הזוית $\sphericalangle MAX$.

----

12. בפרדס בצורת עגול בעל רדיוס 50 שמרכזו בראשית הצירים נטועים עצים בכל אחת מנקודות השריג, פרט לראשית. כל עץ כזה הוא גליל ברדיוס r כשמרכז המעגל הוא נקודת שריג.

הוכח כי אם $r>\frac{1}{50}$ אזי לא נתן לראות מהראשית את הנעשה מחוץ לפרדס.

פתרון: יהיה $r=\frac{1}{50}+q$ כאשר $0<q<\frac{1}{2}-\frac{1}{50}$ (כי אם $r>\frac{1}{2}$ אזי העצים יגדלו זה בתוך זה).

נעביר קוטר AOB ומשיקים CAD, EBF כך ש- CDFE הוא מלבן ו-$AC=q$, שטח המלבן הוא $2q\cdot 100>\frac{2}{50}\cdot 100=4$ ולכן לפי משפט מינקובסקי (עקרון שובך היונים הגיאומטרי, אתגר - גליונות מתמטיקה 2, עמ' 6) יש במלבן נקודות שריג שונות מ-0, נגיד T,T'. עצים בנקודות אלה נפגשים בקוטר AOB כי $r>q$. לכן העץ ב-T חוסם את הראיה מ-O ל-A וזה ב-T' חוסם את הראיה מ-O ל-B.

בעיות חדשות

כתוב בכתב יד ברור ונקי ובצידו האחד של הדף. את הפתרונות יש לשלוח עד ליום 15.5.86 לפי הכתובת

מערכת "אתגר - גליונות מתמטיקה"

היחידה לפעולות נוער

מכון ויצמן למדע, רחובות - 76100

ולציין את שם הפותר, שם בית הספר (אם הוא תלמיד) והכיתה בה הוא לומד.
שמות הפותרים יפורסמו ובין הפותרים יוגרל פרס.

X X X X

19. מצא את כל המערכות (x,y,z) של מספרים טבעיים המקיימים

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}$$

20. הנקודות A,B,C (בסדר זה) נמצאות בקו ישר l ונתון כי

$$|AB|=4|BC|$$

S הוא המעגל עם מרכז A ורדיוס AB ; l' הוא ישר מאונך ל l העובר דרך C: P היא נקודה כלשהי על l'. המשיקים מ-P למעגל S משיקים לו ב T_1,T_2 ו-H הוא מפגש הגבהים של המשולש PT_1T_2. מצא את המקום ההנדסי של H כאשר P נע לאורך l'.

21. ABC, PQR הם משולשים שווי צלעות חסומים במעגל בעל רדיוס R; D הוא התחום המשותף לשני המשולשים, S הוא השטח של D. הוכח כי

$$S \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$$

באיזו תנאים יתכן שיוויון?

22. נתון מספר טבעי n ופולינום $P(x,y,z)$ המקיים

1) $P(1,0,0) = P(0,1/2,0) = 1$.

2) עבור כל x,y,z,w ממשיים

$$P(wx,wy,wz)=w^nP(x,y,z)$$

וגם $2P(x,y,z)=P(x,y,w)+P(x,w,z)+P(w,y,z)$

מצא את הפולינום $P(x,y,z)$.

23. הוכח כי עבור כל $x,y,z > 0$

$$8(x^3+y^3+z^3)^2 \geqslant 9(y^2+yz)(y^2+yx)(z^2+xy)$$

24. הוכח כי עבור כל n טבעי

$$(n!)! \geqslant n!\{(n-1)!\}^{n!}$$

__פתרון הבעיה מעמוד 3__

נסמן את הנעלמים באותיות יווניות. מתוך עצם מבנה החישוב ברור כי במקומות מסויימים מוכרח להופיע 0, ואמנם הכנסנו אפסים למקומות האלה. יש לנו –

$$\begin{array}{r}
\gamma_1 0\gamma_2\gamma_3 . \gamma_4 0 0\gamma_5 \\
\hline
\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6) \beta_1\beta_2\beta_3 \\
\delta_1\delta_2\delta_3 \\
\hline
\varepsilon_1\alpha_4\alpha_5 \\
\zeta_1\zeta_2\zeta_3 \\
\hline
\eta_1\eta_2\alpha_6 \\
\theta_1\theta_2\theta_3 \\
\hline
\iota_1\iota_2 0 \\
k_1 k_2 k_3 \\
\hline
\lambda_1 0 0 0 \\
\lambda_1 0 0 0 \\
\hline
- - - -
\end{array}$$

רואים כי $\beta_2 \neq 0$ כי אחרת היה $\lambda_1 = 0$, מה שלא יתכן. מאידך $\lambda_1 \times 10^3$ מחלק את המספר $\beta_1\beta_2\beta_3$ ולכן $\beta_3 = 5$. מכאן נובע ש-k_3 צריך להיות 0 או 5. אבל $k_3 = 0$ היה שוב גורר $\lambda_1 = 0$ ולכן $k_3 = 5$, $\lambda_1 = 5$. מזה רואים כי

$$1000 > \beta_1\beta_2\beta_3 = \frac{5000}{\gamma_5} \geqslant \frac{5000}{9} > 555$$

והגורם היחידי של 5000 המקיים את כל התנאים הוא $\beta_1\beta_2\beta_3 = 625$ ו-$\gamma_5 = 8$. הכפולה היחידה של 625 שהיא בעלת שלש ספרות בלבד היא 625 עצמה, ולכן $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1$

קל עכשיו לפרש את כל הסימנים האחרים.

<u>מספרים שופעים</u>

אם נסמן ב- $\sigma(n)$ את סכום הגורמים של מספר טבעי n (כולל n עצמו) אזי אנו מכירים את המספרים המשוכללים המקיימים את השוויון $\sigma(n)=2n$. כאן נדבר על <u>מספרים שופעים</u>, אלה המקיימים $\sigma(n)>2n$.

דוגמא $\sigma(12) = 1+2+3+4+6+12=28>2/12$

ולכן 12 הוא מספר שופע. לגבי מספרים אלה נוכיח כאן את המשפט הבא:

<u>משפט</u>. כל מספר זוגי גדול מ-46 הוא סכום של שני מספרים שופעים.

ההוכחה תלויה במשפט עזר.

<u>משפט עזר</u>. אם n משוכלל או שופע ו-m הוא מספר טבעי גדול מ-1 אזי mn הוא שופע.

הוכחה. יהיה $d_1,d_2,\dots,d_k$ הגורמים של n, אזי

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = \sigma(n) \geqslant 2n$$

אבל בין גורמי mn נמצאים

$$d_1,d_2,\dots,d_k,md_1,md_2,\dots,md_k$$

ולכן

$$\sigma(mn) \geqslant (1+m)(d_1+d_2 \dots d_k)$$

$$(1+m)\cdot 2n > 2mn$$

עכשיו לעצם המשפט. מאחר ש-n זוגי, ישנן שלש אפשרויות:

1) $n = 6k = (k-2)\cdot 6+12$

2) $n = 6k+2 = (k-3)\cdot 6+20$

3) $n = 6k+4 = 6(k-6)+40$

ונוכל ליישם את משפט העזר מאחר ו-6 הוא מספר משוכלל.