ADOLF FRAENKEL

DIE AXIOME DER MENGENLEHRE

Die Axiome der Mengenlehre.

Von

Adolf Fraenkel, Marburg a. d. L.

Das von GEORG CANTOR in schöpferischer Intuition errichtete Gebäude der Mengenlehre, das dem seit Jahrtausenden von Philosophen und Mathematikern umstrittenen Begriff des aktualen Unendlichgroßen (und gleichzeitig u. a. dem des Kontinuums) zum ersten Male eine klare Bedeutung und rechtmäßige Begründung gab, muß als in seinen Grundfesten erschüttert gelten, seit C. BURALI-FORTI, B. RUSSELL, E. ZERMELO, J. RICHARD und andere gezeigt haben, daß dieses Gebäude ebenso wie die reine Logik gewissen logischen Widersprüchen, den „Paradoxien", Raum bietet. Da es nicht gelang, CANTORs Definition der Menge durch eine einwandfreie zu ersetzen, und da auch die scharfsinnige Begründung der Herren B. RUSSELL und A. N. WHITEHEAD[1]) nicht zu einem einwandfreien Erfolge geführt hat (vgl. ihr „Axiom der Reduzibilität"), so ist die Mengenlehre gezwungen, sich entweder den radikalen, wenig von ihrem Gefüge übriglassenden Beschränkungen der Herren L. E. J. BROUWER und H. WEYL[2]) zu unterwerfen oder von einer konstruktiven, genetischen Begründung ganz abzusehen und statt dessen von einem System von Axiomen auszugehen, das weit genug sein muß, um den legitimen mengentheoretischen Methoden Raum zu lassen, und gleichzeitig eng genug, um die Paradoxien auszuschließen.

In dieser axiomatischen Richtung hat Herr E. ZERMELO mit seiner bahnbrechenden Untersuchung von 1908[3]) der Mengenlehre ein Fundament gegeben,

---

1) Principia Mathematica, I—III (Cambridge 1910—13).

2) Vgl. namentlich Verhand. d. Kon. Akad. v. Wetenschappen te Amsterdam (Eerste Sectie) Deel XII, 1918 u. 1919 und Math. Zeitschrift, Bd. 10 (1921), S. 39.

3) Untersuchungen üb. d. Grundlagen der Mengenlehre I; Math. Annalen, Bd. 65 (1908), S. 261 (nachstehend mit [Z] zitiert). Vgl. auch die Darstellung in meiner „Einleitung in die Mengenlehre" (Berlin 1919, Neuauflage 1923), § 12.

von dem aus bereits ein großer Teil ihrer Methoden entwickelt ist und weitere sich aufbauen lassen. Abgesehen von den dort offen gelassenen Fragen der Unabhängigkeit[1]) und der Widerspruchslosigkeit[2]) der Axiome litt jene Untersuchung allerdings noch an dem wesentlichen Mangel, an wichtiger Stelle den unscharf gekennzeichneten Begriff einer „definiten Eigenschaft" in das Axiomensystem einführen zu müssen, womit aufs neue Unbestimmtheiten und Gefahren von der logischen Seite her gewärtigt werden mußten. Auf einige weitere, weniger grundlegende Mängel jener axiomatischen Untersuchung habe ich kürzlich (in [A]) hingewiesen. Nachdem es inzwischen [3]) gelungen ist, auch den Begriff des „Definiten" auszuschalten und durch eine scharfe mathematische Begriffsbildung zu ersetzen, kann und soll nachstehend ein verändertes Axiomsystem angegeben werden, aus dem heraus, zunächst in dem Umfange wie bei ZERMELO, die Mengenlehre deduktiv entwickelt werden kann. Auf diese Entwicklung wird im folgenden nur andeutungsweise hingewiesen werden, während eine eingehende Untersuchung einer weiteren Veröffentlichung vorbehalten bleibt.

Das folgende Axiomensystem schließt sich soweit als möglich an das ZERMELOsche an (auch in der Ausdrucksweise), um die Vergleichung zu erleichtern; es übernimmt aus [Z] unverändert die Axiome IV—VI. Zur Begründung der Abweichungen in den übrigen Axiomen sei folgendes bemerkt:

Zu Axiom I. Da ich aus prinzipiellen Gründen den Bereich $\mathfrak{B}$ auf *Mengen* (einschließlich der Nullmenge) beschränke, Nichtmengen als Elemente von Mengen also nicht zulasse (vgl. [A], S. 233), so ist *jedes Ding* von $\mathfrak{B}$ durch seine Elemente völlig bestimmt und insbesondere ein Ding, das keine Elemente enthält, mit der Nullmenge identisch. Die Bedeutung des (nur scheinbar unveränderten) Axioms I ist demgemäß eine wesentlich andere als in [Z], da dort die Beschränkung des Axioms auf Mengen eine wesentlich einschränkende Bedeutung hat.

Zu Axiom II. Neben dem Begriff des Enthaltenseins (ε) glaube ich auch den Begriff der Identität ($=$) als undefinierten Grundbegriff beibehalten und nicht etwa auf jenen (vermittels der Axiome II und III) zurückführen zu sollen; geht er doch in die Begriffe einer Menge von einem Element und einer solchen von zwei Elementen implicite bereits ein. Daher wird in Rücksicht auf Axiom III die Forderung der Elementarmengen mit einem einzigen Element entbehrlich

---

1) Für die Lösung dieser Frage vgl. A. FRAENKELS Untersuchungen in den Math. Annalen, Bd. 86 (1922), S. 230 und in den Sitzungsberichten d. Preuß. Akademie d. Wissensch. Berlin, Math.-Phys. Klasse, 1922, S. 253 (nachstehend mit [A] und [B] zitiert).

2) Für diese schwierige Frage dürfen neue Erkenntnisse aus dem Fortgang der Untersuchungen Herrn D. HILBERTS erwartet werden; vgl. Abhandl. a. d. Math. Seminar d. Hamburgischen Universität, Bd. 1 (1922), S. 157, und P. BERNAYS im Jahresber. d. Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 31 (1922), S. 10, sowie HILBERTS Vortrag auf der Naturforscherversammlung in Leipzig 1922 (Math. Annalen, Bd. 88 [1923], S. 151).

3) Vgl. Einleitung zu [B] und meinen Vortrag auf der Naturforscherversammlung in Leipzig 1922 (Jahresb. d. D. Math.-Ver. Bd. 31, 9.—12. Heft.).

(vgl. nachstehend S. 6). Ferner kann die Forderung der Nullmenge weggelassen werden, wenn der überhaupt leere Bereich $\mathfrak{B}$ ausgeschlossen wird, was schon durch Axiom VII geschieht (vgl. unten S. 7).

Zu Axiom III. Wegen der Bedeutung dieser für das neue Axiomensystem charakteristischen Forderung sei auf [B] und die nachstehend angeführten Beispiele verwiesen.

Für die Axiome VII und VIII vergleiche man die zwei letzten Absätze der vorliegenden Arbeit.

Die Mengenlehre hat es zu tun mit einem Bereich $\mathfrak{B}$ von „Dingen", die als Mengen bezeichnet werden sollen. Von einer Menge sagen wir, sie „existiere", wenn sie im Bereich vorkommt.

Zwischen den Mengen a, b, m, n usw. können Grundbeziehungen (Relationen) der Form $a = b$ oder $m \varepsilon n$ bestehen. Die Beziehung $a = b$ drücken wir aus durch „a ist mit b identisch", „a ist gleich b", „a und b bezeichnen dieselbe Menge"; sie soll die üblichen Eigenschaften der Identität haben[1]). Gilt die Beziehung $m \varepsilon n$, so sagen wir, „m ist Element von n", „n enthält das Element m" usw. Um auszudrücken, daß die Beziehung $a = b$ bezw. $m \varepsilon n$ *nicht* besteht, schreiben wir $a \neq b$ („a ist verschieden von b") bezw. $m \bar{\varepsilon} n$ („m ist nicht Element von n" usw.).

Definition 1. Sind a, b, m Mengen von der Art, daß $a \neq b$ und daß a und b, aber keine von ihnen verschiedene Menge Elemente von m sind, so heißt m eine (nach Axiom I: die) Paarmenge von a und b.

Definition 2. Sind m und n Mengen von der Art, daß jedes Element von m auch Element von n ist, so heißt m eine Untermenge von n.

Definition 3. Sind m und u Mengen von der Art, daß u alle Untermengen von m und nur sie als Elemente enthält, so heißt u eine (nach Axiom I: die) Potenzmenge von m (in Zeichen: $u = \mathfrak{U} m$)[2]).

Definition 4. Sind m und s Mengen von der Art, daß s alle Elemente der Elemente von m und nur sie als Elemente enthält, so heißt s eine (nach Axiom I: die) Vereinigungsmenge von m (in Zeichen: $s = \mathfrak{S} m$).

Definition 5. Ist m eine Menge von „elementefremden" Elementen (d. h. kommt kein Element eines Elements von m gleichzeitig in einem anderen Element von m als Element vor), und ist s_0 eine Menge, die mit jedem Element von m ein einziges Element gemein hat, aber keine weiteren Elemente besitzt, so heisst s_0 eine Auswahlmenge von m.

---

1) Es soll also stets $a = a$ sein, aus $a = b$ stets $b = a$, aus $a = b$ und $b = c$ stets $a = c$, endlich aus $m \varepsilon n$, $m = a$, $n = b$ stets $a \varepsilon b$ folgen.

2) Wesentlich ist hierbei, daß die Existenz der einzelnen Elemente von $\mathfrak{U} m$ (d. h. der Mengencharakter der Untermengen) gemäß Definition 2 im voraus feststehen muß, nicht also wie bei CANTOR jede „Zusammenfassung" von Elementen von m ein Element von $\mathfrak{U} m$ bildet.

Eine Auswahlmenge von m enthält also aus jedem Element von m je ein einziges Element, aber kein Element, das nicht Element eines Elements von m wäre; sie ist demnach Untermenge der Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}\, m$, falls diese existiert. Zu einer Menge m kann es offenbar nur dann eine Auswahlmenge geben, wenn *jedes* Element von m überhaupt Elemente besitzt, dann aber nicht notwendig gerade eine einzige Auswahlmenge; wenn dennoch im folgenden im Anschluß an eine Menge m kurz von „ihrer Auswahlmenge" die Rede ist, so soll genauer *irgend eine Auswahlmenge von m* gemeint sein. Die Beschränkung auf eine Menge m *elementefremder* Elemente ist für den Begriff der Auswahlmenge an sich nicht notwendig, vielmehr nur im Anschluß an [Z] schon in die Definition aufgenommen; demgemäß soll, wenn von der Auswahlmenge einer Menge m die Rede ist, immer vorausgesetzt werden, daß die Elemente von m elementefremd sind.

Wir schreiten nun zur Erklärung des Funktionsbegriffs. Wird eine Menge x unbestimmt („variabel") gelassen[1]), so werden im allgemeinen auch ihre Potenzmenge, ihre Vereinigungsmenge und ihre Auswahlmenge unbestimmt sein, ebenso die Paarmenge von ihr und einer anderen Menge. Diese von x abhängigen Mengen — den Grenzfall der festen („konstanten") Menge eingeschlossen — werden als Funktionen von x bezeichnet, ebenso heißt eine Funktion einer Funktion von x wiederum eine Funktion von x. Zur Kennzeichnung von Funktionen werden die Zeichen φ, ψ usw. verwendet, nötigenfalls unter Hinzufügung der unabhängigen Unbestimmten x in der Form $\varphi(x)$, $\psi(x)$ usw.; φ ist also eine Vorschrift darüber, in welcher Reihenfolge auf x (und eventuell, infolge der Paarmengenbildung, auf weitere konstante Mengen) die Operationen der Bildung von Paarmenge, Potenzmenge, Vereinigungsmenge, Auswahlmenge (und Aussonderungsmenge gemäß der nachfolgenden Definition 6) anzuwenden sind — nach Definition natürlich in endlichmaliger Wiederholung. Die hiermit eingeführte Begriffsbildung wird schließlich vervollständigt durch folgende

Definition 6. Sind φ und ψ Funktionen, R eine der Grundbeziehungen $=$, $\neq$, ε, $\not\varepsilon$, endlich m und m_0 Mengen von der Art, daß m_0 alle diejenigen Elemente y von m und nur sie als Elemente enthält, für die die Beziehung $\varphi(y)\ \mathrm{R}\ \psi(y)$ gilt, so heißt m_0 eine (nach Axiom I: die) durch die Beziehung $\varphi\ \mathrm{R}\ \psi$ bestimmte Aussonderungsmenge von m (in Zeichen: $m_0 = m_{\varphi\,\mathrm{R}\,\psi}$). Kommt insbesondere im, φ oder ψ eine Unbestimmte x vor, (abgesehen von der „Hilfsvariabeln" y), so heißt auch m_0 eine Funktion von x.

Diese Definition schaltet den Begriff einer „definiten Eigenschaft" aus, der in [Z] für die Aussonderung von Untermengen m_0 maßgebend ist, und setzt an seine Stelle als Kriterium dafür, daß gewisse Elemente y von m und nur sie zu einer Untermenge m_0 von m zusammengefaßt werden können, die Bedingung,

1) In praxi durchläuft die Unbestimmte x stets die Elemente einer gewissen Menge.

daß für diese y die Menge $\varphi(y)$ Element der Menge $\psi(y)$ sei, wobei φ und ψ gegebene Funktionen bedeuten. Gleichberechtigt mit „Element sein", also mit der Beziehung ε, sind hierbei die Beziehungen $\bar{\varepsilon}$, $=$, $\neq$, entsprechend der Rolle, die sie mit ε zusammen als „Grundbeziehungen des Axiomensystems" spielen; doch braucht von der Beziehung $=$ nur bei einer einzigen Überlegung, bei der Bildung von Mengen mit einem einzigen Element (S. 6), Gebrauch gemacht werden, während sie alsdann stets durch die Beziehungen ε, $\bar{\varepsilon}$ ersetzt werden kann[1]. Die Beziehung $\neq$ wird für Definition 6 überhaupt nicht benutzt und ist nur der Symmetrie wegen genannt.

Daß Definition 6 keine unzulässige gegenseitige Verknüpfung zwischen den Begriffen der Funktion und der Aussonderungsmenge herstellt, (was in [Z] zwischen dem Begriff „definit" und den Axiomen weniger leicht zu prüfen ist), leuchtet ein in Rücksicht auf die nur *endliche* Zahl von Operationen, die nach Definition bei der Funktionsbildung in Betracht kommt. Es sei hier übrigens die Frage offen gelassen, ob der Funktionsbegriff nicht insofern noch enger erklärt werden kann, als die Bildung der Auswahlmenge für ihn auszuschalten wäre; erst bei der vollständigen Ausführung der an das Axiomensystem anzuknüpfenden Überlegungen wird sich zeigen, daß eine solche Beschränkung gemacht werden kann[2]. Ebenso kann auch erst diese Ausführung erweisen, daß der Begriff der Aussonderungsmenge nach Definition 6 wirklich weit genug ist, um die in der legitimen Mengenlehre vorkommenden Mengenbildungen zu ermöglichen. Einige Beispiele dazu werden am Schlusse gegeben werden.

Zur Begründung der *allgemeinen Mengenlehre* dienen nunmehr die folgenden sechs Axiome, die der leichteren Vergleichbarkeit wegen in der Reihenfolge wie in [Z], nicht wie in den vorangehenden Definitionen, angeführt sind. Während das erste Axiom im wesentlichen die Grundbeziehung ε präzisiert, nämlich fordert, daß eine Menge durch die Gesamtheit ihrer Elemente bestimmt sei, postulieren die folgenden fünf Axiome gleichmäßig auf Grund der vorausgesetzten Existenz einer gewissen Menge die Existenz einer anderen (von jener abhängigen) Menge.

Axiom I. Ist gleichzeitig m Untermenge von n und n Untermenge von m (d. h. ist jedes Element der Menge m gleichzeitig Element der Menge n und umgekehrt), *so ist $m = n$.* (Axiom der Bestimmtheit.)

---

[1] Wenn man wie in [Z] in Axiom II die Existenz der Mengen mit einem einzigen Element *fordert*, also in diesem Axiom und in Definition 1 die Beschränkung $a \neq b$ fortläßt, so wird die Benutzung der Beziehungen $=$, $\neq$ in Definition 6 vollkommen überflüssig.

[2] Falls die Bildung der Auswahlmenge bei der Funktionsbildung zugelassen wird, so ist sie doch nur insoweit zulässig, als das Ergebnis stets unabhängig von der Mehrdeutigkeit des Prozesses der Auswahlmengenbildung bleibt; dies näher auszuführen kann aus dem oben angeführten Grund hier unterbleiben.

Axiom II. Sind a und b verschiedene Mengen, so existiert die Paarmenge von a und b. (Axiom der Paarung.)

Axiom III. Ist m eine Menge, R *eine der Grundbeziehungen* ε, $\bar{\varepsilon}$, $=$, $\neq$ *und sind* φ *und* ψ *Funktionen, so existiert (unter den Untermengen von m) die Aussonderungsmenge* $m_{\varphi \mathrm{R} \psi}$. (Axiom der Aussonderung.)

Axiom IV. Ist m eine Menge, so existiert ihre Potenzmenge $\mathfrak{U}\, m$. (Axiom der Potenzmenge.)

Axiom V. Ist m eine Menge, so existiert ihre Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}\, m$. (Axiom der Vereinigung.)

Axiom VI. Ist m eine Menge von elementefremden Elementen, deren jedes Elemente enthält[1]*, so existiert (unter den Untermengen von* $\mathfrak{S}\, m$*) mindestens eine Auswahlmenge von m.* (Axiom der Auswahl.)

Gemäß Axiom I kann die Menge, die die Elemente $a, b, c, \ldots$ und nur sie enthält, kurz als $\{a, b, c, \ldots\}$ geschrieben oder angedeutet werden.

An dieses neue Axiomensystem soll schließlich eine kurze Kennzeichnung des Weges angeschlossen werden, der von ihm aus zur CANTORschen Mengenlehre, zunächst also zu den Entwicklungen ZERMELOs führt. Es sei m eine Menge[2]; dann existiert, wenn im Sinn der Definition 6 für R die Grundbeziehung $\bar{\varepsilon}$, für φ bezw. ψ die Funktion y bezw. die konstante Menge m gewählt wird, nach Axiom III die Aussonderungsmenge $N = m_{y \bar{\varepsilon} m}$, die alle und nur die Elemente y von m enthält, die *nicht* Elemente von m sind. Hiernach enthält N überhaupt kein Element; nach Definition 2 ist N Untermenge *jeder* Menge. Nach Axiom I *ist N die einzige Menge, die keine Elemente besitzt;* sie wird wie üblich als Nullmenge (Schreibweise: 0) bezeichnet.

Existiert überhaupt eine Menge m[2], so existieren stets zwei verschiedene Mengen, z. B. m und 0 oder, falls $m = 0$ sein sollte, 0 und die offenbar (wegen $0 \,\varepsilon\, \mathfrak{U}\, 0$) von 0 verschiedene Potenzmenge $\mathfrak{U}\, 0$. Es seien also m und n irgend zwei verschiedene Mengen und $p = \{m, n\}$ ihre nach Axiom II existierende Paarmenge. Dann existiert nach Axiom III die Aussonderungsmenge $p_{y=m}$, die alle und nur diejenigen Elemente von p als Elemente enthält, die gleich m sind; diese Aussonderungsmenge kann als $\{m\}$ geschrieben werden.

Zu jeder vorgegebenen Menge m existiert also die Menge $\{m\}$*, die m und*

---

1) Betreffs der Notwendigkeit dieser Bedingung vgl. man die oben im Anschluß an Definition 5 gemachte Bemerkung.

2) Ob diese Voraussetzung gemacht, also die Existenz einer Menge überhaupt angenommen werden darf, wird später (S. 7 unten) erörtert.

keine andere Menge als Element besitzt. Damit ist der Anschluß an das Axiom II (Axiom der Elementarmengen) in [Z] erreicht[1]).

Es ist nun vor allem nachzuweisen, daß und wie die in der legitimen Mengenlehre notwendigen Überlegungen und Prozesse auf Grund des Axioms III durchzuführen sind. Diese Aufgabe bleibt einer ausführlicheren Arbeit überlassen. Hier soll nur noch ein einfaches, aber nicht triviales Beispiel nach dieser Richtung angegeben werden, das namentlich zeigt, in welcher Weise *Funktionen* auf Grund der Definition 6 gebildet und benutzt werden können, und das im übrigen vergleichshalber genau analog wie in [Z] (S. 264) behandelt werde.

Es sei $t = \{m, n, r, \ldots\}$ eine Menge; der Durchschnitt $d = [m, n, r, \ldots]$ der Elemente von t soll auf Grund der Axiome gebildet werden. Zu diesem Zwecke werde, wenn x eine Unbestimmte bezeichnet, auf Grund von Definition 6 (und Axiom III) die Funktion $X = t_{x \varepsilon y}$ gebildet, die alle und nur diejenigen Elemente y von t (d. h. alle nur diejenigen der Mengen $m, n, r, \ldots$) als Elemente umfaßt, in denen die Unbestimmte x als Element vorkommt; X hängt von der Unbestimmten x und nur von ihr ab. Man betrachte dann, wenn m ein beliebiges Element von t bezeichnet, die Untermenge d von m, die alle und nur die Elemente x von m umfaßt, für die $X = t$ oder, was dasselbe besagt, $X \varepsilon \{t\}$ ist; in der Schreibweise von Definition 6 ist $d = m_{X \varepsilon \{t\}}$, wobei die „Hilfsvariable" mit x bezeichnet gedacht ist, die Unbestimmte der Funktion X also die Elemente der Menge m zu durchlaufen hat. Hiernach enthält d alle und nur die Elemente von m, die gleichzeitig in *sämtlichen* Elementen $m, n, r, \ldots$ von t als Elemente vorkommen; d ist also der Durchschnitt im gewöhnlichen Sinn.

Ähnliche Beispiele sind ohne besondere Schwierigkeiten zu bilden. Hervorzuheben ist dabei, daß dieses Verfahren auch zum Beweis des CANTORschen Satzes $\overline{\overline{\mathrm{U}}m} > \overline{\overline{m}}$ hinreicht; der Prozeß der Untermengenbildung nach Definition 6 und Axiom III ist also allgemein genug, um wie in der gewöhnlichen Mengenlehre mittels des Diagonalverfahrens den Übergang von einer beliebigen Mächtigkeit zu einer größeren zu ermöglichen.

Mit dem vorstehenden Axiomensystem ist eine Grundlage der *allgemeinen* Mengenlehre gegeben. Aus ihm folgt aber noch nicht, daß *überhaupt Mengen existieren*, daß also der Bereich $\mathfrak{B}$ nicht leer ist. Die bloße Forderung der Existenz von Mengen würde andererseits die Existenz *unendlicher* Mengen noch nicht sichern. Endlich ist auch ZERMELOS Axiom des Unendlichen (Axiom VII in [Z]) nicht weittragend genug, um genügend umfassende Mengen — z. B. Mengen, deren Mächtigkeit ein $\aleph$ mit transfinitem Index ist — zu sichern (vgl. [A],

---

1) Diese Überlegung stellt den einzigen Fall dar, in dem die Benutzung der Grundbeziehungen $=$ und $\neq$ in Definition 6 erforderlich wird. Denn auf Grund des erhaltenen Ergebnisses läßt sich allgemein $a \varepsilon \{b\}$ statt $a = b$ und $a \,\bar{\varepsilon}\, \{b\}$ statt $a \neq b$ schreiben.

S. 230f.). Man benötigt vielmehr als absolutes Existenzaxiom ein Axiom VII, das unter Benutzung eines gegen das Vorangegangene etwas erweiterten Funktionsbegriffs sich als *wesentliche Verallgemeinerung des Zermeloschen Axioms des Unendlichen* auffassen läßt[1]).

Schließlich ist mit diesen sieben Axiomen der Bereich 𝔅 nicht vollständig festgelegt; sie geben noch Raum für Mengen, deren Existenz keine Folge der Axiome ist und die für die legitime Mengenlehre jedenfalls überflüssig, wenn nicht gar bedenklich sind, so z. B. für die von Herrn D. Mirimanoff behandelten „ensembles extraordinaires"[2]). Die im Hinblick darauf wünschenswerte Beschränkung des Bereichs kann herbeigeführt werden durch ein letztes Axiom VIII („Beschränktheitsaxiom"), das im wesentlichen 𝔅 als *den engsten mit den übrigen sieben Axiomen verträglichen Bereich* festlegt; für die Formulierung und Bedeutung dieses Axioms sei auf meine an anderer Stelle gemachten Überlegungen[3]) verwiesen. Mit diesen acht Axiomen ist, wie noch zu zeigen sein wird, ein vollständiges und unabhängiges Axiomensystem der Mengenlehre hergestellt.

Marburg, 18. Oktober 1922.

---

1) Es ist im wesentlichen in jenem Axiom die Nullmenge durch eine beliebige Menge, die Funktion $\{x\}$ durch eine beliebige Funktion zu ersetzen. Näheres hierüber habe ich in meinem Leipziger Vortrag 1922 ausgeführt.

2) Vgl. L'Enseignement Mathémathique, XIX^e Année (1917), p. 42.

3) [B], S. 233f. Betreffs der Formulierung vgl. auch die Verwendung des gleichen Prinzips in meinem Aufsatz „Axiomatische Begründung der transfiniten Kardinalzahlen", Math. Zeitschrift, Bd. 13 (1922), S. 163.

Rec. 25. X. 22.