י. הדמר

מושג הדיפרנציאל בהוראה

מושג הדיפרנציאל בהוראה.

י. הדמר, פריס.

תרגם י. ולפסון, חרקוב.

פּוּאַנְקָרֶי בשעתו חוה דעתו, בדרשה שדרש במחיאון הפדגוגי של פריס בשנת 1904, כי המחשבה המדעית צריכה להשתמש בתולָדיות ולא בדיפרנציאלים. ולדעתי יפה הוא זה להוראה, אם נסתגל בהחלט לפרינציפיון הזה תסתלק מהבאורים הקלסיים המרכבים לְמַדַי שנותנים לסימבול d. אשר לדיפרנציאל הראשון, עדיין „בכי טוב" הוא. יְכוֹלַנִי להבין את השויון

$$dy = f'(x)\, dx \tag{1}$$

או

$$dz = pdx + qdy \tag{'1}$$

בקשור עם השויון המקורב

$$\Delta y = f'(x)\, \Delta x, \tag{2}$$

או

$$\Delta z = p\Delta x + q\Delta y \tag{'2}$$

שבו $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ הם הוספות קטנות בלי־סוף. אבל הדיפרנציאל השני! אף אני קראתי, ככל העולם כולו, את המעשיה על הדיפרנציאל של המשתנה החפשי שחיב הוא להיות קבוע ועומד (שהוא דרך אגב משתנה ביותר, מפני שהוא קטן עד לאין־סוף). ואשר נמרתי

בלבי לבלי הכנים סברות אלו בקורסי החשבון הדיפרנציאלי כשנזדמן לידי להרצות באותו ענין, אינו אלא משום, שמודה אני שאני גופי איני מבין אותן אלא לחצאין.

ומכל מקום נהיר לי הדבר שֶׁכַּוָּנוֹ הללו להבנה, ואלו הייתי זקוק להן, למשל, לשם פתיחתם של השמושים הגיאומטריים לחשבון הדיפרנציאלי, כי אז מִקְּרָה אני שהייתי מברר לי את כל הענין כהוגן. אולם מימי לא בא מקרה כזה לידי. ככל העולם כולו אף אני למדתי את הגיאומטריה האינפיניטזימלית, מבלי אשר אראה קושי מיוחד בהשנות הדיפרנציאציה פַּעֲמַיִם, ומבלי אשר יעלה במחשבתי אף פעם אחת, זאת אני אומר בהחלט, להשאיר את הדיפרנציאל של המשתנה החפשי קבוע ועומד.

ובכן, השויון (1) מה הוא בא להשמיענו?

בפשטות גמורה אין בו אלא זה: אם x (ולכן גם $[y = f(x)]$) הוא פונקציה של איזה משתנה עוזר u, אז, יהי איזה שיהית היחס בין x ובין u (ובלבד שיהיה במציאות x'_u), תמיד יש לנו

$$\frac{dy}{du} = f'(x)\frac{dx}{du} \tag{3}$$

וזהו המשפט על הפונקציות של פונקציות.

והשויין (1') מה הוא בא להשמיענו?

שאם $[x, y]$, ולכן גם $[z = f(x, y)]$, באים בצורות פונקציות של איזה משתנה עוזר u, אז, תהיינה אי־אלו שתהיינה הצורות ההן, תמיד יש לנו

$$\frac{dz}{du} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{du} = p\frac{dx}{du} + q\frac{dy}{du} \tag{'3}$$

וזהו משמעותם היחידה של השויונים (1), (1'). הואיל והשויון (3) או (3') נכון לגבי כל משתנה חפשי שיהיה u, שבצורות פונקציותיו באים המשתנים האחרים, לכן משמיטים את u. והיתרון רב־הערך של הסִמּוּן הדיפרנציאלי הוא דוקא באפשרות זו שלא לפרש, איזה משתנה נקבל בתור משתנה חפשי.

מה אומר השויון

$$d^2y = f'(x)\,d^2x + f''(x)\,dx^2 \tag{4}$$

או

$$d^2z = pd^2x + qd^2y + r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2? \tag{'4}$$

הרי אינו אומר, אלא שלעולם יש לנו

$$\frac{d^2y}{du^2} = f'(x)\frac{d^2x}{du^2} + f''(x)\left(\frac{dx}{du}\right)^2 \tag{5}$$

או

$$\frac{d^2z}{du^2} = p\frac{d^2x}{du^2} + q\frac{d^2y}{du^2} + r\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + 2s\frac{dx}{du}\frac{dy}{du} + t\left(\frac{dy}{du}\right)^2 \tag{'5}$$

תהיינה אי־אלו שתהיינה הצורות שבהן באים המשתנים בתור פונקציות של הפָּרָמֶטֶר u, ובלבד שלא יחדל להיות

$$y = f(x)$$

או

$$z = f(x, y)$$

לאחרונה, מה יש בו ומה בא להשמיענו השויון

$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 ? \tag{6}$$

לדעתי, אינו אומר ולא כלום. לכשנרצה יכולים אנו להעיר, כי שני האברים הראשונים באגף השני של ($5'$) מתאפסים אם x ו־y הם פונקציות קַוִיּוֹת של u. מקרה כזה בא בהוכחת משפט טֵילוֹר (השאלה היחידית, עד כמה שאני יודע, שבשבילה אנו זקוקים לפורמולה (6)). מלבד זה, אין אני רואה מה שניתן להוציא מתוך (6),... כשנהיה חוששים לדעות מוטעות.