

מושב: חינוך מתמטי

יו"ר המושב:

ד"ר ג'ייסון קופר, מכון ויצמן למדע

ד"ר אנטולי קורופטוב, המרכז האקדמי לוינסקי-וינגייט

## Practical implications of research on learning and teaching proof

Prof. (emeritus) Tommy Dreyfus, Tel Aviv University

The degree of reproducibility of research results in mathematics education is low. This raises the question whether there are any robust results at all. The Education Committee of the European Mathematical Society has published about a dozen "Solid findings in Mathematics Education". One of them deals with high school students' difficulties to grasp that a theorem has no exceptions. This has practical implications for teaching proof at school. Another robust result is that active learning increases performance and narrows achievement gaps in university level STEM courses. Together with a case study showing that even an outstanding lecturer failed to convey the main ideas of a proof in real analysis to the students in his class, this has practical implications for teaching proofs at the university level.

## הלכה למעשה: פרקטיקות להוראת מתמטיקה – סקירה ודין

פרופ' טלי נחליאלי, המרכז האקדמי לוינסקי-וינגייט

כדי ללמד מתמטיקה, נדרש ידע מסוג מיוחד, המכונה **ידע מתמטי להוראה**. ידע זה כולל ידע במתמטיקה, ידע על תלמידים ועל תהליכי למידת מתמטיקה כמו גם ידע על הוראה. פרקטיקות הוראה הן החוליה המקשרת בין הידע של העוסקים בהוראה שהוא רלוונטי להוראת מתמטיקה, לבין ההוראה שלהם בפועל. הטענה היא שעבודה מכוונת על פרקטיקות הוראה עשויה לעזור למורים ולמרצים להשתמש בידע שרכשו ברגעים רלוונטים כדי לקדם את למידת התלמידים. בהרצאה זו אתייחס תחילה לשאלה – מהן פרקטיקות הוראה, ואסקור מה ידוע במחקר לגבי פרקטיקות הוראה ייחודיות למתמטיקה – זיהוי של פרקטיקות כאלה, וכן תהליכי למידת פרקטיקות במסגרות של הכשרת מורים ושל פיתוח מקצועי של מורים. בנוסף, אתייחס לדוגמה של פרקטיקה אחת ספציפית להוראת מתמטיקה בכל הרמות, פרקטיקה של פיתוח עצמים מתמטיים. נבחן מה ידוע בספרות על פיתוח עצמים מתמטיים ואיך אפשר לפתח פרקטיקות הוראה מבוססות תאוריה כדי לעזור ללומדים לפתח עצמים מופשטים כמו פונקציה.

## השימוש בהקשרים חוץ מתמטיים להבניית ידע מתמטי מופשט

דפנה אליאס, אוניברסיטת תל אביב

השפעת השימוש בהקשרים חוץ מתמטיים בהוראת המתמטיקה היא תחום שנחקר לא מעט. נמצא, בין היתר, כי צורת לימוד זאת תומכת בלמידת המתמטיקה, מעוררת מוטיבציה אצל תלמידים ללמוד מתמטיקה, תומכת בלימוד של פתרון בעיות מחיי היומיום ומפחיתה מעוצמת התפיסה של המתמטיקה כגוף ידע מנותק. מניסיוני כמורה, ומניסיונם של רבים וטובים, השימוש בהקשרים חוץ מתמטיים יכול להיות כלי לפיתוח משמעותיות מעמיקות ומיטיבות למושגים מתמטיים מופשטים. יחד עם זאת, חשוב שפרקטיקות כאלה יתוכננו בקפידה ושמאפייני ההקשרים החוץ מתמטיים יתאימו למטרות הדידקטיות של ההוראה. נציג את המקרה של קצב שינוי, נראה דוגמאות אפשריות להצגה לתלמידים בשיעור מבוא לנושא זה, ונבין יחד מהם היתרונות והחסרונות של הדוגמאות השונות, וגם – מה היתרון המצרפי של מגוון דוגמאות להבניית המושג קצב שינוי אצל התלמיד.

### מידור ידע בנושא אינטגרלים

ליה נח-סלע, אוניברסיטת תל אביב

אובייקטים מתמטיים יכולים להופיע במגוון ייצוגים שונים ובמגוון הקשרים פְּנים וחוץ-מתמטיים. מחקרים מראים כי תלמידים מתקשים לקשר בין המופעים השונים של אובייקט מתמטי, מה שמוביל אותם לפעול בחוסר עקביות ובסתירות. בהרצאה אדון בקושי זה בהקשר של חדו"א. חדו"א הוא נושא הטומן בחובו קשיים רבים לתלמידים הן בתיכון והן באוניברסיטה. מחקרים מראים כי הידע של תלמידים בתחום זה פעמים רבות פרוצדורלי בלבד, ומוגבל לפתרון בעיות ספציפיות. בהרצאה אסביר מהו מידור ידע, ואציג נתונים ממחקר המדגימים כיצד הוא בא לידי ביטוי בקרב תלמידי תיכון ברמת 5 יח"ל הלומדים את נושא האינטגרל. נזהה התנהגויות שונות שיכולות להעיד על מידור ידע. כמו כן, נדון בגורמים אפשריים להיווצרות מידור ידע, בדגש על למידת האינטגרל. לבסוף, נדון בשאלה מה על מורים ומרצים לדעת לעשות על מנת לאפשר ללומדים שמבנים מושגים כגון אינטגרל לגשר על מידור ידע.

## **WRONG! Feedback on students' proofs and its potential affordances for proof comprehension**

Dr. Alon Pinto, Weizmann Institute of Science

One of the most dramatic changes in the transition from school to university is the expectation that much of the learning will take place outside class. In proof-based mathematics courses, students listen to their professors as they present proofs, and are expected to invest substantial time in continuing studying these proofs after class by reviewing lecture notes, reading the textbook, and by writing their own proofs. In many cases, the only feedback students receive for their work outside class is written comments on their

proofs that highlight their flaws. Research suggests that professors intend this feedback to not only lead students to write acceptable proofs, but also (mostly) to promote proof comprehension. Yet, if feedback is prescriptive, students may follow it without understanding why they are revising their proof in this particular way, and if it is not, students may find it difficult to interpret and apply the feedback they receive. Thus, unsurprisingly, students often opt to ignore the feedback they receive, and the learning opportunities it affords. In my presentation I will unpack what it means to *comprehend* a proof and discuss how practices of providing feedback on flawed students' proofs may (or may not) support proof comprehension. I will propose a particular kind of feedback – heuristic refutation feedback – for promoting proof comprehension, highlight pedagogical decisions entailed in formulating such feedback, and discuss how these decisions may shape students' engagement with proof comprehension.