J. HADAMARD

LA NOTION DE DIFFÉRENTIELLE DANS L'ENSEIGNEMENT

IV

La notion de différentielle dans l'enseignement.

Par

J. Hadamard, Paris.

POINCARÉ, dans sa conférence prononcée au Musée pédagogique de Paris en 1904, déclarait déjà qu'il y avait lieu de penser en dérivées et non en différentielles. Il me semble utile pour l'enseignement de se conformer résolument à ce principe et d'abandonner les explications assez compliquées qui sont classiquement données sur le symbole d. Pour la différentielle première, passe encore: Je puis comprendre l'égalité

$$dy = f'(x)\,dx \tag{1}$$

ou

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{1'}$$

en relation avec l'égalité approchée

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x \tag{2}$$

ou

$$\Delta z = p\Delta x + q\Delta y \tag{2'}$$

dans laquelle Δx, Δy, Δz sont des accroissements infiniment petits. Mais la différentielle seconde! J'ai lu, comme tout le monde, l'histoire de la différentielle de la variable indépendante qui doit être constante (et qui est d'ailleurs forcément variable puisque infiniment petite). Si je me suis décidé à ne pas exposer ces considérations dans les cours que j'ai eu l'occasion de professer sur les débuts du Calcul différentiel, c'est que j'avoue ne les avoir qu'à moitié comprises moi-même.

J'entends bien qu'elles doivent être toute de même compréhensibles et que, si elles m'avaient été nécessaires pour aborder, par exemple, les applications géometriques du calcul différentiel, je serais, je l'espère, arrivé à m'en rendre maître. Mais, précisément, tel n'a jamais été le cas. J'ai étudié comme tout le monde la Géometrie infinitesimale, sans que le fait de différentier deux fois me parût introduire des difficultés spéciales et sans penser jamais, je l'affirme, à laisser constante la différentielle de la variable indépendante.

Que signifie donc l'égalité (1)?

Tout simplement, que, x (et par conséquent $y=f(x)$) étant fonctions d'une variable auxiliaire quelconque u, on a, quelle que soit la relation entre x et u (pourvu que x'_u existe),

$$\frac{dy}{du}=f'(x)\frac{dx}{du}, \tag{3}$$

ce qui est le théorème des fonctions de fonctions.

Que signifie l'égalité (1')?

Que si x, y et, dèslors, $z=f(x,y)$ sont exprimés en fonctions d'une variable auxiliaire quelconque u, on a, quelles que soient ces expressions,

$$\frac{dz}{du}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{du}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{du}=p\frac{dx}{du}+q\frac{dy}{du}. \tag{3'}$$

Tel est le sens unique des égalités (1), (1'). Les égalités (3) et (3') ayant lieu quelle que soit la variable indépendante u en fonction de laquelle les autres variables sont exprimées, on supprime la mention de u. L'avantage précieux de la notation différentielle consiste précisément en la possibilité de ne pas préciser quelle est la variable que l'on considérera comme indépendante.

Que signifiera l'égalité

$$d^2y=f'(x)\,d^2x+f''(x)\,dx^2 \tag{4}$$

ou

$$d^2z=pd^2x+qd^2y+r\,dx^2+2s\,dx\,dy+tdy^2\,? \tag{4'}$$

Uniquement que l'on a

$$\frac{d^2y}{du^2}=f'(x)\frac{d^2x}{du^2}+f''(x)\left(\frac{dx}{du}\right)^2 \tag{5}$$

ou

$$\frac{d^2z}{du^2}=p\frac{d^2x}{du^2}+q\frac{d^2y}{du^2}+r\left(\frac{dx}{du}\right)^2+2s\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}+t\left(\frac{dy}{du}\right)^2 \tag{5'}$$

de quelque manière que les variables aient été exprimées en fonction du paramètre u, pourvu que l'on ne cesse pas d'avoir $y = f(x)$ ou $z = f(x, y)$.

Enfin, que signifie ou que représente l'égalité

$$d^2z = rdx^2 + 2s\,dxdy + tdy^2 ? \tag{6}$$

A mon avis, rien du tout. On peut, si l'on veut, noter que les deux premiers termes disparaissent au second membre de (5') lorsque x et y sont fonctions *linéaires* de u, comme il arrive dans les démonstrations du théorème de Taylor [seule question, à ma connaissance, qui nécessite l'intervention de l'expression (6)]. En dehors de ce cas, je ne vois pas ce qu'on peut tirer de (6), . . . si ce n'est peut être une ou deux idées fausses.

Rec. 27. XII. 22.