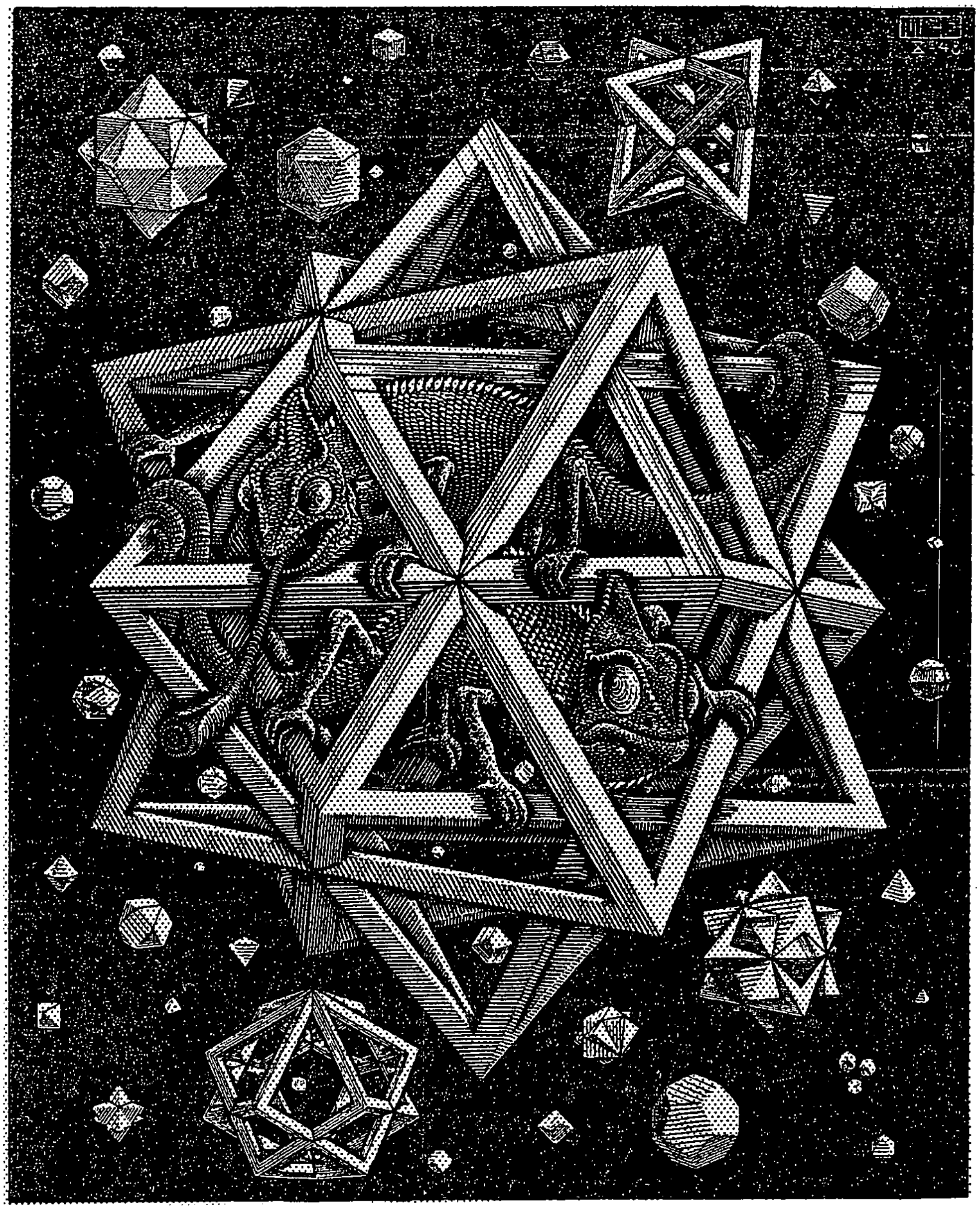
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס. 2 חשון תשמ"ו אוקטובר 1985



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון וייצמן למדע
רחובות

בחסות המרכז המדעי י.ב.מ. ישראל

תוכן העניינים

עמוד

* * * * *
* * * *

אתגר - גליונות מתמטיקה

מוצא לאור ע"י הפקולטות למתמטיקה בטכניון ובמכון ויצמן.

המערכת: פרופ' א. ברמן, הפקולטה למתמטיקה, הטכניון.

פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שמושית, מכון ויצמן.

מען המערכת: הפקולטה למתמטיקה, הטכניון, מכון טכנולוגי לישראל,

חיפה 32000, טל. 292280(04).

דבר - המערכת

עם הכנס שנת הלמודים תשמ"ו למסלולה אנו שמחים להגיש את חוברת מס' 2 של "אתגר - גליונות מתמטיקה" בצרוף אחולינו הלבביים לשנת למודים טובה ומוצלחת.

החל בגליון זה נתמך העתון ע"י המרכז המדעי י.ב.מ. ישראל. חובה נעימה לנו להביע את הערכתנו ותודתנו לחברת י.ב.מ. על פעולתה היפה הזו. בהזדמנות זו אנו שמחים להודות גם לאגוד הישראלי למתמטיקה שסייע לנו בכסוי חלק מהוצאות הדפסת גליון מס' 1.

המאמר הראשון בגליון הוא המשכו של המאמר על עקרון שובך היונים, שבגליון הקודם, הפעם מנקודת ראות גאומטרית. מאמר מרכזי אחר הוא, אנו מקוים, ראשון בסדרת מאמרים שיעסקו בממוצעים ובאי שויונות.

הקיץ השתתפה נבחרת ישראל, שרב משתתפיה נמנים על קוראי עתוננו, באולימפיאדה הבינלאומית למתמטיקה שנערכה בפינלנד. בעיות התחרות מתפרסמות בעתון. נשמח מאד לקבל פתרונות לבעיות אלו מהקוראים, כמו כן נשמח לקבל פתרונות של בעיות המופיעות במסגרת המאמרים וכמובן פתרונות לשאלות של תחרות הבעיות.

* * * * *

עקרון שובך היונים - נוסח גאומטרי

ד"ר רון אהרוני
הטכניון

בחלקו הקודם של המאמר, שהופיע בגליון "אתגר" האחרון, הוצגה שיטה להוכחת קיומם של אוביקטים מתמטיים: אם נתונים יותר מ-n עצמים המתחלקים ל-n סוגים, אזי קימים לפחות שני עצמים מאותו סוג. זהו עקרון פשוט, שבפני עצמו כמעט ואינו דורש הוכחה (נסו לנסח לעצמכם הוכחה כזו!) אך שמושיו מרחיקי לכת.

הנה עוד דוגמא:

<u>בעיה</u>: הוכח שלכל מספר טבעי n קימת כפולה שביצוגה העשרוני מופיעים רק 1-ים ו 0-ים.

<u>פתרון</u>: נתבונן במספרים 1,11,111, ... מכיון שמספרם אינסופי ומספר השאריות בחלוקה ב-n סופי, קימים שני מספרים מצורה זו שלהם אותה שארית בחלוקה ב-n הפרשם הוא מהצורה הדרושה, והוא כפולה של n.

במקרה הפרטי ש-n הוא אי-זוגי וגם איננו מתחלק ב-5 נוכל להגיד כי קיימת כפולה של n אשר כל ספרותיה הן 1. נשאיר לקורא להסיק את המשפט הזה ממה שכבר נאמר.

כאן ברצוננו להציג את העקרון בנוסח גאומטרי - לארכים, שטחים, נפחים וכו'. (בשם כולל נכנה כל אחד מהגדלים האלה (אורך, שטח או נפח) <u>מדה</u>). גם כאן העקרון פשוט מאד: אם A_i קבוצות המוכלות בקבוצה S וסכום מדותיהן גדול ממדתה של S, יש שתים מהן (לפחות) שחתוכן איננו ריק, כלומר - הן חופפות בחלקן. אפשר לחזק זאת: אם סכום מדות A_i גדול מ-k פעמים מדת S קימת נקודה משותפת ל-k+1 קבוצות A_i. כדוגמא נביא שאלה שהופיעה באחת מהאולימפיאדות למתמטיקה של מכון ויצמן:

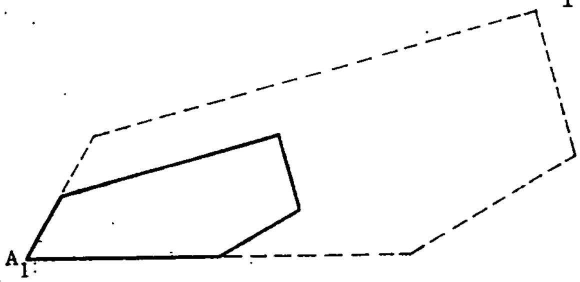
<u>בעיה</u>: בתוך רבוע שאורך צלעו 1 נתונים עגולים שסכום הקפיהם לפחות 10. הוכח שקים ישר החותר לפחות 4 מהעגולים.

"כמעט פתרון": הראה שקים אפילו ישר כזה המקביל לאחת הצלעות של הרבוע. לשם כך שים לב שסכום קטרי המעגלים גדול מ-3, בעוד שאורך צלע הרבוע הוא 1. לכן יש בין המעגלים ארבעה אשר להטלי קטריהם יש נקודה משותפת. המשך!

נהנה עוד בעיה, הפעם מאולימפיאדה בינלאומית למתמטיקה:

נתון מחומש קמור M שקדקדיו $A_1, \ldots, A_5$. מעתיקים אותו כך ש-A_1 נופל על A_2, בעוד צלעות מתאימות שלו נשארות מקבילות ("העתקה מקבילה"). כך עושים גם לגבי A_3, A_4 ו-A_5. הוכח שלשנים מ-5 העותקים המתקבלים יש נקודה פנימית משותפת.

הוכחה: נציב את M כך ש-A_1 בראשית הצירים, ונכפיל אותו ב-2, כלומר - נחליף כל קדקד A_i ב-$2A_i$, ראה ציור.



שטחו של המחומש T שנוצר הוא 4 פעמים שטחו של M. כל אחד מ-5 המחומשים המועתקים מוכל בו, ומכיון שסכום שטחיהם הוא 5 פעמים שטחו של M, שנים מהם חופפים בנקודה פנימית. (בכדי להראות שכל העתקה של M מוכלת ב-T מספיק להראות שכל קדקד של המחומש המועתק מוכל ב-T, זאת משום ש-M קמור. אבל אם M מועתק כך ש A_1 נופל על A_i אז A_j עובר לקדקד A_i+A_j ו- A_i+A_j הוא אמצע הקטע המחבר את הקדקדים $2A_i$ ו- $2A_j$ של T).

בתחילת המאה פתח מתמטיקאי בשם מינקובסקי שטה גאומטרית להוכחות קיום בתורת המספרים, שטה המבוססת על עקרון שובך היונים הגאומטרי. נביא כאן משפט שלו, וגם שמוש למשפט זה.

בחלקו הקודם של המאמר למדנו מהי נקודת שריג במישור: זוהי נקודה (x,y) אשר שעוריה, x ו y הם שלמים.

תהא A קבוצה במישור, הזזה של A ב- (x,y) היא הקבוצה המתקבלת מהזזה ב-x ימינה וב-y למעלה. נסמן קבוצה זו ב- $A+(x,y)$.

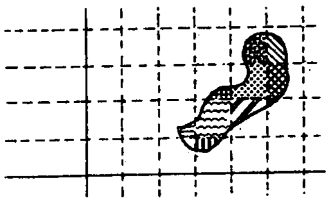
בסמונים של תורת הקבוצות:

$$A+(x,y) = \{(a+x,b+y):\ (a,b) \in A\}$$

לא קשה למצוא הזזה של A שתכיל נקודת שריג: קח נקודה כלשהי (a,b) ב-A, והזז את A ב-$(-a\ ,\ -b)$: הנקודה (a,b) עוברת אז ל-$(0,0)$, ולכן $(0,0)$ שיכת ל-$A+(-a\ ,\ -b)$. כש-A "גדולה" אפשר לומר יותר:

משפט אם שטחה של A גדול מ-1 אז יש לה הזזה שמכילה לפחות שתי נקודות שריג.

הוכחה: נתבונן בחלקי A הנמצאים ברבועי השריג (ראה ציור - החלקים השונים מסומנים בדרכים שונות) סכום שטחיהם שווה לשטחה של A, כלומר - יותר מ-1.



לכן אם נשים אותם כולם באותו רבוע, (נאמר ברבוע $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$), ששטחו בדיוק 1, תהיה נקודה (נסמנה ב-(u,v)) <u>שתתקבל לפחות פעמיים</u>. קל לראות שפרוש הדבר הוא שקימות ב-A שתי נקודות, נאמר (s_1,t_1) ו (s_2,t_2), המקימות: (s_1,t_1) נמצאת ברבוע $a_1\le x\le a_1+1$, $b_1\le y\le b_1+1$

ו- (s_2,t_2) נמצאת ברבוע $a_2\le x\le a_2+1$, $b_2\le y\le b_2+1$

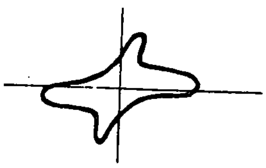
כך ש: $(u,v)=(s_1,t_1)-(a_1,b_1)=(s_2,t_2)-(a_2,b_2)$

(מבחינה גאומטרית פרוש הדבר הוא ש (s_1,t_1) נמצאות באותו מקום ברבוע יחסית לנקודה השמאלית התחתונה ברבוע שלהן).

אבל אז: $(a_1,b_1)=((s_1,t_1)-(u,v)$ ו $(a_2,b_2)=(s_2,t_2)-(u,v)$,

כלומר גם (a_1,b_1) וגם (a_2,b_2) נמצאות בהזזה $A-(u,v)$ של A.

קבוצה נקראת <u>סימטרית</u> אם לכל נקודה (x,y) בה גם הנקודה הנגדית, $(-x,-y)$, נמצאת בה (לדוגמא: הקבוצה בשרטוט).



קבוצה נקראת <u>קמורה</u> אם לכל שתי נקודות P ו Q בה הקטע המחבר את P ו Q נמצא כולו בקבוצה.

<u>**תרגיל**</u>: אם A לא ריקה, סימטרית וקמורה אזי $(0,0)$ נמצאת ב-A (רמז: קח (x,y) ב-A, והתבונן בקטע המחבר את (x,y) עם $(-x,-y)$).

<u>**משפט מינקובסקי**</u> אם A סימטרית וקמורה ושטחה גדול מ-4 אז A מכילה עוד נקודת שריג, בנוסף ל-$(0,0)$.

<u>**הוכחה**</u>: תהא A הקבוצה המתקבלת מ-A על ידי החלפת כל נקודה (x,y) ב-A ב- $(\frac{x}{2},\frac{y}{2})$ ("מחלקים את A ב-2". למשל: אם A עגול ברדיוס R סביב הראשית אזי A' היא עגול ברדיוס $\frac{R}{2}$ סביב לראשית). נסמן זאת כך: $A'=\frac{A}{2}$. שטחה של A' שוה לשטחה של A מחולק ב-4 (השווה דוגמת המעגלים) ולכן הוא גדול מ-1. לפי המשפט הקודם קיימת הזזה של A' ב- (x,y) שמכילה שתי נקודות שריג (a_1,b_1) ו-(a_2,b_2). פרוש הדבר הוא שקיימות נקודות $P=(s_1,t_1)$ ו-$Q=(s_2,t_2)$ ב-A' כך ש- $(s_1,t_1)+(x,y)=(a_1,b_1)$ ו-$(s_2,t_2)=(x,y)+(a_2,b_2)$. פרוש הדבר הוא ש- $P=(s_1,t_1)=(a_1-x,b_1-y)$ ו- $Q=(s_2,t_2)=(a_2-x,b_2-y)$. שים לב שגם A'

סימטרית וקמורה. מכיון ש-Q ב-A' ו-A' סימטרית, הרי גם Q- נמצאת ב-A, ומכיון ש-A' קמורה גם אמצע הקטע בין P ו-Q נמצא ב-A. אבל אמצע קטע זה הוא:

$$\frac{P-Q}{2} = \left(\frac{s_1-s_2}{2}, \frac{t_1-t_2}{2}\right) = \left(\frac{a_1-x-(a_2-x)}{2}, \frac{b_1-y-(b_2-y)}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{a_1-a_2}{2}, \frac{b_1-b_2}{2}\right)$$

אבל מכיון ש- $A'=\frac{A}{2}$ פרוש העובדה ש- $\left(\frac{a_1-a_2}{2}, \frac{b_1-b_2}{2}\right)$ שיכת ל-A' הוא ש- (a_1-a_2, b_1-b_2) שיכת ל-A. אבל זוהי נקודת שריג, ומכיון ש- $(a_1,b_1) \neq (a_2,b_2)$ הרי זוהי נקודה שאינה $(0,0)$ ולכן המשפט הרכח.

קבוצת נקודות L במישור נקראת "שריג מוכלל" אם

א. היא דיסקרטית, כשפרוש הדבר הוא שלכל נקודה P במישור יש מעגל שמרכזו ב-P ואינו מכיל נקודה ב-L פרט ל-P.

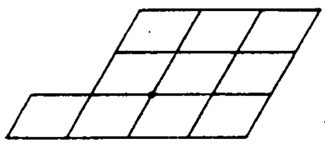
ב. $(0,0)$ שייכת ל-L

ג. אם P,Q שיכות ל-L אז P+Q ו-P-Q שיכות ל-L.

לדוגמא: אוסף הנקודות $\{(\frac{1}{2}k,\ell) : k,\ell$ טבעיים$\}$ הוא שריג מוכלל

לא קשה להראות שלכל שריג מוכלל יש "מקבילית בסיסית", שהוא מושג המקביל לרבוע היחידה בשריג הרגיל. זוהי מקבילית שקדקדה האחד בראשית, שתי צלעותיה היוצאות מהראשית הן וקטורים $\bar{a}$ ו- $\bar{b}$ וכל איבר ב-L ניתן להכתב כ- $m\,\bar{a} + n\,\bar{b}$, כאשר m,n הם מספרים שלמים. שימו לב שהדבר גורר שבתוך המקבילית אין נקודות מ-L וכי יכולה להיות יותר ממקבילית בסיסית אחת. לדוגמא, לשריג הרגיל יש, בנוסף לרבוע היחידה, גם מקבילית בסיסית שקדקדיה הם $(0,0),(0,1)(1,1)(1,2)$.

<u>תרגיל:</u> לכל מקבילית בסיסית של L יש אותו שטח.



מההוכחה של משפט מינקובסקי ברור שאפשר להכלילו כדלקמן:

__משפט מינקובסקי המוכלל__: אם L שריג מוכלל ששטח המקבילית הבסיסית שלו הוא p ו-A קבוצה סימטרית וקמורה ששטחה גדול מ-4p אז A מכילה נקודה מ-L השונה מ-(0,0).

נביא כאן שמוש יפה למשפט זה בתורת המספרים:

__משפט__: אם p הוא מספר ראשוני המשאיר שארית 1 בחלוקה ב-4 אז אפשר לכתוב את p כסכום של שני רבועים.

__לדוגמא:__ $5=1+4$, $13=4+9$, $41=16+25$

__הוכחה__ : עובדה ידועה, שלא נוכיח אותה כאן, היא שלכל מספר ראשוני p מהצורה $p=4k+1$ קיים מספר טבעי s קטן מ-p כך ש $s^2\equiv-1(p)$ כלומר $s^2=np-1$ ל-n טבעי מסוים. נבנה את השריג L של כל הנקודות מהצורה (u_1,u_2) כש $u_2\equiv su_1(p)$ (כלומר u_2 משאיר שארית su_1 בחלוקה ב-p, שפרושו $u_2=np+su_1$ ל-n טבעי מסוים). קל לראות ש-L הוא שריג מוכלל: תכונה א' נובעת מכך שכל אברי L שלמים, תכונה ב' ברורה, ואילו תכונה ג' היא עובדה פשוטה על שאריות. המקבילית שקדקדיה (0,0) , (0,p) , (1,s) ו- (1,s+p) היא מקבילית בסיסית של L, ושטחה הוא p (אורך צלעה p וגבהה לאותה צלע הוא 1).

נתבונן בקבוצה A של הנקודות (x,y) המקימות: $x^2+y^2 < \frac{3}{2}p$. זהו מעגל ברדיוס $\sqrt{\frac{3}{2}p}$, ולכן שטחו הוא $\pi\frac{3}{2}p > 4p$. לפי משפט מינקובסקי המוכלל קיימת ב-A נקודה מ-L שונה מ-(0,0). נסמן נקודה זו ב-(c,d).

c ו-d הם מספרים שלמים, שמכיון שהם שייכים ל-L הם מקיימים:

$d \equiv c\, s(p)$, ולכן: $d^2\equiv c^2s^2(p)\equiv-c^2(p)$. (זכור את הגדרתו של s!).

כלומר: קים n טבעי כך ש- $d^2=np-c^2$, או $c^2+d^2=np$. אבל מכיון ש (c,d) שייכת ל-A, הרי $c^2+d^2 < \frac{3p}{2}$, ולכן n=1. מכך יוצא כי $c^2+d^2=p$, והמשפט הוכח.

* * *
* *

האולימפיאדה המתמטית הבינלאומית-1985

האולימפיאדה המתמטית הבינלאומית, ה-26 במספר, התקיימה בפינלנד ביולי 1985. השתתפו בה נבחרות של תלמידי תיכון מ-38 מדינות.

חברי הנבחרת הישראלית היו:

צבי ארונה, ביה"ס הריאלי, חיפה

אורי גנור, תיכון אחד העם, פתח-תקוה

עודד לבנה, תיכון עמק החולה

עדי לוי, אורט סינגלובסקי, רמת גן

רז נאות, אורט, קרית ביאליק

זיו שמי, ביה"ס קציר, רחובות

בראש הקבוצה עמד פרופ' י. גילים ממכון ויצמן, סגנו היה ד"ר ר. אהרוני מהטכניון.

המצטיין בין חברי הנבחרת היה אורי גנור שזכה במדלית כסף (מקום 15-38, מבין 210 משתתפים). לפי סכום הציונים של כל חברי הקבוצות, הגיעה רומניה למקום ראשון וארה"ב למקום השני. ישראל הגיעה למקום ה-16 אבל יש לציין כי היתה הראשונה מבין כל המדינות הקטנות, (פחות מ-10 מיליון תושבים).

להלן שאלות התחרות. הקוראים מתבקשים להציע פתרונותיהם. הפתרונות יפורסמו בחוברת הבאה.

1. המרובע ABCD חסום במעגל. מעגל שני אשר מרכזו על הצלע AB, משיק לשלוש הצלעות האחרות.
הוכח כי

$$AD+BC = AB$$

2. נתונים מספרים טבעיים k,n ללא גורם משותף כך ש - $0<k<n$.

M היא הקבוצה $\{1,2,\dots,(n-1)\}$ וכל אחד מהמספרים ב-M צבוע,

או בכחול או בלבן. נתון כי

(I) עבור כל $i\in M$, שני המספרים $i,(n-i)$, צבועים באותו צבע.

(II) עבור כל $i\in M$, $(i\neq k)$, שני המספרים $i,|k-i|$ צבועים באותו צבע.

הוכח כי כל המספרים ב- M צבועים באותו צבע.

* * *

3. עבור כל פולינום $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$, אשר כל המקדמים בו הם שלמים, אנחנו מסמנים ב- $W(P)$ את מספר המקדמים שהם אי-זוגיים. יהיה $Q_i(x) = (1+x)^i$. הוכח כי אם $i_1,i_2,\dots,i_n$ הם מספרים שלמים ו-

$$0\le i_1<i_2 \dots < i_n$$

אזי

$$W(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \dots + Q_{i_n}) \ge W(Q_{i_1})$$

* * *

4. תהיה M קבוצה כלשהי של 1985 מספרים טבעיים שונים אשר אין לאף אחד מהם גורם ראשוני גדול מ - 26.

הוכח כי קיימת לפחות תת-קבוצה אחת, בעלת 4 איברים שונים אשר מכפלתם היא חזקה רביעית של מספר שלם.

* * *

5. מעגל אשר מרכזו בנקודה O עובר דרך הקדקדים A,C של משולש ABC וחותך שנית את שני הקטעים AB,BC בשתי נקודות שונות, K,N.

נתון כי המעגלים החוסמים את המשולשים ABC ו-KBN נפגשים בשתי נקודות בדיוק, B ו-M. הוכח כי

$$\measuredangle OMB = 90^0$$

6. עבור כל מספר ממשי x_1 מגדירים את הסדרה $\{x_n\}$ ע"י

$$x_{n+1} = x_n(x_n + \frac{1}{n})$$

עבור כל $n \geq 1$.

הוכח כי קיים בדיוק ערך אחד של x_1 (ורק אחד כזה) כך ש-

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1$$

עבור כל $n \geq 1$.

* * *
* *

מספרים משוכללים: עדכון

מספר משוכלל הוא מספר טבעי השווה לסכום מחלקיו. למשל 28 הוא מספר משוכלל כיון ש

$$28 = 1+2+4+7+14.$$

בגליון אתגר מס' 7 הופיע מאמר על "מספרים משוכללים: סכום זמני". באופן כללי ידוע כי אם המספר 2^n-1 הוא ראשוני אזי המספר $2^{n-1}(2^n-1)$ משוכלל וכי נוסחה זו כוללת כל המספרים המשוכללים הזוגיים. עד היום לא ידוע האם קיימים מספרים משוכללים אי-זוגיים. המספר הראשוני 2^n-1 נקרא מספר מרסן.

במאמר שפורסם בשנת 1980 נמצאת רשימה של 27 המספרים המשוכללים שהיו ידועים אז. בשנת 1983 נתגלה המספר המשוכלל ה 28. כלומר, כרגע ידועים לנו מספר משוכלל של מספרים משוכללים.

המספר המשוכלל החדש הוא

$$2^{86242}\cdot(2^{86243}-1).$$

מספר מרסן הקשור למספר המשוכלל ה 28 הוא המספר $2^{86243}-1$ והוא בן 25692 ספרות. זהו המספר הראשוני הגדול ביותר בזמן גילויו. המספרים הללו נתגלו בעזרת מחשב על ידי איש מחשבים בשם סלובינסקי.

אי שויונות בין ממוצעים

ולדימיר גרשוביץ
האוניברסיטה העברית וביה"ס התיכון ליד האוניברסיטה ירושלים.

במושגים כמו ממוצע חשבוני וממוצע הנדסי ובאי השויון ביניהם משתמשים בתחומים שונים במתמטיקה. בעיות קיצון ובעיות אחרות שמקובל לפתרן בעזרת חשבון דפרנציאלי ניתן לפתור בהצלחה בעזרת אי שויונות בין ממוצעים ולפעמים, במיוחד בבעיות של מספר משתנים, הפתרון בשטה זו פשוט יותר.

לעתים נראה השמוש באי השויון בין ממוצעים, מלאכותי, אבל כידוע דרך מלאכותית בה משתמשים פעמיים הופכת לשיטה.

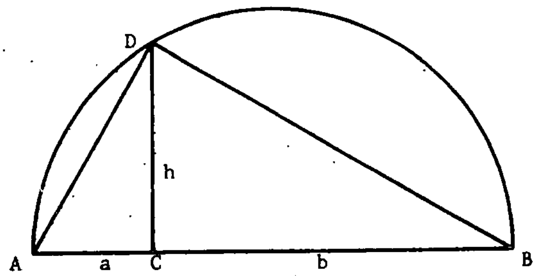
המאמר שלפנינו הוא ראשון בסדרה של מאמרים שיטפלו בסוגים שונים של ממוצעים מנקודות ראות שונות ויציגו שמושים שונים שלהם.

I. ממוצע חשבוני וממוצע הנדסי

יהיו a ו b שני מספרים חיוביים ונניח ללא הגבלת הכלליות כי $a\le b$ אינו גדול מ b. הבטויים $A = \frac{a+b}{2}$ ו $G = \sqrt{a\,b}$ (הכונה בשרש היא לערך האי שלילי) נקראים בהתאמה הממוצע החשבוני והממוצע ההנדסי של a ו b. A ו G נקראים ממוצעים כי הם נמצאים בין a ו b. מקור השמות "חשבוני" ו"הנדסי" הוא בכך שהסדרות $\{a,\frac{a+b}{2},b\}$ ו $\{a,\sqrt{ab},b\}$ הן חשבונית והנדסית בהתאמה.

קל להוכיח ש $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ נששויון קיים רק כאשר a=b. אי השויון נובע מפתוח אגף שמאל באי השויון $(a-b)^2 \ge 0$ שבו מתקיים שויון אם ורק

אם a=b. הוכחה גאומטרית מתוארת בשרטוט הבא:



על הקטע $AB=a+b$ נסמן נקודה C כך ש $AC=a, CB=b$. על הקטע הנ"ל נבנה חצי מעגל ונעלה אנך מנקודה C עד לחתוכו בנקודה D עם המעגל. לפי התכונה של קטעים פרופורציוניים במשולש ישר זוית, $CD=\sqrt{ab}$. מצד שני CD אינו גדול מרדיוס המעגל השוה ל $\frac{a+b}{2}$, כלומר $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

אם $a=b$ אז

$$G=\sqrt{a^2}=|a|=a$$

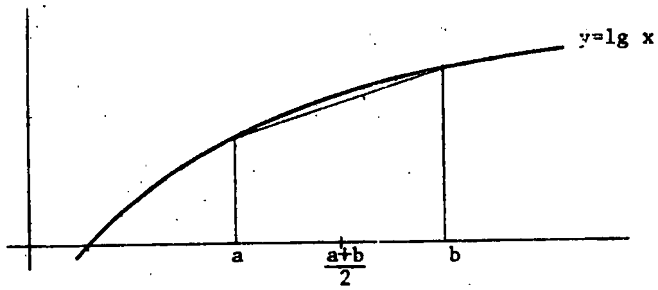
ו

$$A=\frac{a+a}{2}=a$$

כלומר $A=G$

להיפך, אם $A=G$, אז הנקודה C היא מרכז המעגל כלומר $a=b$.

הוכחה נוספת מבוססת על עיון בגרף של הפונקציה $y=\ell gx; x>0$, אם בסיס הלוגריתם הוא מספר הגדול מ 1 אז הפונקציה היא קעורה, (ראה הגרף שבציור).



מקעירות הפונקציה ℓgx נובע שאם $a<b$ אז

$$\ell g\,\frac{a+b}{2} > \frac{\ell g\, a+\ell g\, b}{2} = \ell g\,\sqrt{ab}$$

ולכן $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$

באחד המאמרים הבאים נדון בצורה יותר יסודית בשמושים של קמירות נקעירות לאישוויונות.

את אי השויון בין הממוצע החשבוני וההנדסי נתן לרשם גם בצורה

$$\frac{a}{\sqrt{ab}} + \frac{b}{\sqrt{ab}} \geq 2$$

או

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \geq 2$$

או

$$k + \frac{1}{k} > 2$$

כששויון מתקבל רק במקרה ש $k=1$. נעיר שאי השויון האחרון נתן להכללה עבור כל $k\neq 0$,

$$\left|k + \frac{1}{k}\right| \geq 2$$

כלומר, עבור k שלילי $k + \frac{1}{k} \leq - 2$ עם שויון רק עבור $k = - 1$.

כדוגמא לשמוש באי השויון $k + \frac{1}{k} \geq 2$ נניח כי קונה מעונין לקנות 2 ק"ג תפוזים. המאזניים העומדות לרשות המוכר הן בעלות זרועות לא שוות בארכים $L_1<L_2$ ולכן השקילה נעשית לפי השטה הבאה:

המוכר מניח משקולת של 1 ק"ג בצד ימין ותפוזים בצד שמאל עד שנוצר מצב של שווי משקל, אחר כך הוא מעביר את המשקולת לצד שמאל ושוקל תפוזים בצד ימין. ברור שבשקילה אחת נשקלים יותר מק"ג תפוזים ובאחרת פחות.

<u>תרגיל 1</u> : האם המשקל האמיתי של התפוזים שיקבל הקונה הוא גדול, שוה או קטן מ 2 ק"ג?

<u>II. ממוצעים נוספים</u>

ממוצעים נוספים בעלי חשיבות הם הממוצע ההרמוני,

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} ,$$

והממוצע הרבועי

$$R = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

את אי השוויון שהכרנו בסעיף הקודם, נתן לשכן בשרשרת

$$a \le H \le G \le A \le R \le b$$

כלומר

$$a \le \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le b$$

כאשר שוויונות מתקבלים אך ורק אם $a=b$.

לפני שנוכיח את אי השוויונות, נציין כי הממוצע הרבועי מופיע, למשל בסטטיסטיקה ונביא מספר דוגמאות לשמוש במושג הממוצע ההרמוני.

א. אוטובוס עבר 100 ק"מ במהירות 100 קמ"ש$=v_1$ ועוד 100 ק"מ במהירות 50 קמ"ש$=v_2$. מהי מהירותו הממוצעת?

קל לבדק שאם האוטובוס עבר s ק"מ במהירות a קמ"ש ועוד s ק"מ במהירות b קמ"ש אזי זמן הנסיעה הכולל הוא

$$t_1 + t_2 = \frac{s}{a} + \frac{s}{b}$$

והמהירות הממוצעת היא

$$\frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

כלומר הממוצע ההרמוני של שתי המהירויות במקרה שלנו

$$\frac{2}{\frac{1}{100} + \frac{1}{50}} = 66\frac{2}{3} \text{ קמ"ש}$$

כפי שנוכיח, ממוצע זה קטן לא רק מהממוצע החשבוני אלא אפילו מהממוצע ההנדסי של המהירויות, ובמיוחד אינו שוה לאף אחד מהם.

ב. ידוע שאם מחברים במקביל שני מוליכים בעלי התנגדויות R_1 ו R_2 אז התנגדותם השקולה נתונה ע"י

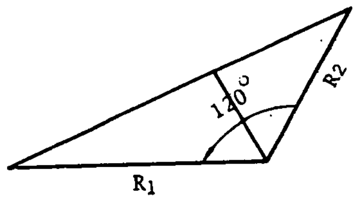
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

כלומר

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

מחצית הממוצע ההרמוני של R_1 ו R_2.

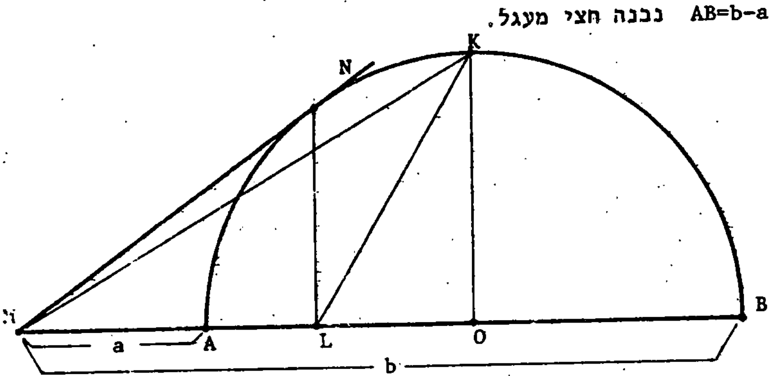
תרגיל 2 : נתון משולש בעל צלעות R_1 ו R_2 וביניהן זוית 120^0.



הוכח כי ארך חוצה הזוית הוא מחצית הממוצע ההרמוני בין R_1 ו R_2.
דבר זה משמש לשיטה גרפית נוחה למציאת התנגדות שקולה.

נוכיח עכשיו את שרשרת אי השויונות בין הממוצעים השונים.

על הקטע $AB=b-a$ נבנה חצי מעגל.



תהיה M נקודה בהמשך הקטע כך ש $AM=a$ ו $MB=b$ ויהיה MN משיק למעגל שמרכזו ב O. יהיה OK רדיוס הנצב ל AB. אזי

$$OK = ON = \frac{b-a}{2}$$

נוריד אנך מהנקודה N על הקטע AB ונסמן ב L את הנקודה שנתקבלה. לפי הבניה

$$MO = \frac{a+b}{2} = A$$

גם לשאר הממוצעים יש משמעות גאומטרית ברורה. לפי המשפט על המשיק (MN) וקו חותך (MB) שיוצאים מנקודה חיצונית למעגל (M),

$$MN^2 = MA \cdot MB = ab$$

כלומר

$$MN = \sqrt{ab} = G$$

המשולש Δ KOM הוא ישר זוית ולכן לפי משפט פיתגורס

$$MK = \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = R$$

מהמשפט על קטעים פרופורציוניים במשלש ישר הזוית ΔMNO נובע כי

$$MN^2 = ML \cdot MO$$

נציב בשויון זה

$$MO = \frac{a+b}{2} \ , \quad MN = \sqrt{ab}$$

ונקבל

$$(\sqrt{ab})^2 = ML \ \frac{a+b}{2}$$

$$ML = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = H$$

כלומר

$$ML = H \ , \ MN = G \ , \ MO = A \ , \ MK = R$$

מעיון בסדרת המשולשים ישרי הזוית בשרטוט ברור כי כאשר $a<b$

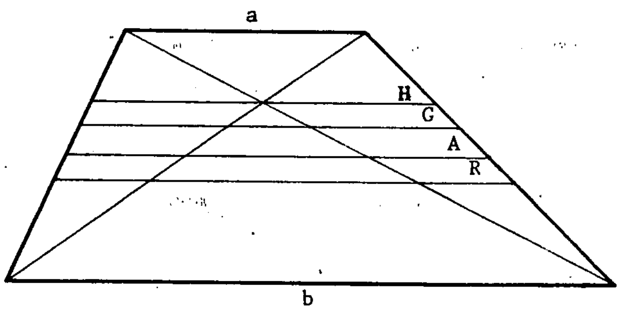
$$a < ML < MN < MO < MK < b$$

כלומר

$$a < H < G < A < R < b$$

נעיר כי בשטה זו אי אפשר לטפל במקרה השויון $a=b$ כי המעגל מתכון לנקודה. מהדיון הקודם נובע כי אם $a \neq b$ אזי כל ארבעת הממוצעים שונים זה מזה. במקרה $a=b$ מטפלים לחוד ורואים בקלות שאז כל הממוצעים שוים ל a.

מנדל נח לחקירת הממוצעים בין a ו b הוא טרפז אשר בסיסיו הם a ו b.



תרגילים:

3. הראה ש $A = \frac{a+b}{2}$ הוא קטע האמצעים של הטרפז.

4. הראה ש $G = \sqrt{ab}$ הוא קטע המקביל לבסיסים ומחלק את הטרפז לשני טרפזים דומים.

5. הראה ש $H = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ הוא הקטע המקביל לבסיסים ועובר דרך נקודת החתוך של האלכסונים.

6. הראה ש $R = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ הוא קטע המקביל לבסיסים ומחלק את הטרפז לטרפזים שוים בשטחם.

7. הסק כי $H \le G \le A \le R$ וכי הממוצעים שונים זה מזה אם $a<b$.

במקרה של שויון $a=b$ הטרפז הופך למקבילית ואז כל הממוצעים שוים.

III. ממוצע חשבוני וממוצע הנדסי של n מספרים.

יהיו $a_1, \ldots, a_n$ מספרים אי שליליים, הממוצע החשבוני שלהם מוגדר כ

$$A = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

והממוצע ההנדסי שלהם מוגדר כ

$$G = (a_1 \ldots a_n)^{1/n}$$

כשגם כאן הכונה בשרש היא למספר האי שלילי המתאים.

אי השויון $G \le A$ שהוכח בסעיף הראשון נכון גם עבור ממוצעים של n מספרים אי שליליים.

משפט 1. יהיו $a_1, \ldots, a_n$ מספרים אי שליליים, אזי

$$G = (a_1 \ldots a_n)^{1/n} \le \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = A$$

שויון $G = A$ קיים אם ורק אם

$$a_1 = \ldots = a_n$$

למשפט זה יש הוכחות רבות המתוארות במאמרים ובספרים הנזכרים בסוף המאמר. אחת מהן היא הבאה:

אם כל ה- a_i שווים ל- A אזי ברור כי $A=G$. אחרת יש לפחות אחד מהם, נאמר a_1 שהוא גדול מ- A ושני, נאמר a_2, קטן מ- A. נגדיר

$$b_1=A, \quad b_2=a_1+a_2-A$$

ונעיין בקבוצה $b_1,b_2,a_3, \ldots ,a_n$, ברור כי

$$b_1+b_2+a_3+ \ldots +a_n = a_1+a_2+a_3 \ldots +a_n$$

מאידך

$$\frac{b_1b_2a_3a_4 \ldots a_n}{a_1a_2 \ldots a_n} = \frac{b_1b_2}{a_1a_2} = \frac{A(a_1 + a_2 - A)}{a_1a_2}$$

קל להוכיח כי מנה זו גדולה מ-1 כאשר $a_1>A>a_2$. חוזרים על תהליך זה עד שמקבלים קבוצה אשר כל איבריה שווים ל-A. ברור כי תהליך זה מסתיים לכל היותר אחרי n-1 פעמים ובסיומו מקבלים ממוצע הנדסי שהוא מצד אחד גדול מ-G ומאידך הוא שווה ל-A.

משפט 1 שקול לעקרונות הבאים המאפשרים לפתר בעיות מינימום-מכסימום בצורה פשוטה ויעילה.

א. אם סכום של n משתנים אישליליים $x_1,\ldots,x_n$ קבוע אז מכפלתם מקבלת ערך מכסימלי אם ורק אם כל המשתנים שוים.

ב. אם המכפלה של n משתנים אישליליים קבועה אז סכומם מקבל ערך מינימלי אם ורק אם כל המשתנים שוים.

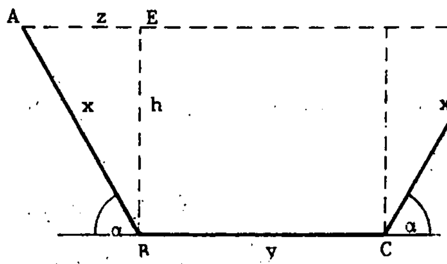
כאשר $n=2$ יש למשפטים פרוש גאומטרי ברור.

א. בין כל המלבנים בעלי היקף קבוע, לרבוע יש שטח מכסימלי.

ב. בין כל המלבנים בעלי שטח קבוע, לרבוע יש היקף מינימלי.

כדוגמא לשמוש בעקרון (א) נטפל בבעיה הבאה:

נתון קטע בארך a. יש לקפל אותו משני הצדדים בגדל x ובזוית α, כך ששטח הטרפז (הפתוח למעלה) שיתקבל יהיה מכסימלי. למצא את x ו α האופטימליים.



פתרון: נסמן את גבה הטרפז ב h ואת שטחו ב S. נסמן

$y = BC \quad , \quad z = AE$

אזי $y + 2x = a$ קבוע ו

$$S = (y+z)h = (y+z)\sqrt{x^2 - z^2}$$

$$S = \sqrt{(y+z)(y+z)(x-z)(x+z)}$$

כיון ש $S>0$ מספיק לקבע את x,y,z כך שמכפלת ארבעת הגורמים

$$S^2 = (y+z)\ (y+z)\ (x-z)\ (x+z)$$

תהיה מכסימלית.

כאן סכום ארבעת הגורמים איננו קבוע ועדין אי אפשר להשתמש בעקרון (א).

כדי להתגבר על כך נכפל את הגורם השלישי ב 3 ונקבל

$$3S^2 = (y+z)\ (y+z)\ (3x-3z)\ (x+z)$$

כאשר מכפילים פונקציה במספר חיובי קבוע הערך המכסימלי המבוקש מכפל באותו מספר אבל המשתנים עבורם מתקבל המכסימום אינם משתנים. את המכסימום של הפונקציה $3S^2$ קל למצא כי הפעם סכום ארבעת הגורמים הוא קבוע

$$(y+z) + (y+z) + (3x-3z) + (x+z) = 2y + 4x = 2a$$

לפי עקרון (א), המכסימום מתקבל כאשר ארבעת הגורמים שוים זה לזה

$$y+z = 3x-3z$$

$$y+z = x+z$$

כלומר $x = y = 2z$

ולכן $\alpha = 60^0 \quad , \quad x = \frac{a}{3}$.

נשמח לפרסם פתרונות אחרים של הקוראים.

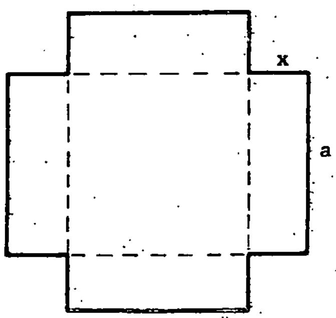
נסים סעיף זה ב

תרגיל 8. נתון רבוע בעל צלע בארך a.

בכל פנה של הרבוע גוזרים רבוע קטן שארכו x.

את הצורה שנשארה מקפלים לפי הקוים המקוקוים ומקבלים תבה פתוחה למעלה.

לקבע את x כך שנפח התבה יהיה מכסימלי.



המשך המאמר יפורסם בגליון הבא.

מובאות

1. משפט הממוצעים וייעול המכבסה. גליונות מתמטיקה, כרך 6 מס' 2, 1976.
2. א. ברמן, תכנון אופטימלי בעזרת אי השויון בין הממוצע החשבוני והממוצע ההנדסי. אתגר מס' 3, 1978.
3. E.F. Beckenbach and R. Bellman, An Introduction to Inequalities, New Mathematical Library, The Mathematical Association of America, 1961.
4. E.F. Beckenbach and R. Bellman, Inequalities, Springer-Verleg Berlin, Heidelberg, New York, 1971.
5. G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Polya, Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1934.
6. N.D. Kazarinoff, Geometric Inequalities. New Mathematical Library, The Mathematical Association of America, 1961.

* * * *

פתרון בעיות מגליון מס' 1

לצערנו לא קבלנו פתרונות רבים, אולי בגלל שהזמן שנתן לפותרים היה קצר מדי. בין הפתרונות נציין את פתרונותיהם של פאול בירן, כתה י ביה"ס הריאלי בחיפה ושל עמנואל אלון, צה"ל.

1. כל אחד מהמספרים $x_1, x_2, \dots, x_n$ שוה ל $+1$ או -1. הוכח שאם

$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + \dots + x_nx_1x_2x_3 = 0$$

אזי n מתחלק ב 4.

פתרון: נסמן $y_k = x_kx_{k+1}x_{k+2}x_{k+3}; k=1, \dots, n-3$

$$y_{n-2} = x_{n-2}x_{n-1}x_nx_1\ ,\ y_{n-1} = x_{n-1}x_nx_1x_2,$$

$$y_n = x_nx_1x_2x_3.$$

כל המספרים y_k שוים ל ± 1. נניח כי α מביניהם שוים ל 1 ו β ל -1. יוצא כי

$$\alpha \cdot 1 + \beta\cdot(-1) = 0$$

ולכן $\alpha = \beta$, דהיינו $n = 2\beta$. מאידך

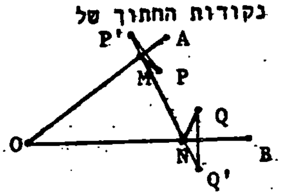
$$(-1)^{\beta} = \prod_{i=1}^{n} x_i = (x_1 x_2 \dots x_n)^4 = +1$$

ולכן β זוגי ו n מתחלק ב 4.

* * *

2. בתוך הזוית ∢AOB נתונות שתי נקודות P ו Q. מצא נקודה M על OA ו N על OB כך ש PM+MN+NQ יהיה מינימלי.

<u>פתרון</u>: תהיה P' הנקודה הסימטרית ל P ביחס ל OA ותהיה Q' הנקודה הסימטרית ל Q ביחס ל OB. הנקודות M ו N המבוקשות הן נקודות החתוך של הישר בין P' ו Q' עם OA ו OB בהתאמה.



* * *

3. נתון תחום במישור ששטחו גדול מ 1. הוכח שיש בו שתי נקודות שונות (x_1,y_1) ו (x_2,y_2) כך ש x_1-x_2 ו y_1-y_2 הם מספרים שלמים.

<u>פתרון</u>: ראה המאמר "עקרון שובך היונים - נוסח גיאומטרי" בגליון זה.

* * *

4. הוכח שלכל קבוצה של $2n-1$ מספרים שלמים יש תת קבוצה של n מספרים שסכום איבריה מתחלק ב n.

<u>פתרון</u>: הפתרון הוא ארוך ולכן נחלק את ההוכחה לשלשה חלקים. נשמח לקבל פתרונות קצרים יותר.

א. נראה שדי להוכיח את הטענה במקרה ש n הוא מספר ראשוני. לשם כך נראה שאם הטענה נכונה עבור p ועבור q אז היא נכונה עבור pq. נניח אם כך שבכל קבוצה של $2p-1$ מספרים יש p מספרים שסכומם מתחלק ב p ושבכל קבוצה של $2q-1$ מספרים יש q מספרים שסכומם מתחלק ב q ונראה שבכל קבוצה של $2pq-1$ מספרים יש pq מספרים שסכומם מתחלק ב pq.

יהיו $a_1, \dots, a_{2pq-1}$

מספרים שלמים. נסמן

$$S_1 = \{a_1, \dots, a_{2p-1}\}$$

לפי ההנחה יש ב S_1 p מספרים $b^1_1, \dots, b^1_p$ שסכומם מתחלק ב p. נסמן

סכום זה ב b_1p.

יהיו $c^1_1, \dots, c^1_{p-1}$ שאר האיברים של S_1. נסמן

$$S_2 = \{c^1_1, \dots, c^1_{p-1}, a_{2p}, \dots, a_{3p-1}\}$$

ב S_2 יש p איברים, $b^2_1, \dots, b^2_p$ שסכומם, b_2p, מתחלק ב p. יהיו

שאר האיברים ב S_2 , $c^2_1, \dots, c^2_{p-1}$ ונגדיר קבוצה חדשה

$$S_3 = \{c^2_1, \dots, c^2_{p-1}, a_{3p}, \dots, a_{4p-1}\}$$

בצורה כזו נמשיך ונגדיר קבוצות $S_4, \dots, S_{2q-1}$ כש

$$S_{2q-1} = \{c^{2q-2}_1, \dots, c^{2q-2}_{p-1}, a_{(2q-1)p}, \dots, a_{2qp-1}\}$$

בכל אחת מהקבוצות $S_i \; ; \; i = 1, \dots, 2q-1$ יש קבוצה של p איברים

$b^i_1, \dots, b^i_p$ שסכומם b_ip הוא כפולה של p. לפי ההנחה יש בין המספרים

$b_1, \dots, b_{2q-1}$ q מספרים, נאמר $b_{i_1}, \dots, b_{i_q}$ שסכומם מתחלק ב q,

לכן סכום pq המספרים $b^{i_1}_1, \dots, b^{i_1}_p, \dots, b^{i_2}_1, \dots, b^{i_2}_p, \dots, b^{i_q}_1, \dots, b^{i_q}_p$

מתחלק ב pq. מ.ש.ל.

ב. יהיה עכשיו p מספר שלם (לאו דוקא ראשוני). תהיה

$T = \{a_1, \dots, a_{2p-1}\}$ קבוצת $2p-1$ מספרים שלמים ונסמן

$$T_i = \{ x \in T \; ; \; x \equiv i \pmod p\}$$

נוכיח שאם העצמה של כל הקבוצות T_i קטנה מ p (או אפילו מ $p+1$)

אז ניתן לחלק את איברי T לזוגות

$$\{x_1,y_1\}\ ,\ \{x_2,y_2\}\ ,\ \dots\ ,\ \{x_{p-1},y_{p-1}\}$$

ולאיבר בודד z כך ש $x_i \not\equiv y_i \pmod p$; $i=1, \dots ,p-1$.

(ברור שאם יש קבוצה T_i המכילה לפחות p איברים אז סכום איברים אלה מתחלק ב p).

כדי להוכיח את הטענה של חלק (ב) נבחר קבוצה T_i שעצמתה מירבית (יתכן שיש מספר קבוצות כאלו) ונוציא ממנה איבר x_1. מאחת הקבוצות האחרות נוציא איבר y_1. נבחר עכשיו קבוצה שעצמתה מירבית (לאחר הוצאת x_1 ו y_1). נוציא ממנה איבר x_2 ומאחת הקבוצות האחרות איבר y_2. תהליך זה יסתיים כאשר כל "הקבוצות האחרות" הן ריקות. נניח שהתהליך מסתיים לאחר שנבחרו k זוגות כש $k<p-1$, פרוש הדבר הוא שבקבוצה ממנה הוצא x_1 יש $2p-1-k$ איברים, כלומר מעל p איברים. לכן אם בכל הקבוצות T_i יש פחות מ p איברים (או אפילו p) ניתן לבחור $p-1$ זוגות $\{x_i,y_i\}$ כמבוקש.

ג. נוכיח לסיום שאם p הוא ראשוני אז בין המספרים $a_1, \dots ,a_{2p-1}$ יש p מספרים שסכומם מתחלק ב p.

נגדיר קבוצות T_i כמו בחלק (ב). אם יש T_i שעצמתה $\geq p$, אז סכום כל p איברים שלה מתחלק ב p. אחרת, נבחר

$$\{x_i,y_i\}\ ;\ i=1, \dots ,p-1$$

כש

$$x_i \not\equiv y_i \pmod p$$

נוכיח שבין 2^{p-1} הסכומים

$$\sum_{i=1}^{p-1} z_i \quad ; \quad z_i \in \{x_i\ ,\ y_i\}$$

יש סכום שמתחלק ב p.

נוכיח באנדוקציה ש 2^k הסכומים $(1 \le k \le p-1)$

$$\sum_{i=1}^{k} z_i \; ; \; z_i \in \{x_i \; ; \; y_i\}$$

מקבלים (לפחות) $k+1$ ערכים שונים מודולו p. עבור $k=1$, מתקבלים 2 ערכים כי $x_1 \not\equiv y_1 \pmod p$,

נניח שהטענה נכונה עבור 2^{k-1} הסכומים $\sum_{i=1}^{k-1} z_i$

ושסכומים אלה מקבלים (לפחות) k ערכים $d_1, \dots, d_n$ השונים מודולו p.

אם 2^k הסכומים $\sum_{i=1}^{k} z_i$ מקבלים k ערכים בלבד אז המספרים

$$\{d_1 + x_k \, , \, \dots \, , d_k + x_k\}$$

שוים מודולו p (אולי בשנוי סדר) למספרים

$$\{d_1 + y_1; \, \dots \, , d_k + y_k\}$$

אבל אז

$$\sum_{i=1}^{k} d_i + k\,x_k \equiv \sum_{i=1}^{k} d_i + k\,y_k \pmod p$$

כלומר $k\,(x_k - y_k) \equiv 0 \pmod p$

אבל $x_k \not\equiv y_k \pmod p$

ו $k<p$ וזו סתירה לראשוניות של p. בפרט, עבור $k=p-1$, 2^{p-1} הסכומים $\sum_{i-1}^{p-1} z_i$ מקבלים (לפחות ולכן בדיוק) את כל p הערכים האפשריים מודולו p,

לכן ~~עבור כל k מתקבלים בדיוק k+1 ערכים שונים מודולו p~~ והסכומים של p איברים, $z + \sum_{i=1}^{p-1} z_i$ מקבלים את כל הערכים האפשריים מודולו p. מסקנה זו מסיימת את הוכחת חלק (ג) ואת פתרון התרגיל.

תחרות הבעיות

הוראות לפותר:

כתוב בכתב יד ברור ונקי ובצידו האחד של הדף.

את הפתרונות יש לשלח עד ליום 31.12.85 לפי הכתובת: מערכת "אתגר-גליונות מתמטיקה", הפקולטה למתמטיקה, הטכניון, חיפה 32000, ולציין את שם הפותר, שם בית הספר (או צה"ל) והכתה בה הוא לומר. נתן לשלח גם פתרוננות חלקיים. שמות הפותרים יפורסמו, ובין הפותרים המצטיינים יוגרל פרס.

* * *

7. (הוצעה ע"י ב.פ.) מצא את כל הפתרונות הממשיים של $3^x + 4^x = 5^x$.

* * *

8. כמו תרגיל מס' 8 במאמר על אי שויונות בין ממוצעים בגליון זה, כאשר במקום רבוע נתון מלבן שצלעותיו a ו b.

* * *

9. הוכח שבכל קבוצה של n מספרים שלמים יש תת קבוצה לא ריקה (היכולה להיות הקבוצה כולה) שסכום איבריה מתחלק ב n.

* * *

10. מטריצה ממשית מסדר $m \times n$ היא טבלה של mn מספרים ממשיים, מסודרים ב m שורות ו n עמודים

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

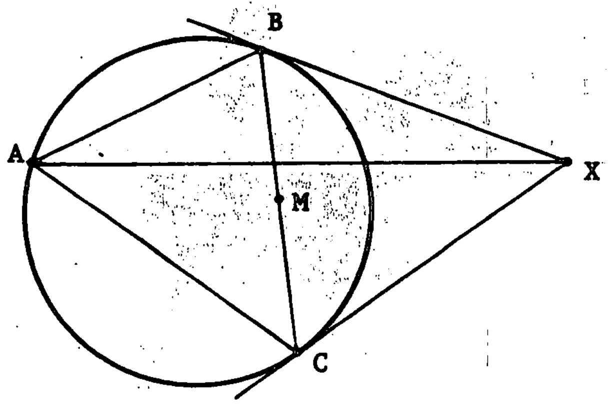
"פעולות מותרות" על מטריצה, הן כפל כל האיברים של שורה שלה ב 1-
או כפל כל האיברים של עמוד שלה ב 1-.

ע"י פעולה מותרת כזו מקבלים מטריצה חדשה. הראה שע"י סדרה סופית של פעולות מותרות נתן לקבל מטריצה שבה סכומי האיברים בכל שורה וסכומי האיברים בכל עמוד הם אי-שליליים.

* * *

11. (הוצעה ע"י אורי גנור). משולש Δ ABC חסום במעגל. המשיקים למעגל ב B ו C נפגשים בנקודה X. M היא נקודת האמצע של BC.

הוכח כי $\sphericalangle$ CAX = $\sphericalangle$ BAM



* * *

12. בפרדס בצורת עגול ברדיוס 50 שמרכזו בראשית הצירים נטועים עצים בכל אחת מנקודות השריג, פרט לראשית. כל עץ כזה הוא גליל ברדיוס r כשמרכז המעגל הוא נקודת השריג.
הוכח כי אם $r > \frac{1}{50}$ אז לא נתן לראות מהראשית את הנעשה מחוץ לפרדס.
(ראה המאמר על שובך יונים - נוסח גאומטרי בגליון זה).