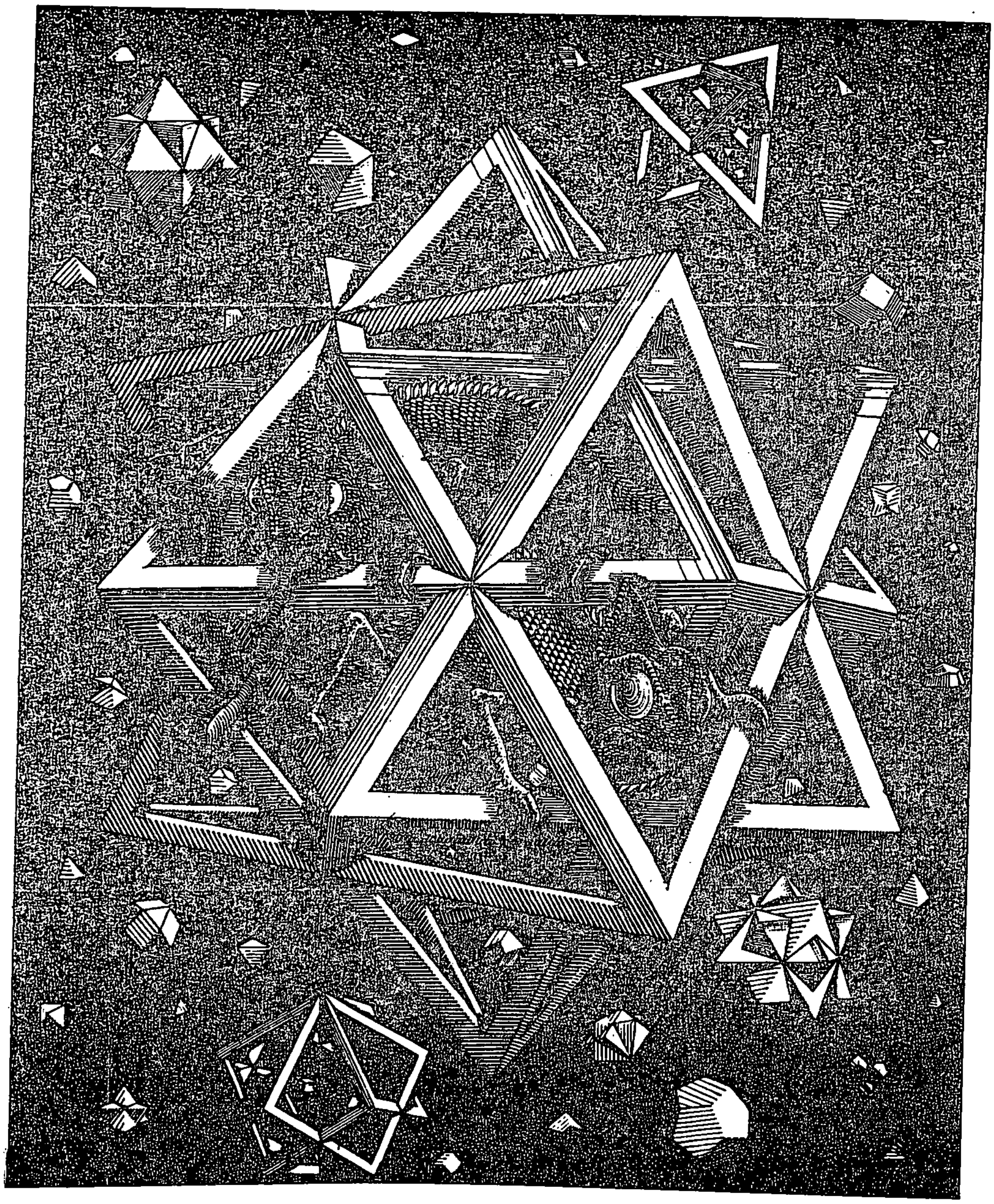
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס' 11 ספרית הוראת המדעים תמוז תשמ"ח - יוני 1988



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון ויצמן
רחובות

בתמיכת המרכז המדעי י.ב.מ. ישראל

דבר - המערכת

מאמרו של פרופ' בנימיני, הפותח את הגליון הוצג ב"אתגר בע"פ" שנערך בטכניון בערב פסח. באותו מפגש, בו נפגשו רבים מקוראי העתון עם אנשי סגל בפקולטה למתמטיקה בטכניון, הציג ולדימיר גרשוביץ מהאוניברסיטה העברית בעיה העוסקת בשטח של חתך מישורי בארבעון. בעיה זו היא אחת מקבוצה של "בעיות יהודיות" - בעיות קשות במיוחד שנתנו בבחינת כניסה באוניברסיטת מוסקוה למועמדים יהודים. ולדימיר גרשוביץ ופרופ' אלכסנדר יופה, מסורב עליה שהצטרף לפני מספר חדשים לסגל הפקולטה למתמטיקה בטכניון מתארים את ספורן של בעיות אלו. בעית החתך הוצגה בבית-הספר שליד האוניברסיטה, ע"י בוריס קנייבסקי, גם הוא מסורב עליה שעלה לאחרונה מבריה"מ. הבעיה נפתרה שם ע"י אילון לנדנשטראוס. פתרונו ופתרונות אחרים מתוארים במאמר שלו ושל בוריס קנייבסקי. פתרונו של אילון הוצג בטכס חלוקת הפרסים לזוכים באולימפיאדה ע"ש פרופ' גרוסמן שהתקיימה בטכניון. כיון שהגליון שלפנינו הוא האחרון השנה אנו מפרסמים בו את השאלות ואת הפתרונות. לקוראים שלא ראו את השאלות מוצע לנסות לפתר אותן לפני העיון בפתרונות. הקוראים שהשתתפו בתחרות מוזמנים לזהות עצמם בצלום המצורף. אנו מביאים גם את הפתרונות לאולימפיאדה שנערכה במכון וייצמן ואם באולימפיאדות אנו עוסקים, נברך את חברי נבחרת ישראל היוצאים לאולימפיאדה הבינלאומית באוסטרליה. לפני שנעבור לחוברת גופא נזכיר גם את מאמרו של ד"ר קורן על קואורדינטות בריצנטריות החותם את סדרת מאמריו בנושא הוקטורים ובציין כי בשנת תשמ"ט תהיה כתובת המערכת במכון וייצמן. "תחרות הבעיות" תתחדש בצורה יותר תחרותית כאשר לשאלות יינתן נקוד ושמות הפותרים יפורסמו.

בחוברת זו אנו מסתפקים בבעיה חדשה אחת. את הפתרונות לה ול"בעיות היהודיות" במאמר של גרשוביץ ויופה אתם מתבקשים לשלח למערכת בטכניון.

לחוברת מצורף דף ובו מספר טפסי הרשמה לשנה הבאה. תוכלו להשתמש באחד הטפסים לחדש את מנויכם ולחלק את שאר הטפסים לחברים שעדיין אינם מנויים.

אנו מאחלים לכם הצלחה בבחינות וחופשה נעימה!

מספרים טרנסצנדנטיים

פרופ' י. בנימיני, הטכניון

המספר c נקרא אלגברי, אם הוא שרש של המשוואה $f(x)=0$ כאשר $f(x) = a_o + a_1x + \dots + a_nx^n$ פולינום שכל מקדמיו (כלומר המספרים $a_o,\dots,a_n$) שלמים. המספר c נקרא טרנסצנדנטי אם אינו אלגברי, כלומר, אם אין אף פולינום $f(x)$ עם מקדמים שלמים כך ש $f(c)=0$.

מטרתנו בהרצאה זו תהיה להראות שקיימים מספרים ממשיים טרנסצנדנטיים, כלומר, שלא כל מספר ממשי הוא שורש של משוואה פולינומיאלית עם מקדמים שלמים. אך תחילה נדון במספרים רציונליים ואי-רציונליים.

המספר c נקרא רציונלי אם יש לו הצגה כשבר p/q כאשר p,q שלמים. נוכל לאמר זאת גם בדרך אחרת שתבהיר איך המספרים האלגבריים מהווים הרחבה של הרציונליים: המספר c הוא רציונלי אם הוא שרש של משוואה ממעלה ראשונה עם מקדמים שלמים. (ואכן $c=p/q$ הוא שרש של המשוואה $qx-p=0$).

האם יש מספרים ממשיים שאינם רציונליים? נתאר שתי גישות שונות כדי להראות שאכן זה כך.

הגישה הראשונה היא להצביע על מספר מוכר, ולהוכיח שאכן איננו רציונלי: נדגים גישה זו בהוכחה ש $\sqrt{2}$ איננו רציונלי. (אך נשים לב שהוא אלגברי! הוא שרש של המשוואה $x^2-2=0$).

נניח בשלילה כי $\sqrt{2}$ רציונלי ונציגו בצורה $\sqrt{2}=p/q$ כאשר p,q שלמים, ונוכיח כי הן p והן q חייבים להיות זוגיים. וזו תהיה כמובן

סתירה מכיון שלכל מספר רציונלי יש הצגה כשבר מצומצם כשלמונה ולמכנה אין גורם משותף.

ע"י העלאה ברבוע והעברה באגפים נקבל כי $p^2=2q^2$, כלומר p^2 זוגי.

אך מכך ש p^2 זוגי נובע שגם p זוגי (הוכח!).

נציג אם כן $p=2k$ כש k שלם ונקבל כי $2q^2=p^2=(2k)^2=4k^2$ או

$q^2=2k^2$, ולכן גם q^2 זוגי, ומכאן שגם q זוגי. מ.ש.ל.

כשנתון מספר מוכר, בד"כ קשה ואפילו קשה מאד לבדוק אם הוא רציונלי, או אי-רציונלי. בגישה השניה שנציג בעיה זו לא קיימת. בגישה זו אין מסתכלים במספרים מוכרים, אלא בונים מספר שיותר קשה לתארו אך הוא "תפור לפי מידה" כך שיהיה קל לראות שאיננו רציונלי.

לכל מספר ממשי יש פיתוח עשרוני. לשם פשטות נתאר מספרים שבין 0 ו 1, ואז תאורם העשרוני הוא

$$A=0.a_1a_2a_3\cdots$$

כאשר כל a_n הוא ספרה בין 0 ל 9. בד"כ ההצגה של A היא יחידה, פרט לאותם מספרים שיש להם פיתוח סופי ואז יש להם גם הצגה נוספת עם פיתוח אינסופי, למשל $0.23 = 0.22999\ldots$.

הספרה a_n במקום ה n בפיתוח מייצגת תוספת של $a_n/10^n$ למספר, ושבר עם פיתוח סופי $0.a_1\ldots a_k$ הוא לכן מספר רציונלי עם מכנה 10^k.

<u>הגדרה</u>: נאמר שהשבר העשרוני $0.a_1a_2\cdots$ הוא <u>מחזורי</u>, אם יש N ו-k טבעיים כך ש $a_n=a_{n+k}$ לכל $n>N$. כלומר, הספרות של המספר בנויות כולן, פרט ל N הספרות הראשונות, מחזרה מחזורית על k הספרות $a_{N+1},\ldots,a_{N+k}$.

לדוגמא, $0.1751\overset{\frown}{423}\overset{\frown}{423}\overset{\frown}{423}\ldots$ הוא שבר מחזורי, ונוכל לקחת למשל $k=3,N=4$.

משפט: מספר הוא רציונלי אם ורק אם פיתוחו העשרוני הוא מחזורי.

הוכחה: אנחנו רק נסקור את ההוכחה שאם A רציונלי אז פיתוחו העשרוני מחזורי. השלימו את הפרטים בהוכחה זו, ובדקו כתרגיל שגם ההפך נכון, ושאם הפיתוח העשרוני של A מחזורי אז A רציונלי.

נניח אם כן ש $A=p/q$ רציונלי ונבצע את החילוק של p ב q, ונבחין בשתי אפשרויות:

(א) באחד משלבי החילוק תתקבל שארית 0. במקרה זה הפיתוח של A בוודאי מחזורי. הספרה 0 חוזרת על עצמה החל ממקום מסויים.

(ב) אם המקרה הראשון איננו קורה, אז בכל שלב בחילוק מתקבלת שארית שהיא מספר בין 1 ל $q-1$. לכן, לכל היותר אחרי q שלבים של חילוק נקבל שארית שהופיעה כבר קודם לכן. נניח ששארית זו מתקבלת בשלב ה N ובשלב ה $N+k$ וערכה R. אבל אז הספרות בפיתוח שבמקום ה $N+1$ ו $N+k+1$ מתלכדות: הן פשוט מנת החילוק של $10R$ ב q. יתר על כן גם השאריות בשלב זה מתלכדות: זו השארית בחלוקת $10R$ ב q. לכן גם $a_{N+2}=a_{N+k+2}$ וכן הלאה. מ.ש.ל.

כעת נוכל לבנות מספרים אי-רציונליים בקלות רבה. כל מה שצריך הוא לבנות שבר עשרוני לא מחזורי! למשל $A=0.a_1a_2...$ כאשר $a_n=1$ אם n הוא רבוע שלם (כלומר $n=k^2$ לאיזשהו k) ו $a_n=0$ אם n איננו כזה. (בדקו כתרגיל שאכן זהו שבר לא מחזורי!).

נחזור עתה למספרים אלגבריים וטרנסצנדנטיים. האם כל מספר ממשי הוא אלגברי? התשובה שוב שלילית ואפשר להראות זאת בשתי הגישות שתארנו קודם. אפשר להצביע על מספרים שאינם אלגבריים, למשל e,π הם כאלה - אך ההוכחה קשה. (הטרנסצנדנטיות של e הוכחה ע"י Hermite ב-1873, ושל π ע"י Lindemann ב-1882).

אך ההוכחה הראשונה לקיום מספרים טרנסצנדנטיים ניתנה ע"י Liouville ב-1851 שבנה מספרים שקל (יחסית) להראות שאינם אלגבריים.

המרכיב הבסיסי בגישתו של Liouville הוא חקירת מידת הקרוב האפשרית של מספרים ע"י שבר רציונלי עם מכנה נתון q.

נסמן ב $H(q)$ את קבוצת כל המספרים הרציונליים שהמכנה שלהם הוא מספר שלם q נתון. כל מספר ממשי ניתן לקרוב ע"י מספר מ $H(q)$ עד כדי שגיאה שאינה עולה על $1/2q$. (המקרה הגרוע ביותר מתקבל כשמנסים לקרב מספר שהוא בדיוק באמצע בין שתי נקודות סמוכות ב - $H(q)$). אם נחפש קרובים טובים יותר מ $\frac{1}{2q}$, למשל $\frac{1}{q2}$ או $1/q^3$ נקבל, אם כך, שיש נקודות שאינן ניתנו לקרוב כה טוב ע"י אברי $H(q)$.

אך כעת נשנה את q וננסה לקרב מספרים ע"י אברים מתוך $H(q_1)$ כאשר $q \neq q_1$. המבנה של $H(q)$ הוא בד"כ שונה לחלוטין מזה של $H(q_1)$ ומספרים שהיו קרובים לנקודות $H(q)$ יכולים להיות רחוקים מנקודות $H(q_1)$ ולהפך. לכן בהחלט ייתכן שמספר שלא ניתן לקרוב טוב יותר מ $1/q^3$, למשל, ע"י אברי $H(q)$, כן ייתן לקרוב טוב יותר מ $1/q_1^3$ ע"י אברי $H(q_1)$.
האם יש מספרים שאינם ניתנים לקרוב טוב יותר מ $1/q^3$ ע"י אף $H(q)$? או באפן כללי יותר: נקבע מעריך $\alpha>1$ ומספר $M>0$ ונשאל האם יש מספר c שאינו ניתן לקרוב טוב יותר מ M/q^α ע"י אברי $H(q)$ לאף q? או, במלים אחרות, האם יש מספר c כך שלכל p,q שלמים יתקיים

$$\left|c - \frac{p}{q}\right| \geq M/q^\alpha$$

מתברר שיש מספרים כאלה:

משפט: (Liouville)

יהי c מספר אלגברי שאיננו רציונלי, אז יש מעריך $\alpha>1$ ומספר $M>0$ כך שלכל מספר רציונלי p/q יתקיים

$$|c - p/q| \geq M/q^{\alpha} \qquad (*)$$

נראה תחילה איך השתמש Liouville במשפט כדי לבנות מספר שאיננו אלגברי. נסתכל במספר $c=0.a_1a_2...$ המוגדר באפן הבא: $a_n=1$ אם $n=k^k$ עביר איזשהו k טבעי, ו $a_n=0$ אם n איננו מהצורה הזו. כלומר, התחלת הפיתוח של c היא

$$c = 0.100100000000000000000000000100...$$

(כאשר ה-1-ים מופיעים במקומות 1, $2^2=4$, $3^3=27$ וכו').

c בוודאי איננו רציונלי, כי פיתוחו העשרוני איננו מחזורי, ונראה שגם איננו אלגברי. אילו היה אלגברי אז ע"ס המשפט היינו יכולים למצוא $\alpha>1$ ו $M>0$ כך שהיה מתקיים $(*)$.

נקבע מספר טבעי k כה גדול עד ש $k-\alpha>1$ וגם $k>\log(2/M)$ ונראה מה התנאי $(*)$ אומר ביחס למספר הרציונלי p/q המתקבל מלקיחת k^k הספרות הראשונות בפיתוח העשרוני של c. זהו שבר שהמכנה שלו הוא

$q=10^{(k^k)}$. מאידך גיסא, $c - p/q$ הוא שבר עשרוני שבו כל הספרות עד למקום ה $(k+1)^{k+1}$ הן אפס, והספרה הראשונה השונה מאפס היא 1 המופיע במקום ה $(k+1)^{k+1}$ ולכן $0 < c - \frac{p}{q} < 0.0...02$ כאשר ה 2 מופיע במקום ה $(k+1)^{k+1}$, כלומר $|c - \frac{p}{q}| < 2/10^{(k+1)^{k+1}}$.

נציב את כל הנתונים האלה ב $(*)$ ונקבל כי

$$2/10^{(k+1)^{k+1}} > \left|c - \frac{p}{q}\right| \geq M/q^{\alpha} = M/10^{k^k\alpha}$$

נעביר באגפים ונקבל כי

$$2/M > 10^{(k+1)^{k+1}} - k^k\alpha > 10^{k^{k+1}} - k^k\alpha = 10^{k^k(k-\alpha)} \qquad (**)$$

אך $(**)$ איננו מתיישב עם בחירת $k!$ ואמנם $k-\alpha>1$ ו $k^k>k$

לכן מ $(**)$ נובע כי

$$2/M > 10^{k^k(k-\alpha)} > 10^k$$

וע"י לקיחת לוגריתמים נקבל סתירה לכך ש k נבחר כך שדווקא

$$\log(2/M) < k \ !$$

וסתירה זו מראה שאכן c איננו אלגברי.

נפנה כעת להוכחת משפט Liouville:

היות ו c אלגברי, הרי שיש פולינום $f(x) = a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$

עם מקדמים שלמים כך ש $f(c)=0$. והיות ו c אינו רציונלי, הרי שמעלת הפולינום, n, גדולה מ-1.

נבצע כעת מספר חישובים:

א) אם $x = \frac{p}{q}$ מספר רציונלי שאינו שרש של המשוואה $f(x)=0$,

אז בהכרח $|f(x)| \geq 1/q^n$.

ואמנם, כשנציב את $x=p/q$ בפולינום f, נוכל לקחת את q^n

כמכנה משותף למחוברים השונים שמתקבלים. היות וכל המקדמים

שלמים, נקבל כי $f(p/q)=m/q^n$ כאשר m שלם. אך m שונה מאפס

כי $f(p/q)\neq 0$, ולכן $|m|\geq 1$ ומתקיים גם $|f(p/q)|=|m/q^n|\geq 1/q^n$

ב) למשוואה $f(x)=0$ יש מספר סופי של שרשים, למעשה, היות ו-f

פולינום ממעלה n יש לו לכל היותר n שרשים. לכן נוכל למצוא

קטע קטן שמרכזו ב c ושבו אין למשוואה $f(x)=0$ אף שורש פרט

ל c עצמו. נסמן את קצות הקטע ב $c-b$ ו $c+b$.

ג) נראה שיש מספר קבוע $0<K$ כך שלכל x המקיים $c-b\le x\le c+b$

יתקיים $|f(x)|\le K|x-c|$.

ואמנם נזכור כי $f(c)=0$, ולכן

$$f(x) = f(x)-f(c) = (a_0+a_1x+\dots+a_nx^n)-(a_0+a_1c+\dots+a_nc^n)$$

$$= a_1(x-c)+a_2(a^2-c^2)+\dots+a_n(x^n-c^n)$$

נסתכל על מחובר אופייני בסכום הזה, כלומר $a_j(x^j-c^j)$ עבור

j מסויים, $1\le j\le n$ ונציג

$$a_j(x^j-c^j) = a_j(x-c)(x^{j-1}+x^{j-2}c+\dots+xc^{j-2}+c^{j-1})$$

היות ו x נמצא בין $c-b$ ל $c+b$ הרי ש $|x|\le|c|+b$

ולכן נקבל כי

$$|a_j(x^j-c^j)|\le|x-c|\,|a_j|((|c|+b)^{j-1}+(|c|+b)^{j-2}|c|+\dots+|c|^{j-1})$$

נסמן כעת ב K את סכום הבטויים

$|a_j|(|c|+b)^{j-1}+\dots+|c|^{j-1})$ שהתקבלו עבור כל ה - j - ים

האפשריים $(j=1,2,\dots,n)$ ונסכם את כל ההערכות שקבלנו ונקבל כי

$$|f(x)|\le|a_1(x-c)|+|a_2(x^2-c^2)|+\dots+|a_n(x^n-c^n)|\le|x-c|K$$

כפי שנטען.

כעת נוכל לסיים את הוכחת המשפט: כמעריך α נבחר את המספר n,

מעלת הפולינום f. כמספר M נבחר את הקטן שבין שני המספרים b ו $\frac{1}{K}$

שקבלנו בחישובים (ב) ו (ג) שלעיל.

נקבע כעת מספר רציונלי כלשהו p/q ונראה כי $(*)$ מתקיים עבורו.

נבחין בשני מקרים:

(1) p/q נמצא מחוץ לקטע שבין $c-b$ ו $c+b$. במקרה זה מרחקו
מ c גדול מ b, והיות ו $q\geq 1$ ו $M\leq b$ נקבל כי

$$|c-p/q|\geq b\geq M\geq M/q^{\alpha}$$

(2) אם p/q נמצא בתוך הקטע שבין $c-b$ ל $c+b$ נשתמש בחישוב
(ג) לעיל ונקבל כי $|f(p/q)|\leq K|c-p/q|$. אך ע"ס בחירת b
ב (ב) במקרה זה $f(p/q)\neq 0$ ולכן ע"ס החישוב (א)
$|f(p/q)|\geq 1/q^{n}$. נשווה את שתי ההערכות האלה ונשתמש בכך
ש $1/K\geq M$ ונקבל כי

$$|c-p/q| \geq |f(p/q)|/K \geq 1/q^{n}K \geq M/q^{n}$$

* * * * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * * *

הערכת השטח של חתך מישורי של פירמידה

אילון לינדנשטראוס, ביה"ס התיכון ליד האוניברסיטה העברית
ובוריס קנייבסקי, ירושלים

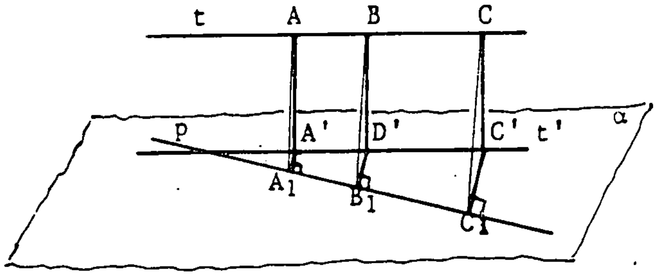
מאמר זה דן בשאלה המעניינת הבאה: האם תמיד נכון כי שטח חתך מישורי בפירמידה לא גדול משטח אחת מפיאותיה?

קל לראות כי משפט זה אינו נכון עבור פירמידות אשר בסיסן הוא מצולע בעל מספר צלעות גדול מ 3 (כדאי לבנות דוגמאות נגדיות). אם כך הבעיה מתיחסת רק לפירמידות משולשות - טטראדרים.

נציין כי חתך מישורי בטטראדר יכול להיות או משולש או מרובע (למה?). לחתך בצורת משולש התשובה החיובית לבעיה ניתנה מזמן. קיימות הרבה הוכחות, אחת מהן נביא בהמשך . לחתך מרובע, עד כמה שידוע למחברים, נתקבלה תוצאה אנאלוגית רק בשנת 1979 ועד כה טרם פורסמה. כיום קיימות מספר הוכחות לתוצאה זו. שתיים מהן נראות לנו יפות במיוחד. אחת מהן נתקבלה ב 1979 ע"י מתמטיקאי ממוסקוה בשם מקסים קונצביץ וללא שום קשר בשנת 1988 ע"י אילון לינדנשטראוס, תלמיד ירושלמי ואחד ממחברי המאמר הזה. הפתרון השני (היסטורית הוא הראשון) שייך לדויד ברנשטיין, שמצא אותו ב 1979. (הוא הוכיח אפילו משפט חזק יותר: שטח חתך מישורי מרובע בטטראדר אינו גדול משטח ההיטל של אחת הפיאות על מישור החתך.)

משפט I: שטח כל חתך משולש בטטראדר אינו גדול משטח אחת מפיאותיו.

למה I: נתונים שני ישרים מצטלבים במרחב p ו t, ומ 3 נקודות A,B,C (בסדר זה) על הישר t מורידים אנכים AA_1 , BB_1 , CC_1 אל הישר p. אזי $BB_1 < AA_1$ או $CC_1 > BB_1$ (איור 1).



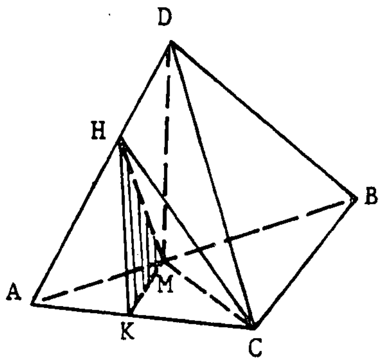
איור 1

הוכחה: מעבירים דרך הישר p מישור α המקביל לישר t, יהיו C',B',A' היטלי הנקודות B,A ו-C על המישור α בהתאמה. $AA'||BB'||CC'$, $t||t'$ ולכן $AA'=BB'=CC'$. כמו כן $A'A_1||B_1B'||C_1C'$ לפי משפט שלושת האנכים. ולכן $B'B_1<C'C_1$ או $B'B_1<A'A_1$. ממשפט פיתגורס נובע (מכיוון ש $AA'\perp A'A_1$ וכו') ש

$$BB_1<CC_1 \quad \text{או} \quad BB_1<AA_1$$

משו"ל

עתה נעבור להוכחת משפט I. יהי $ABCD$ טטראדר כלשהו, ו MHK חתך מישורי משולש שלו. (ראה ציור 2). נניח גם ש K איננו אחד מקודקודי הטטראדר. שטח ΔHMK קטן משטח ΔAHM או ΔHMC. זאת כי למשולשים ΔHMK , ΔHMA , ΔHMC יש צלע משותפת HM, ומשלושת האנכים היורדים מ A, K ו-C אל הישר HM, האנך היורד מ K, לפי למה I, קטן מהאנך היוצא מ A או מהאנך היורד מ C.

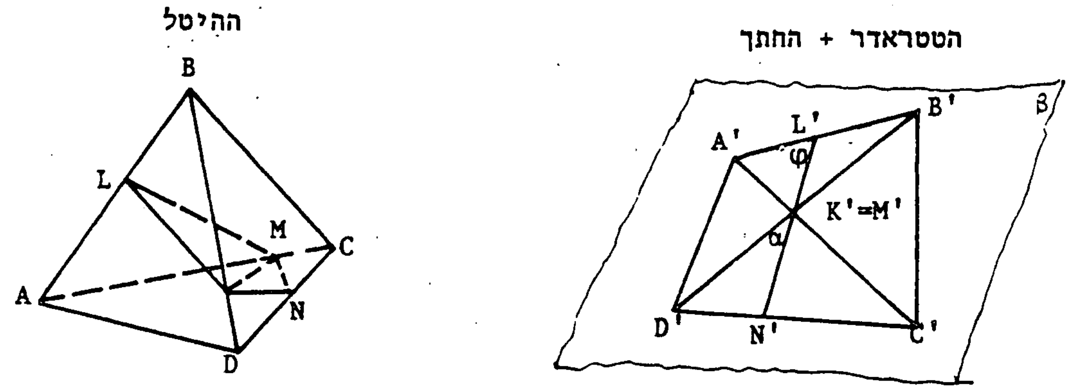


איור 2

לכן (מכיוון ששטח משולש = בסיס × גובה): $S_{\Delta MHK} < S_{\Delta MHC}$ או $S_{\Delta MHK} < S_{\Delta MHA}$. אם $S_{\Delta MHK} < S_{\Delta MHA}$ אז המשפט הוכח שכן ΔADB מכיל את ΔAMH.

אבל אם $S_{\Delta MHK} < S_{\Delta MHC}$ אז בצורה דומה (הפעם תוך שימוש ב ΔCMH והקטע MC): $S_{\Delta MHC} < S_{\Delta AMC}$ ו/או $S_{\Delta MHC} < S_{\Delta DMC}$.
שוב, אם $S_{\Delta MHC} < S_{\Delta AMC}$ המשפט הוכח שכן ΔABC מכיל את ΔAMC.
במקרה השני נשתמש בפרוצדורה זו ל ΔDMC והקטע CD. אז:
$S_{\Delta DMC} < S_{\Delta DBC}$ או $S_{\Delta DMC} < S_{\Delta DAC}$. בכל מקרה המשפט הוכח. מ.ש.ל.

<u>משפט II</u>: שטח חתך מרובע בטטראדר איננו גדול משטח אחת הפיאות.
נטיל (מלשון היטל) את הטטראדר $ABCD$ על מישור β הניצב לישר KM, הוא אלכסון החתך. לכל נקודה P במרחב נסמן ב P' את היטלה על מישור β (ראה איור 3).



<u>איור 3</u>

<u>למה II</u>: $L'N' \le \max(A'C', B'D')$.
לפני שנוכיח את למה II נראה קודם כיצד מלמה זו נובע משפט II.
הגבהים במשולשים $\Delta KMN, \Delta KLM$ היורדים אל KM מקבילים למישור β - ולכן הם שומרים על אורכם בהטלה. ולכן, לאור למה II נובע כי

$$S_{KLMN} = \frac{1}{2} KM(K'L' + K'N') = \frac{1}{2} KN \cdot L'N' \le$$

$$\le \frac{1}{2} KM \max(A'C', B'D') = \max (S_{\Delta AKC}, S_{\Delta BMD})$$

(שכן $S_{\Delta AKC} = S_{\Delta AMK}+S_{\Delta CMK}$, $S_{\Delta BMD} = S_{\Delta BMK}+S_{\Delta DMK}$).

ומכיוון ש $S_{\Delta AKC}$ ו $S_{\Delta BMD}$ הם חתכים משולשים של הטטראדר

ABCD נובע ממשפט I שמשפט II נכון.

עתה נוכיח את הלמה, ובכך נסיים את הוכחת המשפט:

נסמן $\alpha = \sphericalangle B'K'L' = \sphericalangle D'K'N'$ ונוכיח כי

$$\frac{d^2\,(N'L')}{d\alpha^2} > 0 .$$

במלים אחרות: כי הפונקציה $N'L'(\alpha)$ קמורה כלפי מטה. ברור שזה מוכיח את המשפט.

יהי $\alpha_0 = \sphericalangle K'B'A'$ ו h המרחק בין הישר $A'B'$ לנקודה K'

ו $\varphi = \sphericalangle A'L'K' = \alpha+\alpha_0$ אז (מכיוון ש $\varphi = \alpha + \text{const}$, $K'L' = \frac{h}{\sin\varphi}$):

$$\frac{d^2K'L'}{d\alpha^2} = \frac{d^2K'L'}{d\varphi^2} = h\left(\frac{1+\cos^2\varphi}{\sin^3\varphi}\right) > 0$$

כי $\pi > \varphi > 0$. באותה שיטה:

$$\frac{d^2N'K'}{d\alpha^2} > 0$$

ולכן

$$\frac{d^2N'L'}{d\alpha^2} > 0$$

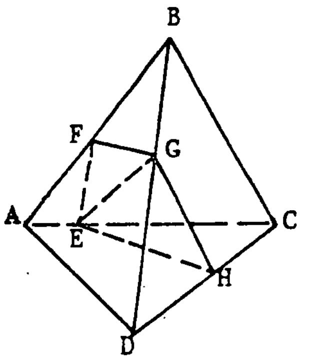
אבל אז הפונקציה $N'L'(\alpha)$ קמורה כלפי מעלה, כלומר הערכים שלה בתחום $(0,\sphericalangle B'K'L')$ קטנים יותר מערכה המקסימלי בקצות התחום הנ"ל.

ז"א $N'L' \le \max\,(B'D',A'C')$ מ.ש.ל

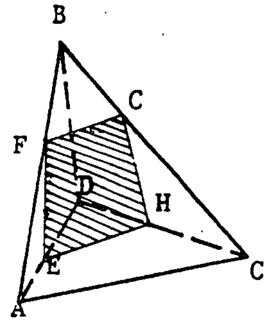
נוכיח עתה את חיזוק המשפט המוכח. הקורא יכול, כתרגיל, להוכיח שמשפט III נובע ממשפט II.

<u>משפט III</u>: החתך המרובע של טטראדר כלשהו איננו גדול בשטחו משטח היטל אחת הפיאות על מישור החתך.

הוכחה: יהיה ABCD טטראדר כלשהו, EFGH החתך שלו עם מישור β.
נטיל את נקודות הטטראדר על המישור β ונבחן את הצורה המתקבלת (איורים 6,5,4).
יש שתי אפשרויות: ההיטל של טטראדר ABCD הוא מרובע קעור (איור 4), או מרובע קמור (ציורים 5,6). אם היטל הטטראדר ABCD הוא מרובע קעור אזי החתך נמצא בתוך ההיטל של אחת הפיאות (במקרה שלנו ΔABC) והתוצאה מידית (איור 4).



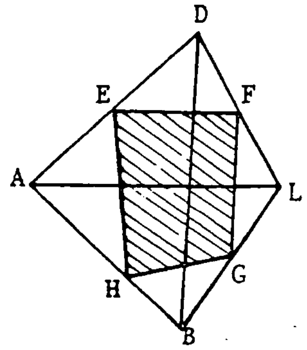
איור 5



איור 4

האפשרות השניה היא שהיטל ABCD על מישור β הוא מרובע קמור. נסמן אותו באותיות המקוריות ABCD. קודקודי החתך מונחים על שני זוגות של צלעות מצטלבות של הטטראדר (מדוע?) ולכן כמובן גם על היטליהן. אם זוג הצלעות המצטלבות BD,AC (ראה איור 5), שהיטליהן הם אלכסוני המרובע, מכיל שתי נקודות G,E של החתך, אז אם ניקח את הקטע EG (ציור 5) כבסיס, אזי האנך היורד מ F ל EG קטן מהאנך היורד מ A או מ B, וכנ"ל לנקודות H , D ו C. בכל מקרה נקבל מרובע המוכל באחד מההיטלים של הפאות ΔABC או ΔABD.

נשארה האפשרות האחרונה והיא כאשר כל קודקודי החתך הם על צלעות המרובע ABCD (איור 6). המקרה הזה הוא המסובך ביותר ונזדקק לשתי למות לפני שנתחיל בפתרון.



איור 6

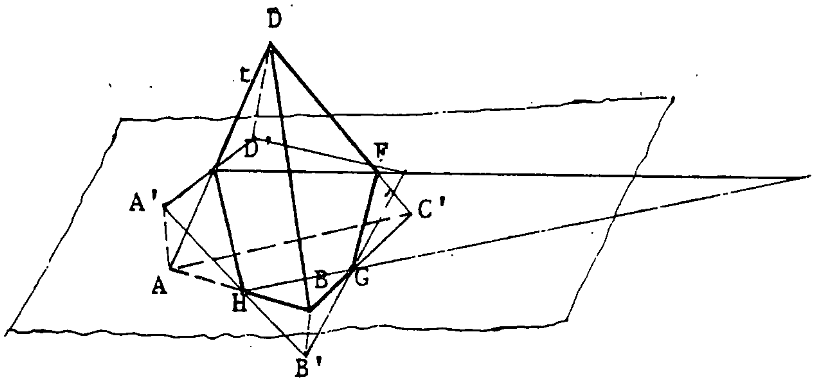
למה III (משפט מנלאוס לטטראדר):

אם EFGH הוא חתך מישורי (עם מישור β) של הטטראדר ABCD אזי:

$$\frac{DE}{AE} \cdot \frac{CF}{DF} \cdot \frac{BG}{CG} \cdot \frac{AH}{BH} = 1 \qquad (1)$$

הערה: משפט מנלאוס למשולש אומר שאם E,K ו H (בסדר זה) נקודות החיתוך של ישר כלשהו עם צלעות המשולש ΔABC (או המשכן) אזי נכון השיויון

$$\frac{AK}{DB} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CH}{AH} = 1 .$$ (נסו להוכיח!)



איור 7

הוכחה: נטיל את קודקודי הטטראדר על מישור β ו A',B',C',D' יהיו היטלים על המישור (ציור 7). אז יתקיים דמיון בין זוגות המשולשים הבאים:

$$\Delta AA'E \sim \Delta DD'E \ ; \ \Delta DD'F \sim \Delta DD'F \ ; \ \Delta CC'G \sim \Delta BB'C;$$

$$\Delta BB'H \sim \Delta AA'H$$

(הוכח כי המשולשים האלה אכן דומים). ולכן

$$\frac{AE}{DE} = \frac{AA'}{DD'} \ ; \ \frac{DF}{CF} = \frac{DO'}{CC'} \ ; \ \frac{CG}{BG} = \frac{CC'}{BB'} \ , \ \frac{BH}{AH} = \frac{BB'}{AA'} \qquad (2)$$

ע"י הכפלת השיוויונות אלו באלו ניתן לקבל את משפט מנלאוס לטטראדר.

נדגיש כי שיויון (1) בשמר גם אם נחליף את אורכי הקטעים בצורה ש (2)

לא ישתנה. למשל אם נחליף את AE ב A'E, DE ב D'E וכו'.
לכן, על מנת להקל על החישובים, ניתן להחליף את אורכי הקטעים
בשוויון (1) בערכים פרופורציונים בצורה הבאה:

קיימים α,β,γ,ρ כך ש:

א) $|\alpha|<1;\ |\beta|<1;\ |\gamma|<1;\ |\rho|<1$

ב) $\frac{DE}{AE}=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\ ;\ \frac{CE}{DF}=\frac{1+\beta}{1-\beta}\ ;\ \frac{BG}{CG}=\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$

ו $\frac{AH}{BH}=\frac{1+\rho}{1-\rho}$

(הוכח!)

<u>למה IV</u>: ל α,β,γ,ρ שהוגדרו בלמה III נכון תמיד כי $(\alpha+\gamma)(\beta+\rho)<0$

<u>הוכחה</u>: נשנה את השוויון (1) לצורה הבאה ע"י הצבה:

$$\frac{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\rho)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\rho)}=1$$

נקבל

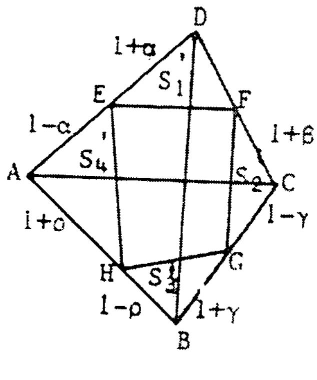
$$\alpha+\beta+\gamma+\rho+\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\rho+\alpha\gamma\rho+\beta\gamma\rho=0$$

או $(\alpha+\gamma)(1+\beta\rho)+(\beta+\rho)(1+\alpha\gamma)=0$.

עכשיו, מכיוון ש $(1+\beta\rho)>0$, $(1+\alpha\gamma)>0$

יוצא ש $(\alpha+\gamma)(\beta+\rho)<0$

מ.ש.ל.



<u>איור 8</u>

לסיום הוכחת משפט III נבחן את היטל הסטראדר על מישור החתך EFGH (איור 8). נסמן ב S_1' את השטח של ΔFDE, S_2' את השטח של ΔFCG, S_3' השטח של ΔGBH, S_4' השטח של ΔAHE. כמו-כן יהיו S_1' השטח של ΔDAC, S_2' השטח של ΔDBC, S_3' השטח של ΔABC. אם נשתמש בנוסחה הידועה $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ נוכל לקבל כי:

$$t_1 = \frac{S_1'}{S_1} = \frac{(1+\alpha)(1-\beta)}{4} \quad ; \quad t_2 = \frac{S_2'}{S_2} = \frac{(1+\beta)(1-\gamma)}{4}$$

$$t_3 = \frac{S_3'}{S_3} = \frac{(1+\gamma)(1-\rho)}{4} \quad ; \quad t_4 = \frac{S_4'}{S_4} = \frac{(1+\rho)(1-\alpha)}{4}$$

(מדוע?)

$$t_1+t_2+t_3+t_4 = \frac{(1+\alpha)(1-\beta)}{4} + \frac{(1+\beta)(1-\gamma)}{4} +$$

$$+ \frac{(1+\gamma)(1-\rho)}{4} + \frac{(1+\rho)(1-\alpha)}{4} = 1 - \frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\rho)}{4} > 1$$

(לפי למה IV). חוץ מזה נכונים הקשרים

$. \ 0<t_1<1 \ ; \ 0<t_2<1 \ ; \ 0<t_3<1 \ ; \ 0<t_4<1$

מכיוון ש

$S_1' + S_2' + S_3' + S_4' + S_{\underset{EFGH}{\text{חתך}}} = S_{ABCD}$, וגם

אנו מקבלים שאם $S_{ABCD} = S_1 + S_3 = S_2 + S_4$

$S_{max}=\max(S_1,S_2,S_3,S_4)$ ו $S_{min}=\min(S_1,S_2,S_3,S_4)$

אז $S_{ABCD} = S_{min} + S_{max}$. אנחנו מנסים להוכיח

ש $S_{\underset{\text{חתך}}{EFGH}} < S_{max}$ ולאור האמור לעיל

זה שקול ל $S_1' + S_2' + S_3' + S_4' > S_{min}$

ז"א $t_1S_1 + t_2S_2 + t_3S_3 + t_4S_4 > S_{min}$

אבל $t_1S_1+ t_2S_2+ t_3S_3 + t_4S_4 \geq (t_1+t_2+t_3+t_4)S_{min} > S_{min}$

מ.ש.ל

אנו אסירי תודה לולדימיר גרשוביץ ולאלכס גלזר על עזרתם המרובה בהכנת מאמר זה.

"בעיות יהודיות" במוסקוה

ו. גרשוביץ, האוניברסיטה העברית ופרופ' א. יופה, הטכניון.

הבעיה שתוארה במאמר של א. לינדנשטראוס וב. קנייבסקי היא אחת מהבעיות שכונו "בעיות יהודיות" בהן השתמשו בבחינת כניסה בע"פ למחלקה למתמטיקה באוניברסיטת מוסקוה כדי לדחות מועמדים יהודים. בחינות בע"פ הן חלק אנטגרלי של בחינות באוניברסיטאות בבריה"מ. בבחינה כזו נתנות לנבחן כ 15-20 דקות לפתר את השאלה. דבר שהוא כמעט בלתי אפשרי אם השאלה מאד קשה.

בסוף שנות ה 70, מורים למתמטיקה במוסקוה, בוריס קנייבסקי וולרי סנדרוב אספו ופרסמו מספר "בעיות יהודיות". העגש מהר לבא: הם נאסרו ושוחררו רק לפני כשנתיים. (בוריס קנייבסקי עלה ארצה לפני כחצי שנה).

מספר "בעיות יהודיות" נחקרו במפורט בסמינר שקיימה במוסקוה קבוצת מתמטיקאים מסורבי עליה ושכללה את ג. חסין (הגיע ארצה לפני כחדש), א. יופה (הגיע ארצה בינואר), נ. מיימן (הגיע ארצה במרץ) מ. פרידלין וג. פרימן. בסמינר זה התברר ללא צל של ספק שאוניברסיטת מוסקוה השתמשה בשאלות כדי להפלות לרעה מועמדים יהודיים ודבר זה פורסם בעתונות מתמטית במערב.

בעית שטח החתך הוצעה ב 1979 לנער יהודי שלא הצליח לפתר אותה בשעת הבחינה. הוא בקש מהבוחן שיסביר לו את הפתרון והתברר שגם הבוחן אינו יודע לפתר את הבעיה. למרות זאת לא התקבל הנער לאוניברסיטה.

להלן מספר "בעיות יהודיות" נוספות:

(הערת המערכת: הפותרים לא יתקבלו לאוניברסיטת מוסקוה, אבל נשמח לארחם בטכניון).

א. נתון $ab=4$, $c^2+4d^2=4$.

הוכח כי $(a-c)^2+(b-d)^2 \geq 1.6$

ב. פתר במספרים רציונלים

$$(x+y\sqrt{2})^2+(z+t\sqrt{2})^2 = 5+4\sqrt{2}$$

ג. נתונה פונקציה $f(x,y)$ שהטווח שלה מכיל לפחות 3 ערכים שונים וכך שקיימים מספרים a ו b כך ש $f(a,y)$ ו $f(x,b)$ אינם קבועים.

הוכח שיש מספרים p,q,r,s כך ששלשת המספרים $f(p,s)$, $f(r,q)$, $f(p,q)$ שונים זה מזה.

כי: $p=a$
$q=b$

[illegible] 2 [illegible] של

להשואה, הנה שתי בעיות "לא יהודיות". $f(r,s)$ ו $f(p,s)$ יש כבר 3
ערכים: [illegible]
יש רק 2 [illegible]

א. שרטט את הגרף של $2^{|x-1|}$

ב. האם הפונקציה
$$y=\begin{cases} x\sin 1/x, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$
גזירה ב 0 ?

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * * * * * * *

האולימפיאדה המתמטית העשרים ותשע ע"ש פרופ' ירמיהו גרוסמן

האולימפיאדה ע"ש פרופ' גרוסמן התקיימה בפקולטה למתמטיקה בטכניון

בחיפה, ט"ז באייר תשמ"ח, 3 במאי 1988

להלן נוסח השאלות:

<u>נסה</u> לפתור מספר מירבי של בעיות.

<u>התחל</u> כל בעיה בעמוד חדש.

<u>כתוב</u> בכתב ברור.

<u>נמק</u> תשובותיך, הוכח טכנותיך.

<u>אין</u> להשתמש בכל חומר עזר, כולל מחשבונים.,

הנך מתבקש/ת לרשום על גבי מחברת הבחינה את שמך המלא, כתובתך ושם בית ספרך.

<u>משך הבחינה</u>: 3 שעות.

2000 5
400 25
80 125
16 625
3 3125
2499

<u>ב ה צ ל ח ה</u>

<u>בעיה מס' 1</u>: אם סופרים את הספרות מימין, מצא את הספרה ה-1988 ואת הספרה ה-2500 של !10000.

<u>בעיה מס' 2</u>: יהיו A,B,C קדקדים עוקבים של מצולע משוכלל בעל n צלעות, שאורך צלעו הוא 1. האלכסונים היוצאים מ-B מחלקים את המשולש ABC ל n-2 משולשים. הוכח שבכל משולש כזה מכפלת ארכי שתיים מהצלעות שווה לאורך הצלע השלישית.

<u>בעיה מס' 3</u>: נתונים שלושה מספרים טבעיים a,b,c. הוכח, כי הבטוי $a^{4b}-a^{4c}$ מתחלק ב-30 ללא שארית. מהו המספר השלם הגדול ביותר בו מתחלק הבטוי הנ"ל ללא שארית, לכל a,b,c טבעיים?

בעיה מס' 4: א. הוכח כי $\tan 22^0.5=\sqrt{2}-1$

ב. נתונים תשעה מספרים ממשיים שונים $a_1,a_2,\dots,a_9$.

הוכח, כי יש ביניהם לפחות זוג אחד של מספרים, a_i,a_j,

המקיים את אי-השוויון

$$0 < \frac{a_i-a_j}{1+a_ia_j} < \sqrt{2}-1 .$$

בעיה מס' 5: במעגל נתונים קוטר AB ומיתר CD הניצב לו. מצא את המקום הגאומטרי של מרכז המעגל החסום במשולש CPQ, כאשר PD הוא מיתר אחר הפוגש את AB ב-Q.

בעיה מס' 6: צובעים כל נקודה של המישור באחד משלושה צבעים נתונים. הוכח, כי לכל קטע נתון, קיים לפחות זוג אחד של נקודות שוות צבע שהמרחק ביניהן שווה באורכו לקטע הנתון.

בעיה מס' 7: יהיו A ו-B שני קדקדים נגדיים של קוביה. חוצים את כל מקצועות הקוביה שאינם מכילים את A או B. הוכח, כי אמצעי מקצועות אלה נמצאים במישור אחד, ומהווים קדקדי משושה משוכלל.

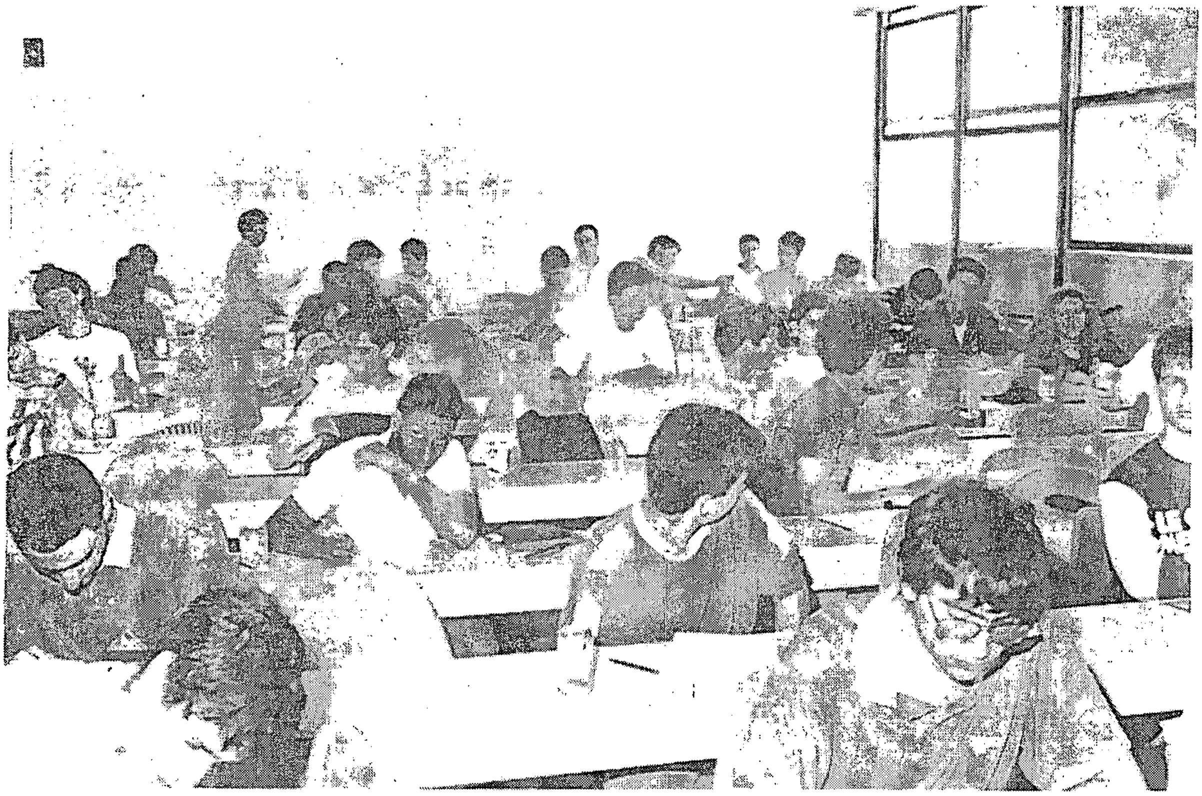
בעיה מס' 8: נתון לוח מלבני של משבצות ריבועיות. על כל משבצת מונחת מטבע, כשחלקן מונחות על צד המספר ויתרן על צד הסמל. פעולה מותרת על הלוח היא הפיכת כל המטבעות המונחות בשורה אחת או הפיכת כל המטבעות המונחות בעמודה אחת. הוכח, כי תנאי הכרחי ומספיק לכך, שניתן להגיע ע"י מספר סופי של פעולות מותרות למצב שבו כל המטבעות מונחות על אותו צד, הוא שבכל רביעית מטבעות המהוות קדקדי מלבן (שצלעותיו מקבילות לשפת הלוח), מספר המטבעות המונחות על אותו צד הוא זוגי.

הפתרונות מופיעים בעמ' 48.

להלן שמות הזוכים:

מקום ראשון	עדי לוי	צה"ל
מקום שני	עודד לבנה	צה"ל
	רן אבנימלך	הנדסאים ליד האוניברסיטה, תל-אביב
ציונים לשבח	אילון לינדנשטראוס	תיכון ליד האוניברסיטה, ירושלים
	אריאל שקולניקוב	תיכון ליד האוניברסיטה, ירושלים
	ליאור גרונדלינגר	כל ישראל חברים, תל-אביב

התמונה הבאה צולמה בזמן התחרות. האם אתם מזהים את עצמכם?



פתרון בעיות האולימפיאדה לנער תשמ"ח
(מכון ויצמן למדע 29.2.88)

המספר בסוגריים אחרי מספר השאלה, הוא מספר הנקודות שהוענקו בעד תשובה מלאה ומדויקת על השאלה.

1. (7) הוכח שאין למצוא מספר שלם כך שכאשר מעבירים את הספרה הראשונה שלו משמאלו לימינו מקבלים מספר שהוא גדול פי 4 מהמספר המקורי.

פתרון

נניח שקיים מספר כזה, x. מאחר שמספר הספרות ב $4x$ שווה לזה שב x, ברור כי הספרה הראשונה לא תוכל להיות גדולה מ-2. מאידך ספרה זו היא גם הספרה הראשונה של המספר הזוגי $4x$ ולכן היא שווה ל-2. מכאן נובע שהספרה השניה של x, שהיא הראשונה של $4x$ היא 8 או 9. יוצא ש x מתחיל בצורה 28 או ....29 ולכן יהיה מספר הספרות ב $4x$ גדול מזה של x.

* * * * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * * * *

2. (7) מצא את כל הפתרונות של המשוואה:

$$[(\alpha^2x+\alpha^2-1)/2] = (2x+3)/5$$

כאשר α מספר שלם ו-x ממשי.

(עבור כל t ממשי מסמן $[t]$ את המספר השלם הגדול ביותר שאינו גדול מ-t.

דוגמא: $[2.01]=2$, $[-1.5] = -2$).

גזור ושלח

לכבוד
היחידה לפעולות נער
מכון ויצמן למדע
ת.ד. 26 רחובות - 76100

א.נ.,

מצורף בזה מצאו נא המחאה מספר __________ של בנק __________

סניף ________, על סך 8 ש"ח עבור מנוי על "אתגר-גליונות מתמטיקה"

לשנת תשמ"ס.

שם: ______________________
כתובת: ______________________
מיקוד: ________ טלפון ________
ביה"ס: ____________ כתה ______
(או צה"ל): ________ ד.צ.: ________

גזור ושלח

לכבוד
היחידה לפעולות נער
מכון ויצמן למדע
ת.ד. 26 רחובות - 76100

א.נ.,

מצורף בזה מצאו נא המחאה מספר __________ של בנק __________

סניף ________, על סך 8 ש"ח עבור מנוי על "אתגר-גליונות מתמטיקה"

לשנת תשמ"ט.

שם: ______________________
כתובת: ______________________
מיקוד: ________ טלפון: ________
ביה"ס: ____________ כתה ______
(או צה"ל) ____________ ד.צ. ______

גזור ושלח

לכבוד
היחידה לפעולות נער
מכון ויצמן למדע
ת.ד. 26 רחובות - 76100

א.נ.,

מצורף בזה מצאו נא המחאה מספר __________ של בנק ________

סניף ________, על סך 8 ש"ח עבור מנוי על "אתגר - גליונות מתמטיקה"

לשנת תשמ"ס.

שם: ______________________
כתובת: ______________________
מיקוד: ________ טלפון: ________
ביה"ס ____________ כתה ______
(או צה"ל) ____________ ד.צ. ______

גזור ושלח

פתרון

מעצם הצגת הבעיה נובע כי $\frac{2x+3}{5}$ שלם ולכן

$$2x+3 = 5n$$

נבדוק שני מקרים:

א) n זוגי, $n = 2m$,

במקרה זה

$$x = 5m - \frac{3}{2}$$

$$2m = \left[\frac{\alpha^2(5m - \frac{3}{2}) + \alpha^2 - 1}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{\alpha^2(5m - \frac{1}{2}) - 1}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{\alpha^2(10m - 1) - 2}{4}\right] = \frac{\alpha^2(10m - 1) - 2}{4} - \varepsilon$$

כאשר $0 \le \varepsilon \le \frac{3}{4}$.

ולכן

$$8m + 2 + 4\varepsilon \ge \alpha^2(10m - 1)$$

$$(\text{אם } m \ge 1) \quad \alpha^2 \le \frac{8m + 7}{10m - 1} < 1$$

$$\alpha = 0$$

$$2m = [-\tfrac{1}{2}] = -1$$

וזה בלתי אפשרי.

אם $m = 0$ מקבלים $x = -\frac{3}{2}$

$$0 = \frac{-\frac{1}{2}\alpha^2 - 1}{2} < -1$$

וגם זה לא ייתכן. משיקולים דומים ניתן לפסול את האפשרות $m < 0$.

ב) n אי-זוגי, $n = 2m + 1$.

במקרה זה נקבל

$$2x + 3 = 10m + 5$$

$$x = 5m + 1$$

$$2m + 1 = \left[\frac{\alpha^2(5m + 2) - 1}{2}\right] = \frac{\alpha^2(5m + 2) - 1}{2} - \eta$$

כאשר η הוא 0 או $\frac{1}{2}$. יוצא כי

$$\alpha^2(5m + 2) = 4m + 3 + 2\eta \leq 4m + 4$$

$$\alpha^2 \leq \frac{4m + 4}{5m + 2}$$

והאפשרויות עבור α^2 הן 0 או 1.

אם $\alpha = 1$, אזי

$$+ 1 = \left[\frac{5m + 1}{2}\right]$$

$$= \frac{5m + 1}{2} - \eta$$

$$m = 1 + \eta$$

אבל m שלם ולכן $\eta = 0$, $m = 1$

$$x = 6$$

אם $\alpha = 0$, אזי

$$2m + 1 = [\tfrac{-1}{2}]$$

$$= -1$$

$$m = -1$$

$$x = -4$$

הפתרונות האפשריים הם:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = 1 & x = 6 \\ \alpha = 0 & x = -4 \end{array}\right\}$$

* * * * * * * * * * * * * * *

* * * * * * * * * * * * * * *

3. (9) מצא את כל הזוגות (x,y) של מספרים שלמים שונים מ-0 המקיימים

$$(x^2+y)(x+y^2) = (x-y)^3$$

<u>פתרון</u>

$$(x^2 + y)(x + y^2) = (x - y)^3$$

$$x^2y^2 + xy + x^3 + y^3 = x^3-3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

אבל $x \neq 0$ ולכן

$$2y^2 + x(x - 3)y + x(1 + 3x) = 0$$

$$y = \frac{-x(x - 3) \pm \sqrt{D}}{4}$$

כאשר

$$D = x^4 - 6x^3 - 15x^2 - 8x$$

$$= x(x - 8)(x + 1)^2$$

כדי ש y יהיה שלם הכרחי ש D יהיה רבוע משוכלל ולכן צריך גם $x(x-8)$ להיות רבוע משוכלל ומכאן ש x יכול להיות רק -1 , 8 או 9. (האפשרות $x=0$ אינה קיימת לפי נתוני הבעיה). קל עכשיו לפתור את המשואה הרבועית עבור y ומקבלים את הפתרונות הבאים:

x	y
-1	-1
8	-10
9	-6
9	-21

* * * * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * * * *

4. (10) המשולש ABC מסתובב במישור שלו סביב לקדקד A. בכל מצב של המשולש המסתובב, בגיד 'AB'C, מגדירים M כנקודת המפגש של הישרים 'CC','BB.

א) מהו המקום ההנדסי של M?

ב) איפה נמצא M במסלול הזה אחרי שהמשולש הסתובב ב-90^0?

פתרון

א) יהיו זויות המשולש ABC α,β,γ

בהתאמה ונגדיר

$$\theta = \measuredangle CAC' = \measuredangle BAB$$

מאחר ש $AC = AC'$

יוצא כי $\measuredangle ACC' = 90^0 - \frac{\theta}{2}$

ולכן

$$\measuredangle BCM = 180^0 - \gamma - (90^0 - \frac{\theta}{2})$$

$$= 90^0 - \gamma + \frac{1}{2}\theta$$

כמו כן

$$\measuredangle ABB' = 90^0 - \frac{1}{2}\theta$$

ולכן

$$\measuredangle CBM = 90 - \frac{1}{2}\theta - \beta$$

מזה נובע כי

$$\measuredangle BMC = 180^0 - (\measuredangle BCM + \measuredangle CBM)$$

$$= 180^0 - (180^0 - \beta - \gamma)$$

$$= \beta + \gamma$$

$$= 180^0 - \alpha$$

ולכן הנקודות M,C,B,A נמצאות על מעגל דהיינו M נמצא על המעגל החוסם את המשולש ABC. המקום הגאומטרי של M הוא איפוא המעגל החוסם את ABC.

ב) בטיעון ב-א) אפשר היה לראות את AB'C' במשולש המקורי ומכאן ש M הוא בקודת המפגש השניה (בנוסף על A) של המעגלים ABC , AB'C'.. מכאן שאפשר לבנות את M אם נבנה מעגל שוה ל ABC העובר דרך M וחותך את ABC בזוית Q (במקרה שלנו 90^0).

* * * * * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * * * * *

5. (14) אם מפתחים את שני הפולינומים

$$f_1(x) = (1-x^{19}+x^{88})^{1988}$$

$$f_2(x) = (1-x^{19}-x^{88})^{1988}$$

באיזה מהשנים יהיה המקדם של x^{5748} יותר גדול? נמק.

<u>פתרון</u>

אם נסתכל בפונקציות

$$g_1(x) = f_1(-x) = (1+x^{19}+x^{88})^{1988}$$

$$g_2(x) = f_2(-x) = (1+x^{19}-x^{88})^{1988}$$

נראה מיד כי המקדם של x^{5748} ב g_1 גדול מאשר זה ב g_2. אבל 5748 זוגי ולכן מקדמי האיבר הזה ב g_1 ו g_2 שווים לאלה ב f_1, f_2 בהתאמה. יוצא כי המקדם של x^{5748} יהיה גדול ב f_1 מאשר ב f_2.

* * * * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * * * *

6. (16) הוכח כי אם $x = \frac{\pi}{2(n+1)}$, אזי

$$\sum_{j=2}^{n} \sec jx \sec(j-2)x = 3\cos 2x \operatorname{cosec}^2 2x$$

פתרון

עבור כל θ,φ קיים

$$\tan\theta - \tan\varphi = \sin(\theta-\varphi)\sec\theta\sec\varphi$$

ולכן

$$\sec jx \sec(j-2)x = \mathrm{cosec}\,2x\{\tan jx - \tan(j-2)x\}$$

יוצא כי

$$\sum_{j=2}^{n} \sec jx \sec(j-2)x = \mathrm{cosec}\,2x \sum_{j=2}^{n} \{\tan jx - \tan(j-2)x\}$$

$$= \mathrm{cosec}\,2x\,\{\tan nx + \tan(n-1)x - \tan x\}$$

$$= \mathrm{cosec}\,2x\,\{\tan(n-1)x + \sin(n-1)x\sec nx\sec x\}$$

אבל $x = \frac{\pi}{2(n+1)}$

ולכן

$$\left.\begin{aligned}(n-1)x &= \frac{\pi}{2} - 2x\\ nx &= \frac{\pi}{2} - x\end{aligned}\right\}$$

נציב את אלה ונקבל

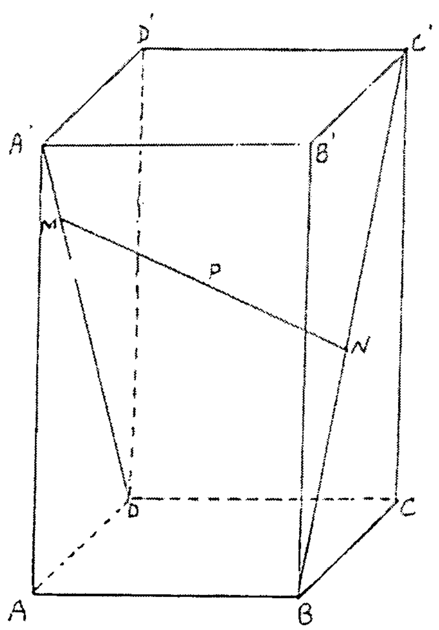
$$\sum_{j=2}^{n} \sec jx\sec(j-2)x = \mathrm{cosec}\,2x\sin(n-1)x\{\sec(n-1)x + \sec nx\sec x\}$$

$$= \mathrm{cosec}\,2x\cos 2x\{\mathrm{cosec}\,2x + \mathrm{cosec}\,x\sec x\}$$

$$= \mathrm{cosec}\,2x\cos 2x\{\mathrm{cosec}\,2x + 2\mathrm{cosec}\,2x\}$$

$$= 3\mathrm{cosec}^2 2x\cos 2x$$

* * * * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * * * *



7. (17) נתונה תיבה ABCDA'B'C'D' (ראה ציור). M היא נקודה כלשהי על האלכסון A'D של הפיאה ADD'A' ו-N היא נקודה כלשהי על האלכסון BC' של הפיאה BCC'B'; P הוא אמצע הקטע MN.

מצא את המקום ההנדסי של P.

פתרון

יהיו $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$ וניקח $ABDA'$ כמערכת צירים.

משואות הישר AD הן

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ \frac{z}{c} + \frac{y}{b} &= t \end{aligned}\right\}$$

ולכן נוכל לקחת עבור השיעורים של M $(o,bt,(1-t)c)$ כאשר $0\leq t\leq 1$.

מאידך משואות BC הן

$$\left.\begin{aligned} x &= a \\ z &= \frac{c}{b}\, y \end{aligned}\right\}$$

ונוכל לקחת כשיעורים של M (a,bs,cs) כאשר $0\leq s\leq 1$.

יוצא כי שיעורי P הם

$$\left(\frac{a}{2}\ ,\ \frac{s+t}{2}b\ ,\ \frac{1+s-t}{2}c\right)$$

כאשר s,t הם מספרים כלשהם בתחום $[0,1]$. קל לראות מזה כי הנקודות האלה נמצאות במישור החוצה בין המישורים $AA'D'D$, $BB'C'C$ וממלאות בו מעוין אשר קדקודיו הם מרכזי פיאות התיבה.

* * * * * * * * * * * * * * *

* * * * * * * * * * * * * * *

8. (20) קבוצת אנשים בקרו בתערוכה של 200 ציורים. אף מבקר לא ראה את כל הציורים אבל מאידך לא היה אף ציור אשר אף אחד לא הסתכל בו. הוכח כי היו לפחות זוג אחד של מבקרים, נגיד A ו-B, וזוג אחד של ציורים, נגיד α ו-β, כך ש-A ראה את α ולא את β בעוד B ראה את β ולא את α.

פתרון

יהיה A מבקר שראה מספר מירבי של ציורים. מניחים שיש לפחות ציור אחד שלא ראה; נקרא לציור כזה (אחד מביניהם אם היו כמה) β. לפחות מבקר אחד ראה את β, נקרא לאחד כזה B. ברור כי B לא ראה גם את כל הציורים שראה A, כי אז היה יוצא שראה יותר ציורים מ A, בניגוד להגדרת A כאחד שראה מספר מירבי של ציורים. יוצא שבין התמונות שראה A היתה לפחות אחת ש B לא ראה אותה. נקרא לה α.

* * * * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * * * *

להלן שמות הזוכים:

מקום ראשון:	יואב יפה	בית הספר הריאלי בחיפה, כתה י"ב
מקום שני:	אסף מונסה	תיכון ע"ש הימבלרב ירושלים, כתה י"ב
	דן קוזמא	עירוני ד' תל-אביב, כתה י"ב
ציונים לשבח:	רן אבנימלך,	הנדסאים ליד אוניברסיטה, תל-אביב
	ליאור גרונדלינגר	כל ישראל חברים, תל-אביב, כתה י"ב
	צחי דה ליאון	מדרשת נועם, פרדס חנה, כתה י"א
	אילון לינדנשטראוס	תיכון ליד האוניברסיטה, ירושלים, כתה י"ב
	אילון רשף	תיכון עירוני ד', תל-אביב, כתה י"א

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

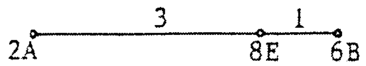
קואורדינטות בריצנטריות

ד"ר מיכאל קורן. משרד החנוך

1. מבוא במאמר זה נביא שימושים מתמטיים אחדים למודל מתמטי של מרכז הכובד של מערכת משקלות.

חישוב מרכז הכובד של מערכת (סופית) של משקלות נעשה בשלבים כמודגם מיד:

א. מרכז הכובד של שתי משקלות נמצא על הקטע המחבר אותן, בנקודה המחלקת קטע זה ביחס הפוך ליחס המשקלות.
כך לדוגמה, באיור 1, מרכז הכובד של משקולת 2 (שתי יחידות) ב A ומשקולת 6 ב B הוא בנקודה E המקיימת



איור 1

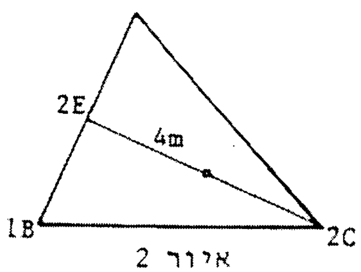
$AE:AB=6:2=3:1$.

משקולת של 8 ב E שקולה, לכן, למערכת של 2 ב A ו 6 ב B.
נרשום: $2A+6B=8E$

הערה: על ידי שנוי המשקלות נוכל לקבל את מרכז הכובד בכל נקודה של הקטע AB.

תרגיל: איזה משקל יש לשים בנקודה B אם המשקל ב A הוא 2 והנקודה המבוקשת E מקיימת $AE:AB=2:5$?

ב. באיור 2 נתונות 3 משקלות: 1 ב A , 1 ב B , 2 ב C .
קיים $1\cdot A+1\cdot B=2E$
כאשר E אמצע AB, ולכן משקל 2 ב E שקול למשקלים 1 ב A ו 1 ב B ולכן מרכז הכובד של המערכת (1A,1B,2C) הוא מרכז הכובד של המערכת (2E,2C) ולכן



איור 2

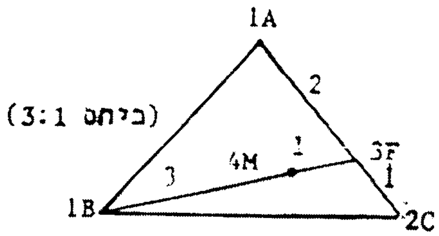
מרכז הכובד של שלוש המשקלות הוא בנקודה M, אמצע התיכון CE.

ברישום פורמלי: $1A+1B+2C=(1A+1B)+2C=$

$$2E+2C=4M$$

<u>תרגיל:</u> מצא את מרכז הכובד של מערכת $(1A,1B,1C)$ כאשר ABC משולש כלשהו. מה המסקנה הגיאומטרית מן החישוב.

2. <u>יחסי חלוקה של קטעים</u>



<u>איור 3</u>

<u>דוגמה:</u> באיור 3, מופיעה שוב המערכת $(1A,1B,2C)$ הפעם חישוב מרכז הכובד נעשה באופן אחר:

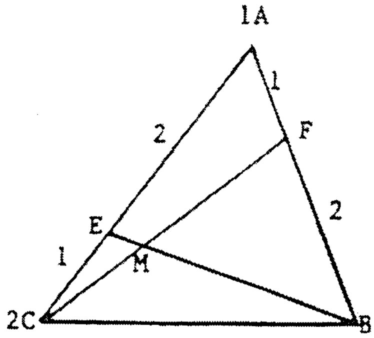
$$1A+1B+2C=(1A+2C)+1B=3F+1B=4M$$

מכאן, הקטע BF מ B לצלע AC מחלק את AC ביחס $2:1$ ומתחלק על ידי M ביחס $3:1$.

מהשוואת שתי הדרכים לחישוב מרכז הכובד נוכל להסיק כי הקטע מ C לאמצע AB והקטע מ B ל"שני שליש" AC מחלקים זה את זה ביחסים $1:1$ ו $3:1$.

בדוגמה האחרונה התחלנו ממערכת נתונה של משקלות וחישבנו יחסי חלוקה. בדוגמאות הבאות נראה כיצד לבחור מערכת משקלות מתאימה ולנצלה לחישובי החלוקות.

<u>דוגמא:</u> במשולש ABC באיור 4 נתון כי E מחלקת את AC ביחס $2:1$ וכי F מחלקת את AB ביחס $1:2$. הקטעים BE ו CF נפגשים בנקודה M.



<u>איור 4</u>

א. באיזה יחס מחלקת M את EB?

ב. הישר AM חותך את BC ב K.
באיזה יחס K מחלקת את BC?

<u>התרה:</u> נחפש משקלות עבורן M תהיה מרכז הכובד.

קל לראות כי

$1A+2C=3E$ ולכן לכל משקל x שנבחר ל B נקבל כי מרכז הכובד של $(1A,2C,xB)$ הוא על BE.

אם נבחר $x = \frac{1}{2}$ נקבל גם כי $1A + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}F$

ולכן מרכז הכובד של $(1A,2C,\frac{1}{2}B)$ הוא גם על CF ולכן ב M.

מערכת משקלות מתאימה היא, איפוא, $(1A,\frac{1}{2}B,2C)$

וקל לבדוק כי M מחלקת את EB ביחס $\frac{1}{2}:3$ או $1:6$ (ואת CF

ביחס $4:3 = 2:1\frac{1}{2}$) .

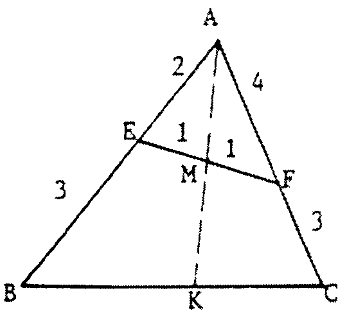
מאחר ומרכז הכובד נמצא גם על AK, יחס החלוקה הוא $BK:KC = 2:\frac{1}{2}$, או $4:1$.

__הערה:__ יכולנו להמנע משברים ולבחור, למשל, במערכת $(2A,1B,4C)$

__הערה:__ שים לב כי יחסי החלוקה שחישבנו אינם תלויים כלל בצורת המשולש.

__תרגיל:__ נקודה M במשולש ABC מחלקת את הקטע מ A ל BC ביחס $4:3$ ואת הקטע מ B ל AC ביחס $1:1$. באיזה יחס מחלקת M את הקטע מ C ל AB? הדרכה: חפש משקלות מתאימות ל M.

נעבור כעת למקרה בו יש לחלק לשלבים גם את המשקל באותה נקודה:



__איור 5__

__דוגמה:__ באיור 5, E מחלקת את AB ביחס $2:3$, F מחלקת את AC ביחס $4:3$, M אמצע EF.

באיזה יחס מחלק הישר AM את BC?

__התרה:__ $3A + 2B = 5E$.

באותו אופן $3xA+4xC=7xF$.

על מנת שמרכז הכובד יהיה באמצע EF צריך להתקיים $5=7x$ ולכן $x = \frac{5}{7}$. נבחר לכן במערכת $((3 + \frac{15}{7})A , 2B , \frac{20}{7}C)$.

מרכז הכובד של המערכת שבחרנו הוא ב M, ואם נחשב את מרכז

הכובד על ידי $\frac{36}{7}A+(2B+\frac{20}{7}C)$ נראה כי K (נקודת החיתוך של

AM עם BC) מחלקת את BC ביחס $2:\frac{20}{7}$ או $10:7$.

<u>תרגיל:</u> בדוגמה האחרונה, באיזה יחס מחלקת M את AK?

<u>תרגיל:</u> באיור 5, הנח כי יחסי החלוקה הנתונים הם $AE:EB=2:3$, $AM:MK=1:1$, $AF:FC=4:3$. מצא באיזה יחס מחלקת M את EF.

3. <u>פיזיקה או מתמטיקה?</u>

לפני שנעבור, בסעיף הבא, מחישובים מספריים להוכחת משפטים, סעיף זה בא "להרגיע" קוראים שחשו אי נוחיות ממתמטיקה המבוססת על שיקולים פיזיקאליים.

כל החישובים שבצענו עד כה התבססו על מספר הנחות (אכסיומות):

הנ-1. $xA+yB=(x+y)C \iff C$ על AB וקיים $AC:CB=y:x$ ($x+y>0$ $x,y>0$).

הנ-2. ניתן למצוא מרכז כובד של משקלות אחדות על ידי חישוב בשלבים, בכל דרך שנבחר, כאשר בכל שלב מחליפים שתי משקלות בסכומן, הנמצא במרכז הכובד שלהן.

או בניסוח פורמלי $xA+yB+zC=(xA+yB)+yC=$

$=(xA+zC)+yB=$

בנוסף לשתי ההנחות הראשונות הנחנו גם כי $xA+yB=yB+xA$

וכי $xA+yB=kxA+kyB$ לכל $k\neq0$.

אם נכתוב את הנ-1 בצורה השקולה

$\alpha A+(1-\alpha)B=C \iff C$ מחלקת את AB ביחס $(1-\alpha):\alpha$

נראה כי הכרנו (ראה גליונות 10,9 של עתון זה, "וקטורים") מערכת מתמטית המקיימת בדיוק את האכסיומות שלעיל, והיא המערכת של וקטורים הקשורים בנקודה ושל קומבינציות ליניאריות של וקטורים אלו.

כל חישוב המנוסח בלשון של משקלות ומרכזי כובד ניתן לבצוע על ידי בחירת נקודת מוצא לוקטורים, וחישובים של קומבינציות לינאריות מתאימות, ולכן כל מסקנה מחישוב כזה היא תקפה מתמטית. הקשר לוקטורים מרמז על אפשרות להרשות גם משקל שלילי, שהרי מקדמים של קומבינציה לינארית של וקטורים אינם חייבים להיות חיוביים דוקא.

ניתן להצדיק "משקל שלילי" משקולים פיזיקאליים (משקל הוא כוח בכוון מוגדר, וניתן להפעיל כוח בכוון הנגדי) או על ידי בדיקת המשמעות של כפל של וקטור בסקלר שלילי. לא נבחר באחת משתי דרכים אלו, אלא נסתפק בפיתוח פורמלי; בעזרת דוגמאות: נחזור לאיור 1.

במקום $2A+6B=8E$ נכתוב, למשל,

$$6B=(-2)A+8E$$

קיים $AB:BE = -4:1$ כאשר הסימן השלילי בא להראות שלקטעים AB , BE יש "כוונים הפוכים" כקטעים מכוונים.

מכאן קל לראות שגם במקרה זה, מרכז הכובד B מחלק את הקטע AE ביחס הפוך ליחס המשקלות.

נזכיר את ההגדרה:

<u>הגדרה:</u> הנקודה X מחלקת קטע AB מבחוץ ביחס $n:m$ (או מחלקת את הקטע ביחס $-n:m$) אם $AX:BX=n:m$.

<u>הערה חשובה:</u> האכסיומות שמקיימת המערכת של חישוב מרכז כובד מצדיקות את הסימון האלגברי שבחרנו לחישובים, כסכומים מהצורה

$$xA+yB+zC+\ldots = (x+y+z+\ldots)M$$

באשר קל להוכיח על סמך האכסיומות כי מותר לפעול על סכומים כאלה בדיוק כמו על בטויים אלגבריים לינאריים. כך למשל, אם

$$xA+yB = (x+y)E,$$

$$uC+vD = (u+v)E \quad \text{וקיים} \quad x+y = u+v$$

אפשר למשל להסיק כי $xA+yB=uC+vD$ וכי E היא הנקודה המשותפת לישרים AB ו CD.

באופן דומה, כפי שכבר עשינו כדי לתת משמעות למשקל שלילי, ניתן לחבר אותו בטוי לשני אגפי שוויון ולכן גם "להעביר מאגף לאגף"

<u>תרגיל:</u> במרובע ABCD נתון כי

$$\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}C \ .$$

א. שרטט מרובע כזה. האם המרובע יכול להיות דלתון?

ב. אם E היא נקודת הפגישה של המשכי הצלעות BC ו AD, מצא באיזה יחס מחלקת E (מבחוץ) את הצלע AB, ומכאן מהו היחס AB:BA.

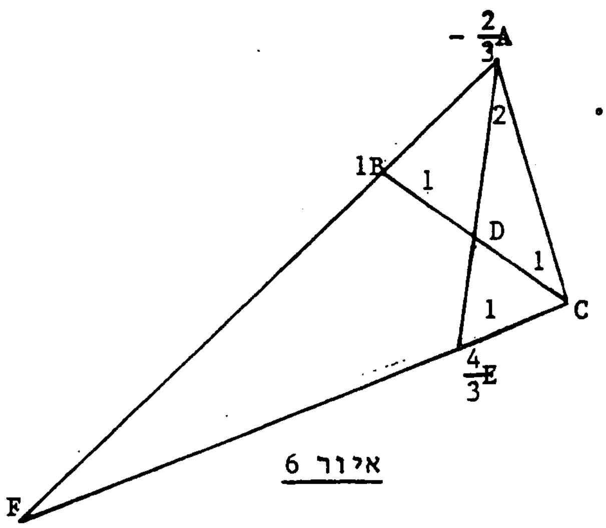
<u>תרגיל:</u> במרובע ABCD כלשהו, בחר במערכת (1A,1B,1C,1D) וחשב את מרכז הכובד של המערכת בשתי דרכים, כדי למצוא כיצד מחלקים זה את זה קטעי האמצעים של המרובע. (קטע אמצעים במרובע הוא קטע המחבר את נקודות האמצע של שתי צלעות נגדיות).

<u>תרגיל:</u> מצא נקודה X המחלקת קטע AB ביחס ‎-2:3. הדרכה, הנח שאורך הקטע AB הוא 1. מאיזה צד של הקטע נמצאת X?

<u>תרגיל:</u> הוכח שלא קיימת נקודה X המחלקת קטע AB ביחס ‎-1:1.

<u>תרגיל:</u> הראה שלמערכת (1A,-3B,2C) אין מרכז כובד. (כאשר ABC משולש כלשהו).

<u>דוגמה:</u> במשולש ABC המשיכו את התיכון AD מעבר ל BC במחצית אורכו, ל E; הישר CE חותך את המשך הצלע AB ב F. באיזה יחס מחלקת E את CF?



<u>איור 6</u>

<u>התרה</u> : $DE = \frac{1}{2}AD$ ולכן $AE:ED = -3:1$.

אם נבחר $1B+1C = 2D$

אז יש לבחור $-\frac{2}{3}A$ כדי לקבל

$$-\frac{2}{3}A + 2D = \frac{4}{3}E$$

שכן $2:(-\frac{2}{3}) = -3:1$

E היא מרכז הכובד של $(-\frac{2}{3}A, 1B, 1C)$ והיא על CF

ולכן מרכז הכובד של $(-\frac{2}{3}A, 1B)$ חייב להיות ב F.

$$-\frac{2}{3}A + 1B = \frac{1}{3}F$$

ולכן E מחלקת את CF ביחס $\frac{1}{3} : 1 = 1:3$

<u>תרגיל:</u> פתור את הדוגמה האחרונה, ללא משקל שלילי, על ידי בחירה נכונה של x ו y במערכת (1A,xC,yF) כך שמרכז הכובד יהיה ב D.

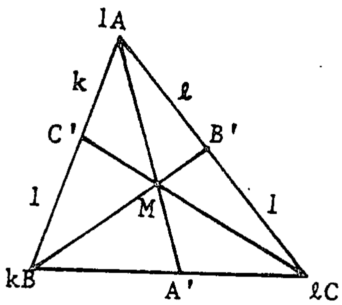
4. <u>משפטים גיאומטריים</u>

בסעיף זה נוכיח שני משפטים מפורסמים: משפט מנלאוס ומשפט דזרג.

<u>משפט מנלאוס</u>

אם M היא נקודה בתוך משולש ABC ואם הישר AM חותך את BC ב A', BM חותך את AC ב B' ו CM את AB ב C'

אז $$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$



<u>איור 7</u>

<u>הוכחה:</u> נסמן $AC' : C'B = k:1$ (k לא דוקא שלם)

$$CB' : B'A = 1:\ell$$

ונבחר במערכת $(1A, kB, \ell C)$.

קל לבדוק כי M מרכז הכובד של המערכת, באשר הוא נמצא הן על CC' והן על BB'.

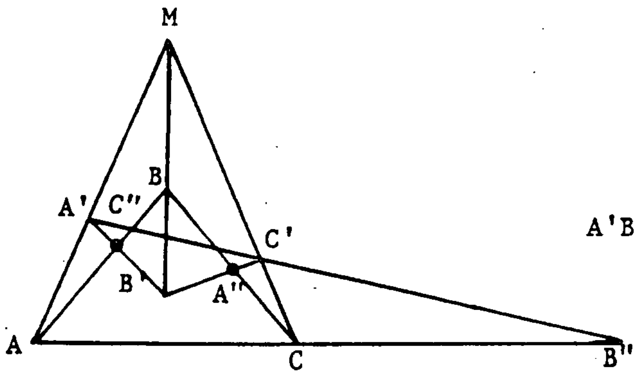
אך ניתן להתחיל את חישוב מרכז הכובד M על ידי

$$kB+\ell C = (k+\ell)A'$$

ומכאן ש A' מחלקת את BC ביחס $\ell:k$ וקל לבדוק שמכפלת היחסים היא אכן 1 כנדרש.

נעבור למשפט השני:

<u>משפט דזרג</u>



<u>איור 8</u>

אם הישרים AA' , BB' , CC'

נפגשים בנקודה אחת M

ואם C'' היא חיתוך AB ו $A'B'$

B'' היא חיתוך AC ו $A'C'$

A'' היא חיתוך BC ו $B'C'$

אז A'' , B'' ו C'' נמצאות על

ישר אחד.

<u>הוכחה:</u> יש α עבורו

$$\alpha A + (1-\alpha)A' = M \qquad (1)$$

כלומר: אפשר למצוא משקלות α , $1-\alpha$ כך שמרכז הכובד של המערכת $(\alpha A\ ,\ (1-\alpha)A')$ הוא ב M. (α לאו דוקא חיובית). באותו אופן קיימים β , γ עבורם

$$\beta B + (1-\beta)B' = M \qquad (2)$$

$$\gamma C + (1-\gamma)C' = M \qquad (3)\ .$$

מהשוואת (1) ל (2) נקבל כי $\alpha A + (1-\alpha)A' = \beta B + (1-\beta)B'$ ולכן

$$\alpha A - \beta B = (1-\beta)B' - (1-\alpha)A'$$

כל אגף של השוויון האחרון מייצג את נקודת החיתוך של AB ו $A'B'$ שסומנה כ C'' לכן

$$\alpha A - \beta B = (\alpha-\beta)C'' \qquad (4)$$ ובאופן דומה

$$\alpha A - \gamma C = (\alpha-\gamma)B'' \qquad (5)$$

$$\gamma C - \beta B = (\gamma-\beta)A'' \qquad (6)$$

<u>הערה:</u> אם הנחנו שלישרים AB ו $A'B'$ יש נקודה משותפת אז $\alpha\neq\beta$ כי מ $\alpha=\beta$ היה נובע, לפי משפט תלס , שהישרים מקבילים. באותו אופן גם $\alpha\neq\gamma$ ו $\gamma\neq\beta$.

אם נחבר את (5) ו (6) נקבל:

$$(\alpha-\gamma)B'' + (\gamma-\beta)A'' = (\alpha A-\gamma C) + (\gamma C-\beta B) = \alpha A-\beta B$$

ולכן לפי (4) נקבל

$$(\alpha-\gamma)B'' + (\gamma-\beta)A'' = (\alpha-\beta)C''$$

ולכן C'' היא מרכז הכובד של המערכת $((\gamma-\beta)A'' , (\alpha-\gamma)B'')$

ולכן C'' נמצאת על הישר $A''B''$.

5. <u>קואורדינטות כובד</u>

בסעיף זה נניח כי בחרו במישור משולש קבוע ABC. לכל נקודה X במישור אפשר למצוא מערכת (aA,bB,cC) שמרכז הכובד שלה הוא X ולהיפך: אם נתונים c,b,a שסכומם אינו אפס אז קיימת נקודה X במישור עבורה $X\ (a+b+c) = aA+bB+cC$.

המקדמים c,b,a נקראים <u>קואורדינטות הכובד</u> של X (ביחס ל ΔABC).

<u>הערה:</u> לכל שלשה (a,b,c) שסכומה אינו אפס, מתאימה נקודה יחידה במישור. לכל נקודה במישור מתאימות כמובן אין סוף שלשות, אך הן כולן פרופורציוניות אלו לאלו.

<u>דוגמה:</u> אם D אמצע AB אז, למשל, השלשה $(-2,-2,0)$ מתארת קואורדינטות כובד של D. נרשום $-2A-2B\sim D$, במקום לרשום $-2A-2B = -4D$. ובאופן כללי:

<u>סימון:</u> אם c,b,a הן קואורדינטות כובד של נקודה X אז נסמן

$$aA + bB + cC \sim X$$

<u>הערה:</u> בפרט קיים לכל $x\neq 0$ כי $xX=X$.

<u>תרגיל:</u> הנקודה D מחלקת את BC ביחס $-1:2$, E אמצע AD, F חיתוך AB ו CE. מצא קואורדינטות כובד לנקודות F,E,D.

במשפט הבא נביא תכונה חשובה של קואורדינטות כובד, שנזדקק לה בהמשך.

<u>משפט:</u> אם X ו Y הן שתי נקודות שונות במישור קיים

$$aA + bB + cC \sim X$$

$$xA + yB + zC \sim Y$$

אז לכל r ו s עבורם $\sim(a+b+c) + s(x+y+z) \neq 0$

הנקודה Z, שקואורדינטות הכובד שלה הן $ra+sx$, $rb+sy$, $rc+sz$, נמצאת על הישר XY ולהיפך: לכל נקודה Z על הישר XY אפשר למצוא r ו s כך שיתקיים

$$Z \sim (ra+sx)A + (rb+sy)B + (rc+sx)C. \qquad (7)$$

או, בניסוח מילולי Z נמצאת על הישר XY אם ורק אם Z היא קומבינצית כובד של X ו Y.

כדי להווכח בנכונות המשפט די לחשוב על מערכת המשקלות $((rc+sz)C,(rb+sy)B,(ra+sx)A)$ ולחשב את מרכז הכובד שלה על ידי

$$(ra+sx)A + (rb+sy)B + (rc+sz)C =$$

$$\text{שלם} = (raA+rbB+rcC) + (sxA+syB+szC)$$

הבטוי האחרון בודאי שקול לנקודה על XY וקל לראות שעל ידי בחירת r ו s מתאימים אפשר לקבל כל נקודה Z על ישר זה.

<u>תרגיל:</u> $X \sim A + 2B - C$

2A Y . Z מחלקת את XY ביחס 2:5.

מצא קואורדינטות כובד ל Z.

<u>תרגיל:</u> אם $X \sim aA+bB+cC$ והישר AX חותך את BC ב D, הראה:

א. $D \sim bB+cC$

ב. לכל נקודה Z על AX, השונה מ D יש q עבורו מתקיים

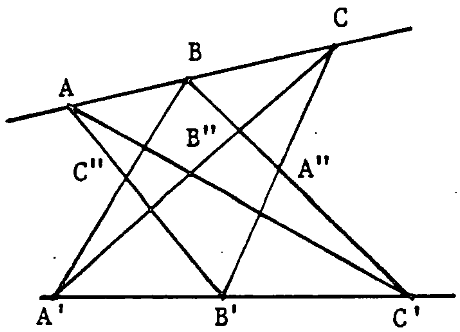
$$Z \sim aA+qbB+qcC$$

נסיים סעיף זה במשפט ידוע נוסף:

<u>משפט פפו (Pappus)</u>

אם הנקודות C,B,A נמצאות על ישר אחד והנקודות C',B',A' נמצאות על ישר אחד (באותו מישור) ואם AB' ו A'B נפגשים ב C" , AC' ו A'C ב B" , BC' ו B'C נפגשים ב A" אז A" , B" ו C" נמצאות אף הן על ישר אחד.

<u>הוכחה:</u> נסתכל על משולש AB'C כקבוע ונסתכל על קואורדינטות כובד המתיחסות למשולש זה. נניח כי B" מקיימת:



<u>איור 9</u>

$$B'' \sim aA+bB'+cC \qquad (8)$$

בהצגת B המקדם של B' הוא אפס, ולכן נרשום (לשם הנוחיות):

$$B \sim aA + pcC \qquad (9)$$

הנקודה C' נמצאת על AB" ולכן מתקיים (ל q מתאים):

$$C' \sim aA+qbB'+qcC \qquad (10)$$

נתבונן עכשיו ב A". היא נמצאת על BC' ולכן היא "קומבינציה ליניארית" שלהם ובגלל שהיא גם על B'C ידוע שהמקדם של A הוא אפס. קל לראות שנקבל צירוף מתאים אם נחסר את (9) מ (10) ולכן

$$A'' \sim qbB' + (q-p)cC \qquad (11)$$

נסתכל עתה על A'. A' על B'C' ולכן היחס בין מקדמי A ו C הוא כמו ב C' וכמו כן A' על CB" ולכן היחס בין מקדמי A ו B' הוא כמו ב B"

ולכן

$$A' \sim aA+bB'+qcC \qquad (12)$$

לכן C" שהיא על A'B ומקדם C שלה הוא אפס מקיימת (לפי משוואות (9), (12))

$$C'' \sim (p-q)aA+pbB' \qquad (13)$$

נרשום כעת הצגה אחרת ל B'':

$$B'' \sim (q-p)aA + (q-p)bB' + (q-p)cC \qquad (8*)$$

(הכפל מותר כי $p-q\neq 0$, שכן אחרת מ (13) נקבל ש C'' ו B' מתלכדות)

חיבור (אגפי ימין של) משוואות (13) ו (8*) נותן

$$qbB' + (q-p)cC$$

אך זוהי בדיוק הצגה של A'' לפי (11) ולכן הנקודה A'' נמצאת על הישר $B''C''$, כנדרש.

6. קואורדינטות בריצנטריות

ראינו כי ההתאמה בין נקודות המישור לבין קואורדינטות הכובד שלהן איננה חד-חד-ערכית. נוכל לקבל התאמה חד-חד-ערכית אם נוסיף דרישה, שסכום הקואורדינטות יהיה תמיד 1. לקואורדינטות כאלו קוראים קואורדינטות בריצנטריות:

הגדרה: b,a ו c הן הקואורדינטות הבריצנטריות של נקודה X (ביחס למשולש ABC) אם $X \sim aA + bB + cC$ וקיים $a+b+c=1$. נסמן $X=(a,b,c)$

נביא מספר תכונות יפות של הקואורדינטות הבריצנטריות, כאשר כל ההוכחות נשארות כתרגיל לקוראים.

1. אם $X=(a,b,c)$ $Y=(u,v,w)$ אז Z היא אמצע הקטע XY אם ורק אם $Z = (\frac{a+u}{2}, \frac{b+v}{2}, \frac{c+w}{2})$.

2. אם $X = (a,b,c)$ נקודה פנימית למשולש ABC, אז אם נבחר E על AC המחלקת את AC ביחס $(1-a):a$ ונקודה F על BC המחלקת אותו ביחס $(1-b):b$, אז X היא הקדקוד הרביעי במקבילית $FCEX$.

3. כל ישר המקביל לצלע BC הוא המקום הגיאומטרי של הנקודות (x,y,z) המקיימות $x=a$.

4. אם $X = (a,b,c)$ נקודה פנימית למשולש ABC ואם שטח משולש ABC הוא 1 אז הקטעים המחברים את X לקדקדי המשולש מחלקים אותו לשלושה משולשים ששטחם b,a ו c יחידות.

5. אם $X = (a,b,c)$ נקודת הפגישה של חוצי הזויות במשולש ואם צלעות המשולש הן c_o, b_o, a_o אז $a = \frac{a_o}{a_o+b_o+c_o}$ וכו'.

6. אם $X = (a,b,c)$ נקודה פנימית למשולש אז הישר AX מחלק את הצלע BC ביחס $c:b$. הערה: תכונה זו מאפשרת בניה אחרת לנקודה X מזו הנרמזת בתכונה 2 והיא גם מאפשרת הוכחה קצרה למשפט מנלאוס (סעיף 4).

7. במערכת צירים קרטזית במישור, ההצגה הבריצנטרית של נקודה $E(x,y)$ ביחס למשולש $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(0,0)$ היא $E = (x,y,1-x-y)$.

===================================

ת ר ג י ל י ם

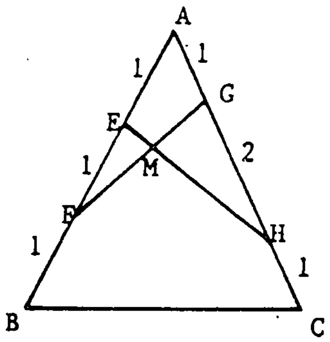
1. צלעותיו של משולש שוה שוקים הן באורכים 6,5,5 והן עשויות מחומר אחיד. מצא את המרחק בין מרכז הכובד של המשולש לבין נקודת פגישת התיכונים שלו.

<u>הדרכה:</u> מרכז הכובד של קטע מחומר אחיד הוא במרכזו.

2. בדסקית עגולה, העשויה מחומר אחיד, שרדיוסה 20 ס"מ קדחו שני חורים, כל אחד ברדיוס 5 ס"מ. מרכזי החורים נמצאים במרכזי שני רדיוסים של הדסקית, המאונכים זה לזה.
מצא את המרחק בין מרכז הדסקית למרכז הכובד שלה.

<u>הדרכה:</u> חשוב על החורים כעל משקל שלילי.

3. בשרטוט הבא, חשב באיזה יחס מחלקים EH ו FG זה את זה.



איור 10

4. בטטראדר ABCD מחברים את הקדקוד D ל M, אמצע התיכון CE בפאה ABC ומחברים את הקדקוד C ל N, אמצע התיכון DE בפאה ABD.
הוכח ששני הקטעים DM ו CN נפגשים ומצא באיזה יחס הם מחלקים זה את זה.

5. הוכח כי בטטראדר, הקטעים המחברים את נקודות האמצע של צלעות נגדיות של הטטראדר נפגשים שלושתם בנקודה אחת החוצה כל אחד מהם.

* * * * * * * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * * * * * * *

פתרונות

פתרון בעיה 1:

נסמן ב K_n את מכפלת המספרים הטבעיים שאינם גדולים מ n ואינם מתחלקים ב-5.

$$10000! = K_{10000} \cdot 5^{2000} \cdot 2000!$$

$$2000! = K_{2000} \cdot 5^{400} \cdot 400!$$

$$400! = K_{400} \cdot 5^{80} \cdot 80!$$

$$80! = K_{80} \cdot 5^{16} \cdot 16!$$

$$16! = K_{16} \cdot 5^{3} \cdot 3!$$

לכן

$$10000! = K_{10000} \cdot K_{2000} \cdot K_{400} \cdot K_{80} \cdot K_{16} \cdot 3! \cdot 5^{2499}.$$

מכך שמספר המספרים הטבעיים הזוגיים עד 10000 גדול מ-2499 נובע ש-2499 הספרות האחרונות של !10000 שוות ל-0, שהספרה ה-2500 שונה מ-0 והיא זוגית. במיוחד הספרה ה-1988 שווה ל-0. נחשב את הספרה ה-2500.

נסמן $N = K_{10000} \cdot K_{2000} \cdot K_{400} \cdot K_{80} \cdot K_{16} \cdot 3!$

הספרה ה- 2500 היא ספרת היחידות ב - $M = \frac{N}{2^{2499}}$.

$2N = 2^{2500}M$ לכן $2N \equiv 6M \equiv M \pmod{10}$ כי M זוגי.

מכך ש $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \quad 9 \equiv 6 \pmod{10}$

נובע ש $K_{10000} \equiv K_{2000} \equiv K_{400} \equiv K_{80} \equiv 6 \pmod{10}$

ו - $K_{16} \equiv 4 \pmod{10}$.

לכן $N \equiv 4 \pmod{10}$ ו - $M \equiv 8 \pmod{10}$, כלומר הספרה המבוקשת היא 8.

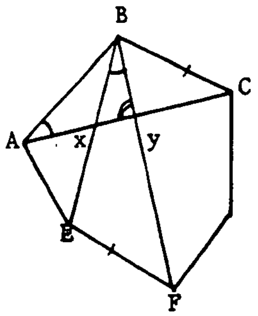
פתרון בעיה 2:

יהי BXY אחד המשולשים הנוצרים, ויהיו E,F קדקדי המצולע
הנמצאים בהמשך BX,BY בהתאמה, כמו בציור.

אזי: $\overline{EF} = \overline{BC}$

$\sphericalangle EBF = \sphericalangle BAC$

כזויות היקפיות הנשענות על מיתרים שווים במעגל החוסם את המצולע המשוכלל.



לכן $\sphericalangle XBY = \sphericalangle BAY$

$\sphericalangle BYX = \sphericalangle AYB$

(אותה זוית בשמות שונים).

לכן $\Delta XBY \sim \Delta BAY$

ומכאן $\dfrac{\overline{XB}}{\overline{XY}} = \dfrac{\overline{BA}}{\overline{BY}}$

או $\overline{XB} \cdot \overline{BY} = \overline{XY} \cdot \overline{BA}$

ואם $\overline{BA}=1$ אז $\overline{XB} \cdot \overline{BY} = \overline{XY}$ משי"ל.

(הערה: ההוכחה פועלת כמובן גם במקרה X=A או Y=C!)

פתרון בעיה 3:

נוכיח כי הבטוי $a^{4b}-a^{4c}$ מתחלק ב-240.

אם $b=c$ הטענה ברורה, אחרת נניח ש $b > c$

$$a^{4b}-a^{4c} = a^{4c}(a^{4(b-c)}-1)$$

הגורם השני מתחלק ב a^4-1. הגורם הראשון מתחלק ב a^4 לכן

מספיק להראות ש $a^4(a^4-1)$ מתחלק ב 240.

$$a(a^4-1)=(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)- 5(a^2-1)a$$

ולכן מתחלק ב - 5.

$a(a^2-1)=(a-1)a(a+1)$ מתחלק ב - 3 .

אם a זוגי, a^4 מתחלק ב - 16 .

אחרת, a^4-1 מתחלק ב - 16, כי

$$(2k+1)^4-1 = 16k^2(k+1)^2+8k(k+1)$$

ההצבה $a,b = 2$ $c = 1$ נותנת $a^{4b}-a^{4c} = 240$, לכן המספר 240 הוא הגדול ביותר המחלק את הבטוי הנתון.

פתרון בעיה 4:

א. נשתמש בנוסחה $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

אזי עבור $\alpha=45^0$, $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ולכן $\sqrt{2}-1 = \frac{1-1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = \tan\frac{\alpha}{2} =$

ב. מאחר שפונקצית הטנגנס עולה בקטע $(-90^0,90^0)$ וטווחה הוא כל המספרים הממשיים, נוכל להתאים לכל a_i זוית יחידה α_i, $-90^0<\alpha_i<90^0$, כך ש - $a_i=\tan\alpha_i$. אזי

$$\frac{a_i-a_j}{1+a_ia_j} = \tan(\alpha_i-\alpha_j)$$

נניח כי $a_1<a_2<\ldots<a_9$, ואז $-90^0<\alpha_1<\ldots<\alpha_9 < 90^0$

מכאן $(\alpha_2-\alpha_1)+(\alpha_3-\alpha_2)+\ldots+(\alpha_9-\alpha_8)=\alpha_9-\alpha_1<180^0$

מאחר שבאגף שמאל שמונה מחוברים חיוביים, קיים לפחות ערך אחד של k כך ש -

$$0<\alpha_{k+1}-\alpha_k < \frac{180^0}{8} = 22^0.5$$

ואז $0<\tan(a_{k+1}-a_k)<\sqrt{2}-1$

הערה: מאחר שפונקצית הטנגנס מחזורית ניתן לשפר את התוצאה:

$$(\alpha_2-\alpha_1)+(\alpha_3-\alpha_2)+\ldots+(\alpha_9-\alpha_8)+(180^0+\alpha_1-\alpha_9)=180^0$$

הפעם באגף שמאל תשעה מחוברים חיוביים, ולכן קיים

$$0<\alpha_{k+1}-\alpha_k \le \frac{180^0}{9} = 20^0$$

או $$0<180^0+\alpha_1-\alpha_9 \le 20^0$$

במקרה הראשון $$0<\tan(\alpha_{k+1}-\alpha_k) \le 20^0$$

ובשני $$0<\tan(\alpha_1-\alpha_9) \le 20^0$$

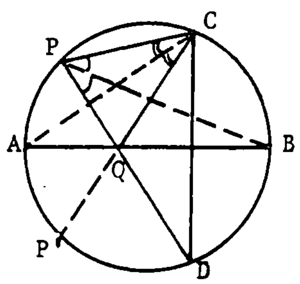
והתוצאה היא: קיים לפחות זוג אחד של מספרים המקיים

$$0 < \frac{a_i-a_j}{1+a_i a_j} \le \tan 20^0$$

__פתרון בעיה 5:__

נניח כי P נמצאת על קשת המעגל בין A ל-C.

מרכז המעגל החסום במשולש CPQ הוא פגישת חוצי הזוית שלו.



כעת, $\sphericalangle CPB=\sphericalangle BPD$, כזויות היקפיות הנשענות על קשתות שוות, וגם $\sphericalangle PCA=\sphericalangle ACQ$, כי מטעמי סימטריה חותך CQ את המעגל בנקודה P' הסימטרית ל-P ביחס ל-AB. לכן, מרכז המעגל החסום נמצא בנקודת החיתוך של AC והמיתר BP, וכאשר הנקודה P עוברת על הקשת AC, עוברת נקודה זו על כל הקטע AC. באופן דומה, אם P בין B ל-C, מתקבל הקטע BC והמקום הגאומטרי המבוקש הוא צרוף הקטעים AC ו-BC.

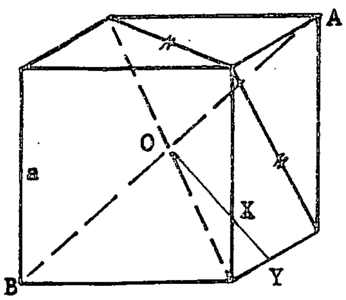
פתרון בעיה 6:

יהיה a אורך הקטע הנתון.

נניח שהטענה לא נכונה. נבחר נקודה A ונצייר מעגל שמרכזו ב-A ורדיוסו $a\sqrt{3}$. כל הנקודות על המעגל הן באותו צבע כמו A. כדי לבדוק זאת בחר נקודה C על המעגל ובנה דלתון ABCD כך ש - ΔABD ו-ΔCBD הם משולשים שווי צלעות שאורך-צלעותיהם a. לפי ההנחה ל-A,D,B צבעים שונים ול-C,B,D צבעים שונים. מכאן ל-C,A אותו צבע. נבחר על המעגל שתי נקודות שמרחקן a ונקבל סתירה.

פתרון בעיה 7:

תהי XY צלע כללית של המשושה. אזי $\overline{AX}=\overline{XB}$. אם O מרכז הקוביה, OX תיכון לבסיס במשולש שווה שוקיים ולכן גם גבה, כלומר $OX \perp AB$. לכן המשושה . . . XY במישור אחד הניצב ל-AB ב-O, המשושה XY חסום במעגל, כי $\overline{OX} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ וצלעותיו שוות, כי $\overline{XY} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ (הן $\overline{OX}$ והן $\overline{XY}$ שווים לחצי אלכסון הפאה של הקוביה, כפי שאפשר לקבל ממשפט קטע האמצעים).



לכן הוא משוכלל. הוכחה שניה - תוך שימוש בגאומטריה אנליטית במרחב: יהיו קדקדי הקוביה $(\pm1 , \pm1 , \pm1)$, כאשר שמונה צרופי הסימנים אפשריים. תהיינה הנקודות A,B $A(1,1,1)$ ו-$B(-1 , -1 , -1)$. אזי כל קדקדי המשושה נמצאים במישור $x+y+z=0$.

אורכי כל הצלעות הם $\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$

וקוסינוסי כל הזוויות הם (לפי משפט הקוסינוסים)

$$\cos\alpha = \frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{1^2+2^2+1^2})^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

כלומר $\alpha = 120^0$.

פתרון בעיה 8:

תנאי הזוגיות איננו משתנה ע"י פעולות מותרות והוא שקול לכך שכל שתי שורות הן שוות או הפוכות וכל שני עמודים הם שווים או הפוכים. זה שקול לכך שניתן להגיע ע"י פעולות מותרות לכך שכל השורות שוות ת וכל העמודות שוות, כלומר כל המטבעות מונחות על אותו צד.

* *
* *

תחרות - בעיות

65. $\frac{n(n+1)}{2}$ כדורים זהים מחולקים ל k קבוצות. נוטלים כדור אחד מכל קבוצה ויוצרים מ k הכדורים קבוצה חדשה. ממשיכים בצורה דומה. (לוקחים כדור מכל אחת מקבוצות החלוקה החדשה ויוצרים קבוצה חדשה).

הוכח שלאחר מספר סופי של חלוקות שתתקבלנה בצורה כזו, יסתיים התהליך בחלוקה שבה n קבוצות. בקבוצה אחת כדור אחד, בקבוצה השניה - 2 כדורים, ... בקבוצה האחרונה - n כדורים.

* *
* *