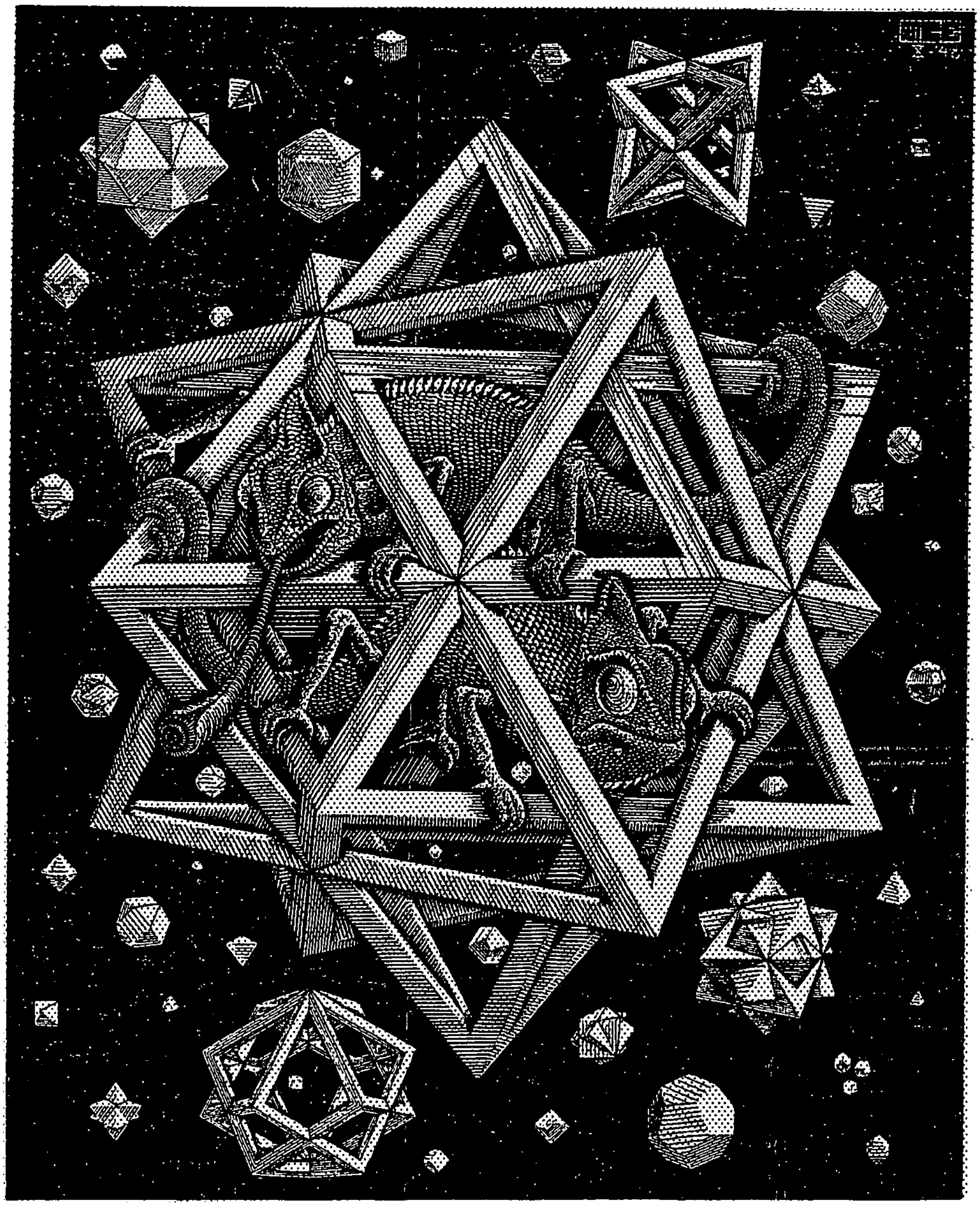
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס. 3 טבת תשמ"ו דצמבר 1985



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון וייצמן למדע
רחובות

בחסות המרכז המדעי י.ב.מ. ישראל

תוכן העניינים

עמוד

דבר המערכת	3
ו. גרשוביץ, אי שוויונות בין ממוצעים - המשך	9
שאלה - מהו סכום הזויות	9
ר. רוטנברג, טרנספורמציות של המישור - סיבובים	10
מהו סכום הזויות - פתרון	19
פתרונות לשאלות האולימפיאדה הבינלאומית	20
שאלה - a מחלק את b	23
אולימפיאדה לנער במתמטיקה - מכון ויצמן	24
בעיות	24
פתרונות	26
מספר משוכלל נוסף	31
a מחלק את b - רמז	31
תחרות הבעיות	32
פתרונות	32
בעיות חדשות	34

אתגר - גליונות מתמטיקה

מוצא לאור ע"י הפקולטות למתמטיקה בטכניון ובמכון ויצמן.

המערכת: פרופ' א. ברמן, הפקולטה למתמטיקה, הטכניון.

פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שמושית, מכון ויצמן.

מען המערכת: הפקולטה למתמטיקה, הטכניון, מכון טכנולוגי לישראל,

חיפה 32000, טל. 294277/8

ד ב ר - ה מ ע ר כ ת

גליון מס' 3 הוא במדה רבה גליון של המשך. בראשיתו מובא סיום המאמר על אי-שויונות בין ממוצעים, בהמשכו מוצעים פתרונות לבעיות האולימפידה-הבינלאומית שהובאו בגליון מס' 2 ופתרונות לבעיות 4, 5 ו 6 של תחרות הבעיות. נזכיר כי את הפתרונות לבעיות של גליון מס' 2 יש לשלח עד סוף דצמבר והם יפורסמו בגליון הבא.

המאמר החדש בגליון הנא מאמר בגאומטריה העוסק בטרנספורמציות של המישור. כמו-כך מובאים בגליון בעיות ופתרונות של האולימפידה לנער שהתקיימה בשנה שעברה במכון ויצמן. הבעיות והפתרונות של התחרות על שם פרופ' גרוסמן שהתקיימה בל"ג בעמר בטכניון יפורסמו בגליון הבא.

* * * * *

* * * *

אי שויונות בין ממוצעים - המשך

ולדימיר גרשוביץ

האוניברסיטה העברית וביה"ס התיכון ליד האוניברסיטה, ירושלים.

IV. ממוצע החזקה

יהיו שוב a ו b מספרים חיוביים.

נרשם את הממוצעים שהכרנו בצורה אחידה:

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{\frac{1}{-1}}$$

$$A = \frac{a+b}{2} = \left(\frac{a^{1}+b^{1}}{2}\right)^{\frac{1}{1}}$$

$$R = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$G = \sqrt{ab} = \ ?$$

נמתין מעט עם ההצגה של G ונסמן

$$M(x) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

לפונקציה $M(x)$ נקרא ממוצע החזקה של a ו b. היא מוגדרת לכל $x \neq 0$,

וקיים $R=M(2)$, $A=M(1)$, $H=M(-1)$.

ערכים מענינים נוספים של פונקצית ממוצע החזקה מתקבלים כאשר לוקחים

את הממוצע החשבוני של A ו G

$$\frac{A+G}{2} = \frac{\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}}{2} = \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{4} = \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{2}}} = M(\tfrac{1}{2})$$

ואת הממוצע ההרמוני בין G ו H

$$\frac{2}{\frac{1}{H}+\frac{1}{G}} = \frac{2HG}{H+G} = \frac{2\,\frac{2ab}{a+b}\,\sqrt{ab}}{\frac{2ab}{a+b}+\sqrt{ab}} = \left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{-\frac{1}{2}}} = M(-\tfrac{1}{2})$$

(על ממוצעים של ממוצעים נרחיב את הדבור באחד המאמרים הבאים).

ברור כי

$$G \le \frac{G+A}{2} \le A$$

ו

$$H \le \frac{2}{\frac{1}{H}+\frac{1}{G}} \le G$$

כלומר

$$(*) \quad M(-1) \le M(-\tfrac{1}{2}) \le G \le M(\tfrac{1}{2}) \le M(1) \le M(2)$$

מושג ממוצע החזקה נתן להכללה עבור n מספרים אי שליליים, $a_1, \dots, a_n$

$$M(x) = \left(\frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n}\right)^{1/x}$$

בפרט, $M(1)$ הוא הממוצע החשבוני,

הממוצע ההרמוני הוא

$$H = \left(\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}\right) = M(-1)$$

והממוצע הרבועי הוא

$$R = \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}} = M(2)$$

שרשרת אי השוויונות (*) היא מקרה פרטי של המשפטים הבאים:

<u>משפט 2</u>. פונקצית ממוצע החזקה $M(x)$ היא מונוטונית עולה. הפונקציה עולה ממש פרט למקרה בו כל המספרים $a_1, \dots, a_n$ שוים.

<u>משפט 3</u>. הגבול של $M(x)$, כאשר x שואף ל 0 הוא G. כלומר, למרות שהבטוי $\left(\frac{a_1^0 + \dots + a_n^0}{n}\right)^{1/0}$. אינו מוגדר נוכל לרשם $M(0) = G$.

בהוכחת משפט 2 נעזר בטענה הבאה המבוססת על משפט 1 (גליון מס' 2).

<u>טענת עזר</u>

אם $0 \le \alpha < 1$ ו $x + 1 \ge 0$ אז

$$(1 + x)^\alpha \le 1 + \alpha x \ ,$$

שויון קיים אם ורק אם $x=0$.

<u>הוכחה</u> נניח תחילה כי α רציונלי, $\alpha = p/q$, p ו q שלמים, $1 \le p < q$.

$$(1+x)^\alpha = (1+x)^{p/q} = \Big(\underbrace{(1+x)\cdot \dots \cdot(1+x)}_{\text{פעמים } p}\cdot\underbrace{1\cdot \dots \cdot 1}_{\text{פעמים } q-p}\Big)^{1/q}$$

גדל זה אינו עולה, לפי המשפט על אי השויון בין הממוצע החשבוני וההנדסי על

$$\frac{\overbrace{(1+x) + \dots + (1+x)}^{\text{פעמים } p} + \overbrace{1 + \dots + 1}^{\text{פעמים } q-p}}{q} = \frac{p(1+x) + q-p}{q} =$$

$$= 1 + \frac{p}{q} x = 1 + \alpha x \ .$$

שויון קיים רק כאשר $1+x = 1$ כלומר כאשר $x=0$.

אם α אי רציונלי, תהיה $r_1, r_2, \dots$ סדרת מספרים רציונליים השואפים ל α.

אזי

$$(1+x)^\alpha = \lim_{n\to\infty} (1+x)^{r_n} \le \lim_{r_n \to \alpha} (1+r_n x) = 1+\alpha x \ .$$

גם כאן קיים שויון רק כאשר $x=0$, כי יהיה r רציונלי ויהיה $x\neq 0$ אזי

$$(1+x)^{\alpha} = ((1+x)^{\alpha/r})^r \leq (1+\frac{\alpha}{r}x)^r < 1+r\frac{\alpha}{r}x = 1+\alpha x.$$

<u>הוכחת משפט 2</u>

נזכר שממוצע החזקה מוגדר עבור כל x השונה מ 0. אם $a_1 = \ldots = a_n = a$

ברור ש $M(x)=a$ לכל $x\neq 0$.

אם לא כל n המספרים $a_1,\ldots,a_n$ שוים זה לזה, נראה שאם $\alpha<\beta$ אז

$M(\alpha) < M(\beta)$.

נבדיל בין שני מקרים.

א. ל α ו β סמנים שונים.

ב. ל α ו β אותו סמן.

(א) אם $\alpha < 0 < \beta$ אז

$$(a_1^{\beta} \cdots a_n^{\beta})^{1/n} < \frac{a_1^{\beta}+\ldots+a_n^{\beta}}{n}$$

(לפי משפט 1).

נעלה בחזקת $1/\beta$ ונקבל

$$G = (a_1 \ldots a_n)^{1/n} < \left(\frac{a_1^{\beta}+\ldots+a_n^{\beta}}{n}\right)^{1/\beta} = M(\beta) ,$$

בצורה דומה

$$(a_1^{\alpha} \ldots a_n^{\alpha})^{1/n} < \frac{a_1^{\alpha}+\ldots+a_n^{\alpha}}{n}$$

נעלה בחזקה השלילית $1/\alpha$

$$G = (a_1 \ldots a_n)^{1/n} > \left(\frac{a_1^{\alpha}+\ldots+a_n^{\alpha}}{n}\right)^{1/\alpha} = M(\alpha)$$

כלומר

$$M(\alpha) < G < M(\beta)$$

(ב). נטפל במקרה בו α ו β חיוביים. כאשר שניהם שליליים ההוכחה היא דומה. יהיו אם כך $0 < \alpha < \beta$.

נסמן

$$t = M(\beta) = \left(\frac{a_1^{\beta} + \dots + a_n^{\beta}}{n}\right)^{1/\beta}$$

צריך להראות ש

$$\left(\frac{a_1^{\alpha} + \dots + a_n^{\alpha}}{n}\right)^{1/\alpha} < t$$

או

$$\frac{\left(\frac{a_1^{\alpha} + \dots + a_n^{\alpha}}{n}\right)^{1/\alpha}}{t} < 1$$

או

$$\left[\frac{\left(\frac{a_1}{t}\right)^{\alpha} + \dots + \left(\frac{a_n}{t}\right)^{\alpha}}{n}\right]^{1/\alpha} < 1$$

נסמן

$$b_i = \left(\frac{a_i}{t}\right)^{\beta} \quad ; \quad i = 1,\dots,n$$

אזי צריך להוכיח ש

$$\left(\frac{b_1^{\alpha/\beta} + \dots + b_n^{\alpha/\beta}}{n}\right)^{1/\alpha} < 1$$

וכמובן מספיק להראות שהבטוי בתוך הסוגרים קטן מ 1 או

$$(**)\quad b_1^{\alpha/\beta} + \dots + b_n^{\alpha/\beta} < n$$

סכום ה b_iים הוא n כי

$$b_1 + \dots + b_n = \left(\frac{a_1}{t}\right)^{\beta} + \dots + \left(\frac{a_n}{t}\right)^{\beta} =$$

$$\frac{1}{t^{\beta}}\left(a_1^{\beta} + \dots + a_n^{\beta}\right) =$$

$$\frac{a_1^{\beta} + \dots + a_n^{\beta}}{\frac{a_1^{\beta} + \dots + a_n^{\beta}}{n}} = n$$

שוב נסמן $T_i = 1-b_i \quad ; \quad i=1, \dots ,n$

אזי סכום ה T_iים הוא 0.

נחזור ל (**) :

$$b_1^{\alpha/\beta} + \dots + b_n^{\alpha/\beta} =$$

$$(1+T_1)^{\alpha/\beta} + \dots + (1+T_n)^{\alpha/\beta} \quad .$$

נשים לב שתנאי טענת העזר מתקיימים:

$$1+T_i = b_i \geq 0 \quad , \quad 0 < \alpha/\beta < 1$$

ולכן

$$(1+T_1)^{\alpha/\beta} + \dots + (1+T_n)^{\alpha/\beta} \leq$$

$$1 + \frac{\alpha}{\beta} T_1 + \dots + 1 + \frac{\alpha}{\beta} T_n = n + \frac{\alpha}{\beta} (T_1 + \dots + T_n) = n \, .$$

לפי טענת העזר, קיים שויון רק כאשר כל ה T_iים שוים ל 0, לכן אם אם ה a_iים איננם שוים זה לזה קיים

$$(1 + T_1)^{\alpha/\beta} \dots + (1 + T_n)^{\alpha/\beta} < n$$

דבר המוכיח את (**) ואת המונוטוניות של $M(x)$.

<u>הוכחת משפט 3.</u>

$$a_i^X = e^{x \ln a_i} = 1 + x \ln a_i + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

כאשר ה c_iים הם מקדמים מתאימים. לכן

$$\frac{\Sigma a_i^x}{n} = 1 + \frac{x}{n} \Sigma \ln a_i + d_1 x^2 + d_3 x^3 + \dots$$

כאשר ה d_iים הם מקדמים מתאימים.

מכאן

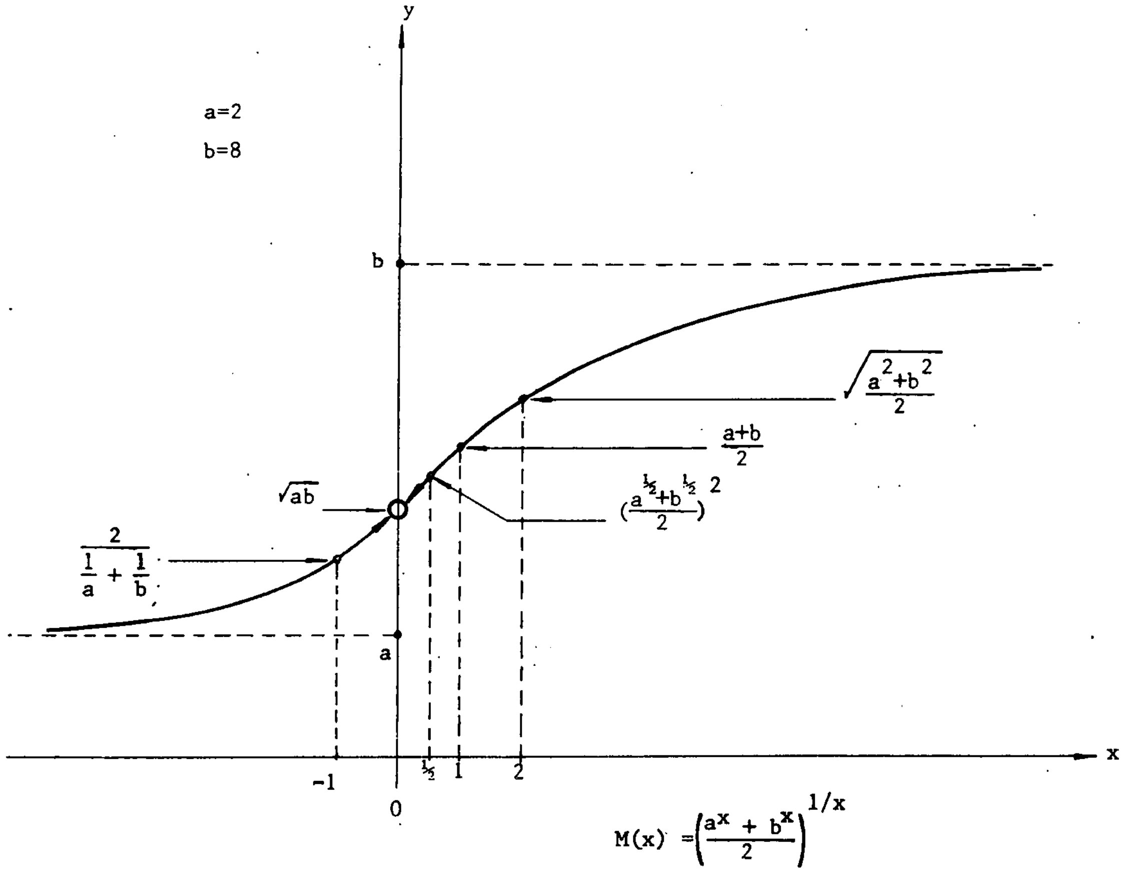
$$\frac{1}{x} \ln \frac{\Sigma a_i X}{n} = \frac{1}{n} \Sigma \ln a_i + d_1 x + d_3 x^2 + \dots$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln \frac{\Sigma a_i^x}{n} = \frac{1}{n} \Sigma \ln a_i$$

ו

$$\lim_{x \to 0} M(x) = G \, .$$

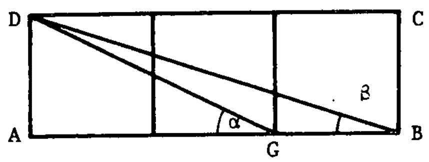
משפט 3 מראה שנתן לסלק את האירציפות של M(x) בנקודה x=0. הגרף של M(x) (עבור שני איברים a,b) מתואר בשרטוט הבא.



* * *
* *

<u>**שאלה - מהו סכום הזויות?**</u> (הוצעה ע"י ב.פ.)

נתון מלבן ABCD המורכב משלשה רבועים



מהו סכום הזויות ∢ ABD + ∢ AGD ?

טרנספורמציות של המישור-סיבובים

פרופ' ראובן רוטנברג
הטכניון

I. הקדמה והגדרות

א. במאמר זה נעסוק בטרנספורמציות של המישור ובמיוחד בסיבובים.

טרנספורמציות במישור מעניינות כשלעצמן אבל חשיבותן היא בשימוש בהן להוכחת משפטים ולבניות שונות, שבלעדי הטרנספורמציות המשימה היתה קשה ביותר. לכן כאן נעסוק יותר בשימושים מאשר בתכונות של הטרנספורמציות הנדונות. את התכונות הדרושות לנו נצטט ולרוב נשאיר את הוכחתן לקורא. נסמן את אוסף נקודות המישור ב E^2, את הנקודות באותיות גדולות A',B,A וכד', את הישרים באותיות קטנות $\ell,p,q,a,b,\ldots$, אורך הקטע $\overline{AB}$ (שהוא גם המרחק בין A ל-B) נסמן ב $|AB|$, כאשר $0\leq|AB|$ תמיד; גודל של זוית יסומן ב θ,ϕ (כאן נשתמש במעלות, אבל אפשר גם ברדיאנים), נרשה ל ϕ או θ להיות שלילי חיובי או אפס, עם ערכים כלשהם (לפי הצורך או הרצון) כגון $+428^0$ או -835^0 וכן-הלאה. הזוית (לא גודלה) שקדקודה A ושוקיה הקרניים $\vec{AB}$ ו $\vec{AC}$ תסומן כמקובל ב- $\measuredangle BAC$, וגודלה יסומן $m\measuredangle BAC$.

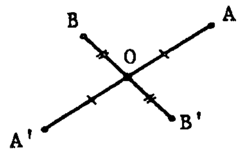
ב. **הגדרת טרנספורמציה:** טרנספורמציה T של המישור E^2, היא העתקה (פונקציה) שתחום הגדרתה הוא E^2 וגם טווחה E^2, כאשר T היא חד-חד-ערכית (חח"ע) ו"על" E^2. נזכיר פרוש מושגים אלה: T היא חח"ע אם לכל שתי נקודות B,A גורר $B\neq A$ $T(B)\neq T(A)$, או לחלופין אם $T(A)=T(B)$ אזי $A=B$. "על" E^2 משמעותו: לכל נקודה Y ב E^2 קיימת נקודה X כך ש $T(X)=Y$. בהמשך, נסמן ב A' את תמונתה של A על-ידי T: $T(A)=A'$, $T(B)=B'$ וכן-הלאה.

ג. **דוגמאות**

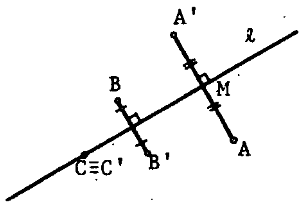
1. **זהות:** תהי T העתקה מ E^2 ל E^2 מוגדרת ע"י $T(A)=A$ לכל A. אזי T היא טרנספורמציה של E^2, קוראים לה "טרנספורמצית "הזהות", ונסמן אותה בהמשך ב e: $e(A)=A$ לכל נקודה A ב E^2.

2. <u>שיקוף בנקודה:</u> תהי O נקודה קבועה במישור; נגדיר העתקה T של E^2 ע"י: אם $T(A)=A'$ אזי O היא אמצע הקטע $\overline{AA'}$; לכן $|OA|=|OA'|$ ו A',A,O הן על ישר אחד (ראה איור 1), כמו-כן נגדיר $T(O)=O$ (אומרים ש O היא נקודת "שבת" של T). העתקה T זאת היא "על" וחח"ע ז"א היא טרנספורמציה של המישור E^2, קוראים לה "שיקוף המישור בנקודה O", O הוא "מרכז" השיקוף; נסמן שיקוף ב O ב σ או σ_0 (σ=סיגמא). לעתים, שיקוף ב-O נקרא גם "סימטריה ביחס ל-O", אם $\sigma_0(A)=A'$ אומרים ש A ו A' סימטריות ביחס ל-O.

3. <u>שיקוף בישר:</u> יהיה ℓ ישר קבוע ב E^2, נגדיר העתקה T של E^2 דלהלן: אם $T(A)=A'$ אזי ℓ הוא אנך-אמצעי לקטע $\overline{AA'}$ לכל A שאיננה על ℓ, לכן $\overline{AA'}$ ניצב ל ℓ ואם $\ell\cap\overline{AA'}=M$ אזי $|MA|=|MA'|$. לכל A שהיא על ℓ, נגדיר $T(A)=A$ (נקודות ℓ הן נקודות "שבת" של T). העתקה זו היא טרנספורמציה של E^2 הנקראת "שיקוף בישר ℓ" (או סימטריה ביחס ל ℓ), ℓ נקרא "ציר" השיקוף. נסמן שיקוף בישר ℓ ב σ_ℓ. (ראה איור 2).

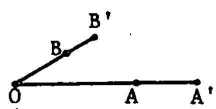


<u>איור מס' 1</u>

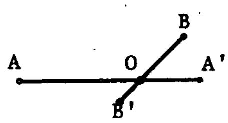


<u>איור מס' 2</u>

4. <u>מתיחה</u> תהי O נקודה קבועה במישור, k מספר ממשי קבוע נתון, $o\neq k$. תהי T העתקה מוגדרת ב E^2 ע"י: לכל A $(A\neq O)$, תמונתו $T(A)=A'$ נמצאת על הישר המחבר O ל A במרחק מ O: $|OA|=|OA'|$ $|k|$, A' מצדו של A ביחס ל O אם $o<k$ (איור 3, בו $k=\frac{3}{2}$), מצדו השני אם $o>k$ (איור 4, בו $k=-\frac{1}{2}$). כמו-כן O היא נקודת שבת $T(O)=O$.



<u>איור מס' 3</u>



<u>איור מס' 4</u>

T היא טרנספורמציה של המישור הנקראת "מתיחה", O הוא מרכז המתיחה ו-k יחס המתיחה; מסמנים מתיחה עם מרכז O ויחס k ב $H_{O,k}$. כש $k=1$ המתיחה היא למעשה הזהות e וכש $k=-1$ המתיחה היא שיקוף ב O: $H_{(O,-1)}=\sigma_O$

ד. **טרנספורמציה הפוכה:** תהי T טרנספורמציה של E^2. נגדיר בעזרת T העתקה שנית S באופן הבא: לכל נקודה A במישור: $S(A)=B$ אם ורק אם $T(B)=A$. במלים אחרות, אם A היא תמונת B בהעתקה T אזי B היא תמונת A בהעתקה S. מאחר ו T היא "על", לכל A קיימת B כך ש $T(B)=A$ ולכן S מוגדרת לכל A: $S(A)=B$. כמו כן, T היא חח"ע, זה אומר ש A היא תמונה של B יחיד, לכן $S(A)=B$ מוגדר באופן חד-משמעי. ברור מזה ש S עצמה היא חח"ע ו"על" E^2, זאת-אומרת S היא טרנספורמציה של E^2; קוראים ל S "הטרנספורמציה ההפוכה" של T ומסמנים $T^{-1}=S$ (שים לב שאז $S^{-1}=T$).

בדוגמאות שבסעיף הקודם, רואים מיד ש: $e^{-1}=e$, $\sigma_O{}^{-1}=\sigma_O$ ו $\sigma_\ell{}^{-1}=\sigma_\ell$
זאת אומרת שטרנספורמצית הזהות ושיקופים בנקודה, או בישר הן הפוכות של עצמן.
לעומת זאת, עבור מתיחה $H_{(O,k)}$, המתיחה ההפוכה היא: $H_{(O,\frac{1}{k})}$

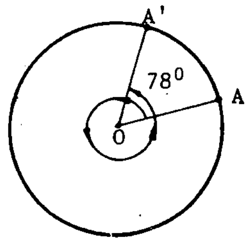
$$H^{-1}{}_{(O,k)}=H_{(O,\frac{1}{k})}$$

ה. **איזומטריה:** העתקה T של המישור נקראת "איזומטריה" אם היא "שומרת מרחק" וזה אומר: לכל שתי נקודות B,A אם $T(A)=A'$, $T(B)=B'$ אזי $|AB|=|A'B'|$. דוגמאות 3,2,1 בסעיף ג' לעיל (זהות, שיקופים) הן איזומטריות של המישור, אבל מתיחה $H_{(O,k)}$ כאשר $|k|\neq1$ איננה איזומטריה. ניתן להוכיח שכל איזומטריה היא טרנספורמציה של המישור. כמו-כן ההעתקה ההפוכה של איזומטריה אף היא איזומטריה, "האיזומטריה ההפוכה" (קל להוכיח זאת).

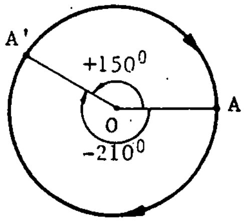
II. **סיבובים במישור**

א. **הגדרה:** תהי O נקודה קבועה ב E^2, ϕ גודל נתון של זוית ונגדיר העתקה ב E^2 שנסמנה ב ρ (האות היוונית "רו"): $\rho(O)=O$ (O היא נקודת שבת) ולכל נקודה $A\neq O$ תמונתה $\rho(A)=A'$ מתקבלת באופן הבא: נחבר

A ל 0 ונסובב את הקטע $\overline{OA}$ סביב 0 בזוית שגודלה ϕ: נגד כוון מחוגי השעון אם $\phi>0$, בכוון מחוגי השעון אם $\phi<0$. יתכן גם ש $|\phi|>360^0$.



איור מס' 5



איור מס' 6

למשל אם $\phi = +438^0$ (איור 5) נסובב $\overline{OA}$ סביב 0 נגד כוון השעון סיבוב שלם כך שנחזור למצב המקורי, ונמשיך לסובב בעוד 78^0 נגד כוון השעון, יחד סובבנו את הקטע בזוית: $438^0 = 360^0+78^0$ כדרוש. אם $\phi = -930^0$ (איור 6) נסובב $\overline{OA}$ סביב 0 לפי כוון השעון סבוב שלם אחד (-360^0) עוד סבוב שלם (עוד -360^0) ועוד 210^0, יחד: $-930^0=(-360^0)+(-360^0)+(-210^0)$ כדרוש.

בתנועת סיבוב הקטע $\overline{OA}$, 0 נשארת קבועה והקצה השני של הקטע (שבמקורו נמצא ב A) נע על היקפו של מעגל ש 0 מרכזו ומחוגו $= |OA|$. בתום הסיבוב בזוית ϕ קצה שני זה יעצור בנקודה שהיא הנקודה $\rho(A)=A'$ המבוקשת. העתקה זאת של E^2 נקראת "סיבוב" סביב 0 שהוא מרכז הסיבוב ובזוית סיבוב ϕ; כפי שאמרנו מסמנים סיבוב ב ρ או ב: $\rho_{(0,\phi)}$ כשרצוי להדגיש את 0 ו ϕ.

ב. הערות

1. ברור שאם נוסיף ל ϕ מספר סיבובים שלמים בכוון האחד או ההפוך, לא נשנה את מיקומה הסופי של הנקודה $\rho(A)=A'$. במלים אחרות אם $\phi'=\phi+n\cdot360^0$ כאשר n מספר שלם חיובי, שלילי או אפס, אזי לכל נקודה A במישור: $\rho_{(0,\phi')}(A)=\rho_{(0,\phi)}(A)$; לכן למעשה נקבל אותה העתקה, באופן סימלי: $\rho_{(0,\phi)}=\rho_{(0,\phi')}$. קל להוכיח כי אפשר תמיד למצוא n כזה ש $-180^0<\phi'\le+180^0$.

למשל אם $\phi = -930^0$, עבור n=3 נקבל $\phi' = -930^0 + 3\times360^0 = +150^0$ לכן $\rho_{(0,-930^0)}=\rho_{(0,+150^0)}$. או אם $\phi=280^0$, נבחר n = -1 ואז $\phi'=280^0-360^0 = -80^0$ לכן $\rho_{(0,280^0)}=\rho_{(0,-80^0)}$. בהמשך, נניח תמיד כי זוית הסיבוב ϕ היא בתחום $-180^0 <\phi\le180^0$.

2. אם $\phi=0^0$ (באופן כללי יותר $\phi=n\cdot 360^0$) הסיבוב $\rho_{(0,0^0)}$ הוא טרנספורמצית הזהות: $\rho_{(0,0^0)}(A)=A$ לכל A ב E^2. לכן הזהות היא מקרה פרטי של סיבוב.

3. אם $\phi = +180^0$ (או $\phi = -180^0$) הסיבוב $\rho_{(0,180^0)}$ הוא שיקוף בנקודה 0: σ_0 שהגדרנו בדוגמא 2 (ראה סעיף 2-ג' I). לכן שיקוף בנקודה הוא מקרה פרטי של סיבוב, קוראים לו, מסיבה זאת, "חצי-סיבוב". כל התכונות של סיבוב שנביא בהמשך הן בתוקף גם לחצי-סיבוב, אבל לחצי-סיבוב (שיקוף בנקודה) יש תכונות נוספות.

4. ברור שבכל סיבוב ρ סביב 0 אם $\rho(A)=A'$ אזי $|OA|=|OA'|$.

5. אם $\phi\neq 0^0$, מרכז הסיבוב 0 היא נקודת השבת היחידה של הסיבוב.

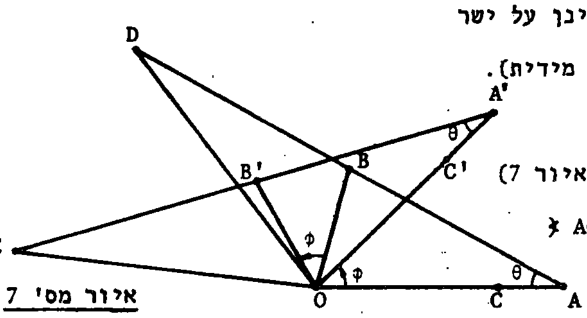
ג. <u>תכונות של סיבוב</u>: נביא להלן תכונות עיקריות של סיבוב במישור. בכל סעיף מתיחסים לסבוב מסוים ρ, סביב מרכז 0 וזוית ϕ נתונים, $-180^0 < \phi\leq 180^0$. כפי שהערנו לעיל, נוכיח מעט.

1. העתקת סיבוב היא איזומטריה של E^2 לכן היא טרנספורמציה של E^2.

נוכיח זאת כש O,B,A אינן על ישר אחד. (אם הן על ישר אחד, ההוכחה מידית).

ידוע לנו כי $m\angle BOB' = m\angle AOA' = \phi$ ו $|OA|=|OA'|$, $|OB|=|OB'|$ (ראה איור 7)

לכן: $\angle AOB = \angle A'OB' = |\phi| + \angle A'OB$



איור מס' 7

לכן המשולשים OAB , $OA'B'$ חופפים לפי צ.ז.צ. והמסקנה היא $|AB|=|A'B'|$ מ.ש.ל. נעיר כי יתכנו מקרים בהם $\angle A'OB'=\angle AOB=\angle BOA'-|\phi|$ ולא כמו באיור 7. צייר לעצמך מקרים שונים.

2. אם ℓ הוא ישר דרך המרכז 0, התמונות של הנקודות של ℓ הן נקודות על ישר p דרך 0 כך שהזוית בין ℓ ל p היא ϕ, ולהיפך כל נקודה על p היא תמונה של נקודה על ℓ. כי (ראה שוב איור 7) אם $\rho(A)=A'$

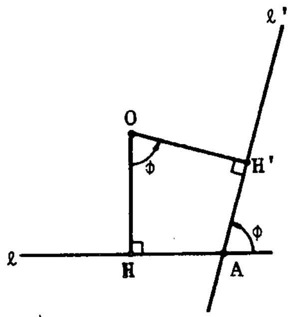
אזי $m\angle AOA'=\phi$ ו C נקודה על $\ell=OA$, $\rho(C)=C'$ אז $m\angle COC'=\phi$, ז"א $m\angle AOC'=\phi$ זה דורש ש C' ימצא על $p=OA'$. ולהיפך. נסמן $\phi(\ell)=p=\ell'$, ונאמר שתמונה על-ידי סיבוב של ישר דרך 0 היא ישר דרך 0, נוסיף שאם $\phi=\pm 180^0$ אז $\ell=\ell'$.

3. אם ℓ הוא ישר שאיננו עובר דרך המרכז 0, התמונות של הנקודות של ℓ הן נקודות על ישר שני ℓ' ולהיפך כל נקודה של ℓ' היא תמונה של נקודה על ℓ.

הוכחה: נשתמש שוב באיור 7, תהינה B,A שתי נקודות על ℓ, $B'A'$ תמונותיהן ע"י הסיבוב $\rho_{(O,\phi)}$; כפי שראינו המשולשים OAB ו OA'B' חופפים, לכן $\theta=\angle OA'B'=\angle OAB$. תהי D נקודה שלישית על ℓ, ו E על הישר $\ell'=A'B'$ כך ש E,B',A' הן באותו סדר כמו D,B,A ו $|AD|=|A'E|$. אז המשולשים OAD ו OA'E חופפים לפי צ.ז.צ. לכן $|OE|=|OD|$ ו $m\angle AOD=m\angle A'OE$. מזה מקבלים ש $m\angle AOA'=m\angle DOE=\phi$. המסקנה היא: $\rho(D)=E$, והוכחנו כי תמונת נקודה D על ℓ היא נקודה E על ℓ'; ההיפך הוא דומה, שוב נרשום כאן $\rho(\ell)=\ell'$.

4. תמונתו של משולש ABC ע"י סיבוב $\rho_{(O,\phi)}$ היא משולש A'B'C' חופף לו. כי ρ היא איזומטריה והחפיפה נובעת ממקרה צ.צ.צ. מסקנה נוספת היא שסיבוב שומר על גודל זוויות, כי מחפיפת המשולשים ABC, A'B'C' נובע ש $m\angle BAC=m\angle B'A'C'$. מסקנה נוספת: אם p,q הם שני ישרים ניצבים זה לזה, אזי תמונותיהם p',q' על-ידי ρ הם ניצבים זה לזה.

5. נשתמש בתכונות לעיל כדי לתת בניה לישר $\rho(\ell)=\ell'$, כאשר ℓ אינו עובר דרך מרכז הסיבוב O (ראה איור 8): נוריד מ O ניצב ל ℓ הפוגש ℓ ב H. תהי $\rho(H)=H'$, אז תמונת הישר OH היא הישר OH' (סעיף 2 לעיל). H על ℓ לכן H' נמצאת על ℓ' שניצב ל OH' (סעיף 4), לכן דרך H' נעביר ישר ניצב ל OH', זהו הישר ℓ' המבוקש, כך בנינו $\rho(\ell)=\ell'$. אם $\phi=\pm180^0$, קל לבדוק שאז ℓ' מקביל ל ℓ, אבל אם $\phi\neq\pm180^0$,



איור מס' 8

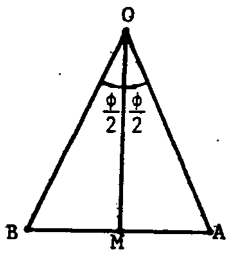
ℓ ו ℓ' נחתכים; תהי A נקודת החיתוך; אזי לפי משפט ידוע: מאחר ו ℓ

ו ℓ' ביצבים בהתאם ל OH ו OH', הזוית בין ℓ ל ℓ' שווה לזוית בין $\overline{OH}$ ל $\overline{OH'}$ ז"א ל ϕ. זאת אומרת הוכחנו תכונה נוספת: אם $\rho(\ell)=\ell'$, הזוית בין ℓ ל ℓ' שווה בגודלה לזוית הסיבוב ϕ. נדייק: צריך למדוד את הזוית בין ℓ ל ℓ' כשמסובבים ℓ סביב A בכוון שנקבע ע"י סימנו של ϕ עד שיתלכד עם ℓ'.

6. תמונת מעגל שמרכזו C ומחוגו r ע"י הסיבוב $\rho_{(O,\phi)}$ הוא מעגל שמרכזו $\rho(C)=C'$ ומחוגו r. הוכחה מידית.

7. יהיו נתונות שתי נקודות שונות B,A וזוית ϕ: $-180^0<\phi\le180^0$, אזי קיימת במישור נקודה אחת ויחידה O כך שהסיבוב $\rho_{(O,\phi)}$ מעתיק A ל B; $\rho_{(O,\phi)}(A)=B$.

<u>הוכחה:</u> אם $\phi=180^0$ אז ברור ש O היא אמצע הקטע $\overline{AB}$. אם $\phi\neq180^0$ השלם את ההוכחה בעזרת איור 9.



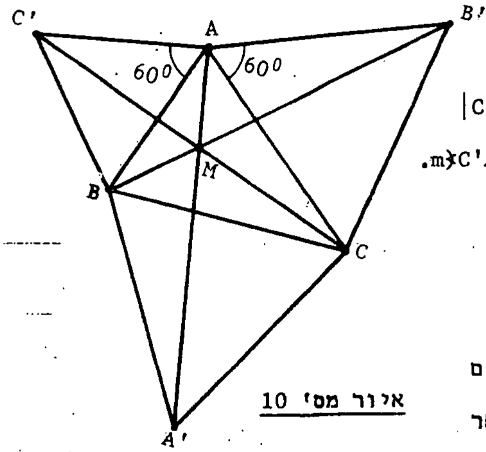
<u>איור מס' 9</u>

8. הטרנספורמציה ההפוכה של הסיבוב $\rho_{(O,\phi)}$ היא סיבוב סביב אותו מרכז O ובזוית $-\phi$: $\rho^{-1}_{(O,\phi)} = \rho_{(O,-\phi)}$. הוכחה פשוטה (ראה סעיף I ד' להגדרה).

III. <u>שימושים של סיבובים במישור:</u>

בפרק זה נביא מספר תרגילים ובניות בעזרת סיבובים במישור E^2.

1. יהי ABC משולש נתון, על כל צלע שלו, ומחוץ למשולש, נבנה משולשים שווי-צלעות: ABC', BCA', CAB' (כאן A',B',C' לא מתיחס לתמונות C,B,A ע"י טרנספורמציה). הוכח כי הקטעים AA', BB', CC' חופפים ונפגשים בנקודה אחת. (ראה איור 10), אנחנו נניח בהוכחה כי סדר הנקודות C,B,A על היקף המשולש הוא כמו באיור זה. ז"א נגד כוון השעון; אחרת צריך להחליף את סימני זוויות הסיבובים הנדונים.



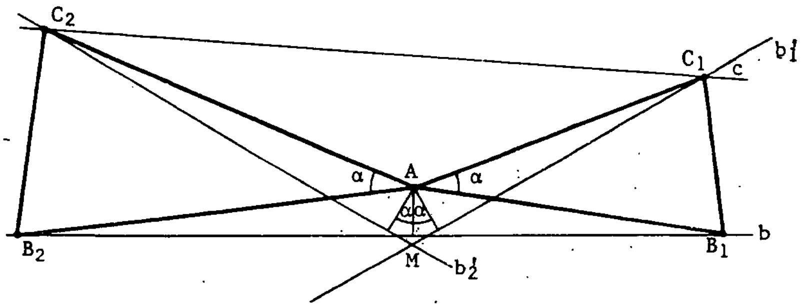
איור מס' 10

הוכחה: המשולשים שווי-צלעות, לכן $|C'A|=|BA|$ וכמו כן $|AB'|=|CA|$ $m\angle C'AB=m\angle CAB'=60^0$.
נובע מזה שאם ρ היא הסיבוב $\rho_{(A,+60^0)}$ אזי $\rho(C')=B$ ו $\rho(C)=B'$. ρ היא איזומטריה לכן $|BB'|=|CC'|$. באופן דומה ע"י סיבוב סביב B נוכיח כי $|CC'|=|AA'|$ זה מוכיח חפיפת הקטעים $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$. לפי תכונה 5 בפרק II, מאחר ו ρ מעתיק את הישר CC' על הישר BB', הזוית בין ישרים אלה היא בת $+60^0$; לכן אם CC' חותך BB' ב M ; $m\angle CMB'=60^0$ ואז $m\angle BMC=120^0$; אבל $m\angle BA'C=60^0$, מכאן שהמרובע $BA'CM$ חסום במעגל. במעגל זה הזויות ההיקפיות $\angle A'MC$ ו $\angle A'BC$ נשענות על אותו מיתר $\overline{A'C}$ לכן הן חופפות:
$m\angle A'MC = m\angle A'BC = 60^0$. מצד שני ראינו כי $m\angle CMB' = 60^0$, וגם $m\angle CAB' = 60^0$ לכן $CMAB'$ חסום במעגל ואז $m\angle B'MA = m\angle ACB' = 60^0$ כזויות היקפיות נשענות על המיתר AB' באותו מעגל. הוכחנו כי:
$m\angle AMB' = m\angle CMB' = m\angle A'MC = 60^0$, $180^0=3x60^0$ לכן הנקודות A',M,A הן על ישר אחד. מסקנה $\overline{AA'}$ עובר אף הוא דרך $M=\overline{BB'}\cap\overline{CC'}$. מ.ש.ל.

2. תרגיל דומה לקודמו: יהי ABC משולש נתון. על כל אחת מצלעותיו ומחוץ למשולש, בונים ריבועים ABDE, ACFG ו BCMN, אזי הקטעים $\overline{BG}$ ו $\overline{EC}$ חופפים וניצבים זה לזה, באופן סימלי נרשום $\overline{EC} \stackrel{\perp}{=} \overline{BG}$. באופן דומה $\overline{AN} \stackrel{\perp}{=} \overline{CD}$ ו $\overline{AM} \stackrel{\perp}{=} \overline{BF}$. ההוכחה דומה לזו שבתרגיל 1, עם סיבובים בזויות בנות 90^0.

3. נתונים שני ישרים שונים c,b, נקודה A שלא נמצאת על b ולא על c וזוית α^0 $(0<\alpha<180)$, מצא נקודות B על b, C על c כך שהמשולש ABC יהיה שווה-שוקיים $|AB|=|AC|$ עם זוית ראש $m\angle BAC=\alpha^0$. כאן נדרשת בניה ולא הוכחת תכונות.

פתרון: (ראה איור 11)



איור מס' 11

נניח כי פתרנו את הבעיה ויהיה AB_1C_1 (או AB_2C_2) פתרון מבוקש.

אזי $|AB_1|=|AC_1|$ ו $m\measuredangle B_1AC_1=+\alpha^0$ או $m\measuredangle B_2AC_2=-\alpha^0$. לכן סיבוב סביב A בזוית α^0 יעתיק B_1 על C_1, או סיבוב בזוית $-\alpha^0$ יעתיק B_2 על C_2. מכאן הבניה למציאת B,C. נסובב b סביב A בזוית $+\alpha^0$, אם ρ_1 הוא סיבוב זה, יהיה $\rho_1(b)=b_1'$ (ראה בנית b_1' בתכונה 5, פרק II).
אם b_1' חותך c ב C_1, אזי C_1 בתור נקודה על b_1' היא תמונת נקודה B_1 על b: $\rho_1^{-1}(C_1)=B_1$ ואז AB_1C_1 הוא משולש מבוקש ומאחר וישר b_1' יכול לחתוך ישר c בלא יותר מנקודה אחת, זה הוא הפתרון היחיד שנקבל בעזרת ρ_1, יתכן ו b_1' יהיה מקביל ל c, אז אין פתרון בעזרת ρ_1; ויתכן ש $c\equiv b_1'$ ואז יש אינסוף פתרונות. שוב נסובב b סביב A בזוית $-\alpha^0$, אם ρ_2 הוא סבוב זה, יהיה $\rho_2(b)=b_2'$. אם b_2' חותך c בנקודה C_2 אזי נבנה $\rho_2^{-1}(C_2)=B_2$ ו AB_2C_2 הוא הפתרון (היחיד) שנקבל בעזרת ρ_2.
גם כאן יתכן b_2' מקביל ל c (אז אין פתרון ע"י ρ_2) או $c\equiv b_2'$ אז יש אינסוף פתרונות, בסיכום בדרך כלל יש שני פתרונות AB_1C_1, AB_2C_2, יתכן רק אחד או אינסוף. המקרה שאין בכלל פתרונות הוא כש b_1' וגם b_2' מקבילים ל c וזה אפשרי רק אם $\alpha=90^0$ ו c ניצב ל b (הוכח זאת);
כמובן במקרה $\alpha=90^0$ יתכן ש b_1' או b_2' יתלכד עם c (בהנחה ש c ניצב ל b) אז יש אינסוף פתרונות (ראה תרגיל 5).

4. נתונים שני ישרים d,b ונקודה A שלא נמצאת עליהם. בנה ריבוע $ABCD$ כך ש B היא על D,b (קודקוד נגדי ל B) על d.

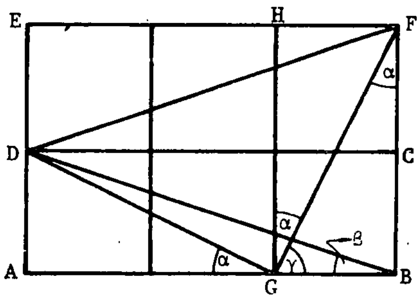
פתרון: ברור כי המשולש ABD הוא שווה שוקיים $|AB|=|AD|$ ו $m\measuredangle BAD=\pm 90^0=\alpha^0$.
לכן בעזרת התרגיל הקודם נבנה משולש BAD, כך ש B על D,b על d, $\measuredangle BAD$ ישר-זוית ב A ושווה שוקיים, אחרי-כן נבנה C כתמונתו של A ע"י שיקוף בישר $\sigma_{BD}(A)=C:\overline{BD}$ כי כידוע, בריבוע האלכסונים ניצבים זה לזה וחוצים זה את זה, ובכך נבנה את הריבוע המבוקש. כפי שראינו בתרגיל 3 לעיל, יש בדרך כלל שני פתרונות $AB_1C_1D_1$ ו $AB_2C_2D_2$, אבל יתכנו אינסוף פתרונות או בכלל אין פתרונות (ראה התרגיל הבא).

5. יהיו d,b שני ישרים <u>ניצבים</u> זה לזה, A נקודה שלא נמצאת על b או d. הוכח כי קיים רבוע $ABCD$ כך ש B תהיה על D,b על d אם ורק אם A נמצאת על אחד מחוצי-הזויות הישרות ש b ו d יוצרות בנקודת חיתוכם; ובמקרה זה, יש למעשה אינסוף פתרונות.

* * * * *

* * * *

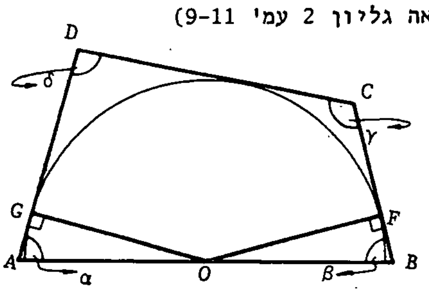
<u>מהו סכום הזויות - פתרון</u>



נבנה מלבן זהה $DEFC$ על המלבן הנתון.
נחבר את הנקודה F עם D ועם G.
נסמן $\measuredangle FGB=\gamma$, $\measuredangle ABD=\beta$, $\measuredangle AGD=\alpha$.
$\measuredangle AGD=\measuredangle BFG=\measuredangle HGF=\alpha$
$\measuredangle DBG=\measuredangle EFD=\beta$
$\alpha+\gamma=90^0$ ולכן $\measuredangle DGF=90^0$.

המשולש $\Delta\ DFG$ הוא שווה שוקיים $DG=FG$ ולכן זויות הבסיס של משולש זה הן 45^0 $\measuredangle GDF=\measuredangle GFD$. $90^0-(\alpha+\beta)=45^0$ ולכן $\alpha+\beta=45^0$.

פתרונות לשאלות האולימפיאדה הבינלאומית 1985 (ראה גליון 2 עמ' 9-11)



1. יהיה O מרכז המעגל המשיק לצלעות המרובע: OG,OF מאנכים ל AD,BC בהתאמה; r הרדיוס של מעגל זה ו- $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ זוויות המרובע בהתאמה (ראה ציור).

מאחר ש- OD,CO חוצים את הזוויות γ,δ בהתאמה, יש לנו $AG = r\cot\alpha$, $GD = r\cot\frac{\delta}{2}$, $BF = r\cot\beta$, $FC = r\cot\frac{r}{2}$, מאידך

$$AB = r\,(\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{cosec}\beta)$$

וגם

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi \qquad (1)$$

יש איפוא להוכיח כי כאשר קיים (1) אזי

$$\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{cosec}\beta = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\frac{\gamma}{2} + \cot\frac{\delta}{2}$$

אבל

$$\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{cosec}\beta - \left(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\frac{\gamma}{2} + \cot\frac{\delta}{2}\right)$$

$$= \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{1-\cos\beta}{\sin\beta} - \cot\frac{\gamma}{2} - \cot\frac{\delta}{2}$$

$$= \tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} - \cot\frac{r}{2} - \cot\frac{\delta}{2} = 0$$

2. עבור כל $m\in M$ נכתוב $a_m \equiv km \pmod n$ כאשר $0<a_m<n$. המספרים a_m שונים זה מזה (למה?) ולכן הם מהווים תמורה של M.

כאשר $im<n$ וגם $jm<n$, אזי $a_i=in$, $a_j=jn$

ולכן $a_i-a_j=(i-j)n$

ויוצא כי a_i , a_j צבועים באותו צבע. כאשר אחד מאלה (או שניהם) גדול(ים) מ-n אפשר לחסר מהם כפולות של k בלי לפגוע בצבע ומגיעים לאותה מסקנה.

3. במקרה ש $n=2^m$ קיים $(1+x)^n=1+x^n+r(x)$ כאשר $r(x)$ הוא פולינום אשר כל מקדמיו זוגיים, יוצא כי אם $p(x)$ הוא פולינום ממעלה קטנה מ $n=2^m$ אז

$$W(p\cdot Q_n)=2W(p) \qquad (1)$$

עכשיו נוכיח את הטענה בעזרת אינדוקציה על i_n.

כאשר i_n הוא 0 או 1 המשפט ברור, נניח כי הטענה נכונה עבור כל מערכת $(i_1,i_2,\dots,i_n)$ אם $i_n<2^m$ ונבדוק מה קורה כאשר $i_1\le i_2\dots\le i_n<2^{m+1}$.

(i) אם $i_1\ge 2^m$ המסקנה מידית בהסתמך על (1).

(ii) אם $i_1<2^m$ נכתוב $k=2^m$ ואז

$$p(x)=Q_{i_1}+Q_{i_2}\dots+Q_{i_n}$$

$$=a_0+a_1x+\dots+a_kx^k+(1+x)^k\{b_0+b_1x+\dots+b_{k-1}x^{k-1}\}$$

$$=\Sigma a_ix^i+\Sigma b_ix^ix^k\Sigma b_ix^i+R(x)$$

$$=A(x)+B(x)+x^kB(x)+R(x)$$

כאשר כל המקדמים ב- $R(x)$ הם זוגיים.

בחישוב של $W(p)$ רואים כי במקרה שמקדם אי-זוגי ב-A מתנגש במקדם אי-זוגי של מונום דומה ב B הרי אז יישאר המקדם האי-זוגי המקביל ב- $x^kB(x)$ לפליטה. מכאן ש

$$W(p)\ge W(\Sigma a_ix^i)\ge W(Q_{i_1})$$

4. לכל מספר של M יש הצורה

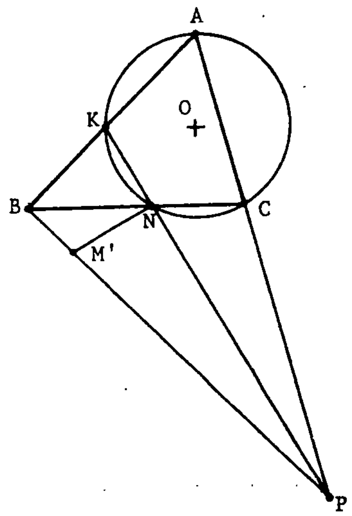
$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_9^{\alpha_9}$$

כאשר $\{p_1,\dots,p_9\}$ הם תשעת המספרים הראשוניים הקטנים מ-26
ו- $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ הוא וקטור אשר כל רכיביו הם מספרים שלמים אי-שליליים.

למעשה עלינו להוכיח כי בכל קבוצה של 1985 וקטורים שונים כאלה נתן למצוא ארבעה וקטורים שונים אשר סכומם הוא וקטור אשר כל רכיביו מתחלקים ב-4.
אם נבחן את כל 1985 הוקטורים mod2 נראה כי יש רק $2^9(=512)$ שונים.
נתחיל ב-513 הוקטורים הראשונים. לפי עקרון שובך היונים נוכל למצוא לפחות זוג אחד שהוא זהה mod2. נוציא את הזוג הזה ונמשיך ב-1983 הוקטורים הנשארים. נוכל שוב לעשות אותו הדבר ונמצא עוד זוג כזה. ברור כי נוכל להמשיך ככה $\frac{1985-513}{2}$ פעמים וככה נאתר 736 <u>זוגות</u> של וקטורים זהים (mod2).

סכום שני הוקטורים בכל זוג כזה הוא וקטור אשר כל רכיביו זוגיים. אם נחלק את הרכיבים האלה ב-2 יהיו לנו 736 וקטורים ושוב נוכל למצוא לפחות 8 שונים מהם אשר סכומם מורכב רק מרכיבים זוגיים.

5, KN,AC אינם מקבילים זה לזה (הוכח!).



נניח שהם נפגשים ב-P, ותהיה M' נקודת המפגש של BP עם המעגל KBN.

$$\sphericalangle NM'P = \sphericalangle BNM' + \sphericalangle NBM'$$
$$= \sphericalangle BKM' + \sphericalangle NKM$$
$$= \sphericalangle BKN$$
$$= \sphericalangle ACB$$

ולכן המרובע CNM'P חסום במעגל.

מאידך

$$\sphericalangle BM'C = \sphericalangle BM'N + \sphericalangle NM'C$$
$$= \sphericalangle AKN + \sphericalangle NPC$$
$$= \pi - \sphericalangle BAC$$

ולכן M' נמצא על המעגל ABC ומכאן ש- M'=M.

אם נכתוב BO=a , PO=b , OB=r , נקבל

$$BM\cdot BP = BN\cdot BC = a^2-r^2$$
$$PM\cdot PB = PN\cdot PK = b^2-r^2$$

ומכאן
$$BP^2 = BM\cdot BP + MP\cdot BP$$
$$= a^2 + b^2 - 2r^2$$

נשאיר לקורא להסיק מכל זה כי $BM^2 - MP^2 = BO^2 - OP^2$

ומכאן ש- OM מאונך ל- BP.

6. למען הנוחיות נגדיר סדרה $\{f_n(\lambda)\}$ של פונקציות כדלקמן:-

$f_n(\lambda)$ הוא הערך של x_n כאשר $x_1=\lambda$.

קל לראות כי כל הפונקציות האלה הן פולינומים עם מקדמים חיוביים ולכן כל $f_n(\lambda)$ הוא פונקציה קמורה ועולה עבור $\lambda>0$.

עבור $\lambda>0$ כלשהו ברור כי $f_n(\lambda)\geq 1-\frac{1}{n}$ גורר $f_{n+1}(\lambda)>f_n(\lambda)$.

נגדיר a_n , b_n ע"י התנאים

$$f_n(a_n) = 1-\frac{1}{n}$$

$$f_n(b_n) = 1$$

(יש להניח כי אלה אמנם קיימים ונשאיר את הוכחה זו לקורא).

ברור כי $f_n(0)=0$ וכי $b_n\leq 1$ ולכן, בגלל קמירות הפונקציות,

$$(1) \quad 0<b_n-a_n\leq f_n(b_n)-f_n(a_n)=\frac{1}{n}$$

מאידך

$$f_{n+1}(a_n) = (1-\frac{1}{n})\ \{(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{n}\}$$

$$= 1-\frac{1}{n}$$

$$= f_n(a_n)$$

ולכן $a_n<a_{n+1}$, וגם

$$f_{n+1}(b_n) = 1+\frac{1}{n}$$

ומכאן ש- $b_{n+1}<b_n$, יוצא כי הסדרה $\{a_n\}$ היא סדרה עולה בעוד ש- $\{b_n\}$ היא סדרה יורדת. מ-(1) נובע כי יש להן גבול משותף, נאמר γ וקל להוכיח כי γ הוא הערך היחידי האפשרי עבור x_1 כדי למלא את תנאי הבעיה.

* * * * *

* * * *

ש א ל ה - a מחלק את b

הוכח שבכל קבוצה של $n+1$ מספרים מתוך $\{1,2,...,2n\}$ יש שני מספרים a ו b כך ש a מחלק את b.

אולימפיאדה לנוער במתמטיקה - מכון ויצמן

האולימפיאדות לנער במתמטיקה מתקיימות במכון ויצמן בחסות בנק הפועלים. התחרות האחרונה התקיימה ב - 28.2.1985.

הזוכים בתחרות הין:

פרס ראשון : אורי גנור, תיכון אחד העם, פ"ת (י"ב).

פרס שני : שוני דר, עירוני ד', ת"א (ט').

פרס שלישי : אסף גולדברגר, בית ספר המפלפרב, ירושלים (י"ב).

פרס רביעי : אלכס סגלסקי, תיכון אורט, קרית ביאליק (י"ב).

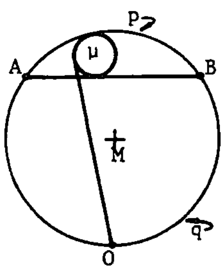
ציונים לשבח : עודד לבנה, תיכון עמק החולה (י"א),
איל אלאלוף, תיכון ליד האוניברסיטה, ירושלים (י"א).
ג'וני סקסון, תיכון מקיף השרון, רמת השרון (י"א).

להלן שאלות התחרות ופתרונותיהן:

<u>בעיות</u>

המספר בסוגריים אחרי מספר השאלה, הוא מספר הנקודות שיוענקו בעד תשובה מלאה ומדוייקת על השאלה.

1. (10) המיתר AB מחלק את המעגל M לשתי קשתות: p,q. הנקודה O היא הנקודה על q הרחוקה ביותר מהמיתר AB. μ הוא מעגל כלשהו בפנים המעגל M המשיק לישר AB ולקשת p.
(ראה ציור),
הוכח כי אורך המשיק מ-O ל-μ שווה ל-OA.



2. (10) נתונים n מספרים חיוביים p_i ו-n מספרים חיוביים q_i המקיימים:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

בהסתמך על אי-השוויון $x\ln x \geq x-1$ עבור כל $x>0$ (או בכל דרך אחרת), הוכח כי

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i > \sum_{i=1}^{n} p_i \ln q_i$$

.3 (17) פתור את המשוואה

$$[4x - \frac{1}{5}] - 3x + 4 = 0$$

(הערה: עבור כל מספר ממשי a נסמן $[a]$ את החלק השלם של a, כלומר המספר השלם t המקיים $t \leq a < t+1$).

כמה פתרונות ישנם?

.4 (17) לכל מספר טבעי n נגדיר $f(n)$ כמספר האפסים בסוף המספר $n!$

[דוגמה: $7!=5040$ ולכן $f(7)=1$; $10!=3,628,800$ ולכן $f(10)=2$]

(א) הוכח כי

$$f(5745) - f(1985) = f(5745-1985)$$

(ב) האם כל שני מספרים טבעיים x,y ($x>y$), מקיימים

$f(x) - f(y) = f(x-y)$?

נמק את תשובתך.

.5 (20) נתונה המשוואה

$$(\sin x)^{\sqrt{3x-1}} + 2(\cos 2x)^{\sqrt{-9x^2-3x+2}} - \log_{\frac{1}{x}} x^3 = a$$

מהם הערכים האפשריים של a כך שלמשוואה זו יהיה לפחות פתרון ממשי אחד?

.6 (20) על לוח שחמט בעל 64 משבצות מעמידים 32 כלים לבנים ו-32 שחורים. שני כלים מהווים "זוג חריג" אם הם בעלי צבעים שונים ונמצאים באותה השורה או באותו הטור. (מובן כי כלי אחד יכול להשתתף בכמה זוגות חריגים). נסמן ב-N את מספר הזוגות החריגים.

הוכח כי $N \leq 256$. האם יתכן שוויון? אם כן - מצא באילו תנאים. אם לא - הוכח מדוע לא.

.7 (23) משולש M ייקרא "מיוחד" אם ניתן להתאים לו משולש שני N כך ש-

א) M ו-N דומים אבל אינם חופפים.

ב) שתי צלעות של N שוות לשתי צלעות של M.

מהם התנאים המאפיינים את קבוצת כל המשולשים המיוחדים?

8. (25) נתונים שני מספרים טבעיים A,B כך ש- $A<B$. הוכח כי בכל קבוצה של B מספרים טבעיים עוקבים ניתן למצוא שנים אשר מכפלתם מתחלקת ב-AB.

9. (30) אם a,b,c הם אורכי הצלעות של משולש, הוכח כי

$$\frac{3}{2} < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

10. (30) המספרים הטבעיים $a_1,a_2,\dots a_n$ מקיימים

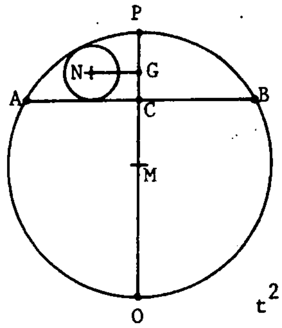
$$N \geq a_1 > a_2, \dots, a_n \geq 1$$

כמו כן נתון כי הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של כל זוג a_i,a_j אינה גדולה מ-N.

הוכח כי, לכל i, $a_i \leq \frac{N}{i}$.

<u>פתרונות</u>

1. יהיה N המרכז של המעגל μ, OP קוטר של המעגל M, NG מאונך לישר OP, $NG=h$, R הרדיוס של M ו-r הרדיוס של μ, C נקודת המפגש של OMP עם AB, נגדיר $MC=k$.



ברור כי $MG=k+r$ ולכן

$$\begin{aligned}(R-r)^2 &= MN^2 \\ &= (k+r)^2 + h^2\end{aligned}$$

אם t הוא אורך המשיק מ-O ל-μ, אזי

$$\begin{aligned}t^2 &= ON^2-r^2 \\ &= (R+k+r)^2+h^2-r^2 \\ &= (R+k+r)^2+h^2-r^2 \\ &= (R+k)^2+2r(R+k)+(R-r)^2-(k+r)^2 \\ &= (R+k)^2+-r(R+k)+R^2-k^2-2r(R+k) \\ &= 2R(R+k)\end{aligned}$$

גדל זה איננו תלוי ב- r או h, מכאן שאורך המשיק קבוע לכל המעגלים כמו μ.

2.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \ln q_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \ln \frac{p_i}{q_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{p_i}{q_i} \ln \frac{p_i}{q_i}$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} q_i \left(\frac{p_i}{q_i} - 1\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i) = 0$$

* * * * *

3.

$$3x = [4x - \frac{1}{5}] + 4$$

ולכן $3x$ הוא מספר שלם. נבדוק שלוש אפשרויות:-

(i) $x=n$ כאשר n שלם.

$$4n - 3n + 4 = 0$$

$$x = n = -4$$

(ii) $x = n + \frac{1}{3}$, n שלם. עכשיו

$$[4n + \frac{4}{3} - \frac{1}{5}] - 3n - 1 + 4 = 0$$

$$4n + 1 - 3n - 1 + 4 = 0$$

$$n = -4$$

$$x = -3\frac{2}{3}$$

(iii) $x = n + \frac{2}{3}$, n שלם.

$$[4n + \frac{8}{3} - \frac{1}{5}] - 3n - 2 + 4 = 0$$

$$4n + 2 - 3n - 2 + 4 = 0$$

$$n = -4$$

$$x = -3\frac{1}{3}$$

ישנם 3 פתרונות.

4. א) מספר האפסים בסוף המספר $n!$ שווה למעריך של החזקה הגבוהה ביותר של 5 המחלק את $n!$ וזה שווה ל-

$[\frac{n}{5}] + [\frac{n}{5^2}] + [\frac{n}{5^3}] + \dots$ (להוכיח את כל אלה).

יוצא כי

$$f(5745) = 1149 + 229 + 45 + 0 = 1432$$

$$f(1985) = 397 + 79 + 15 + 3 = 494$$

מאידך

$$f(5745-1985) = f(3760) = 752 + 150 + 30 + 6 = 938 = 1432 - 494$$

יוצא כי

$$f(5745) = 1149 + 229 + 45 + 9 = 1432$$

$$f(1985) = 397 + 79 + 15 + 3 = 494$$

מאידך

$$f(5745 - 1985)=f(3760)=752+150+30+6=938=1432-494$$

ב) ניקח $x=1000$ $y=126$ ונקבל

$$f(x) = 200 + 40 + 8 + 1 = 249$$

$$f(y) = 25 + 5 + 1 = 31$$

$$f(x-y)=f(874)=174+34+6+1=215\neq 249-31$$

ולכן התשובה שלילית.

* * * * *

5. כדי לקבוע קבוצת ההצבה של הנוסחה דרוש כי

$$3x - 1 \geq 0$$

$$-9x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

$$\frac{1}{x} > 0$$

מהתנאי הראשון נובע כי $x \geq \frac{1}{3}$; מהשני נובע כי $-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$; ומהשלישי נובע ש $x > 0$. הערך היחידי של x המקיים את כל אלה הוא $x = \frac{1}{3}$. יוצא כי

$$a = (\sin\frac{1}{3})^0 + 2(\cos\frac{2}{3})^0 - \log_3\frac{1}{27} = 1 + 2 + 3 = 6$$

וזה הערך היחידי האפשרי.

6. נניח כי בשורה כלשהי נמצאים n שחורים ו- $(8-n)$ לבנים. שורה זו תתרום למנין הכולל של זוגות חריגים את המספר $n(8-n)$. אבל

$$n(8-n) \leq 16$$

ושויון קיים אך ורק עבור $n=4$. אותו שיקול קיים כמובן לגבי טורים. מאחר שישנם 8 שורות ו 8 טורים יוצא כי מספר הזוגות החריגים לא יעלה על $16\times(8+8)$ שהוא 256. שויון ישג כאמור כאשר בכל שורה וגם בכל טור יהיו בדיוק 4 שחורים וארבעה לבנים.

* * * * *

7. יהיו a,b,c אורכי הצלעות של M ו- b,c,d אורכי הצלעות המתאימות של N, כלומר

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$

אם $\frac{a}{b} = p$, אזי $b=pc$, $a=p^2c$ ולכן

$$p^2c + pc > c$$

ז.א. p מקיים

$$p^2 + p - 1 > 0$$

וזה מחייב $p > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

התנאים המאפיינים משולשים מיוחדים הם כי אורכי צלעותיהם יהוו סדרה הנדסית בעלת מנה גדולה מ- $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

* * * * *

8. בכל קבוצה כזאת ניתן למצוא כפולה של B וגם כפולה של A. אם אלו שונות זו מזו הבעיה נפתרה, אחרת נניח כי יש בקבוצה מספר K שהוא כפולה של A וגם של B. K מתחלק איפוא ב- $AB/(A,B)$ כאשר (A,B) הוא הגורם המשותף המירבי של A,B.

אם $(A,B)=1$ אזי שוב נפתרה הבעיה. נשאר לבדוק את המקרה שבו $(A,B)=d$. מאחר ש-d מחלק את A יוצא כי $d \leq \frac{1}{2}A < \frac{1}{2}B$ ולכן לפחות אחד המספרים $K \pm d$ יימצא בקבוצה. אבל K מתחלק ב-A וב-B ולכן גם ב-d. מכאן שגם $K \pm d$ יתחלקו ב-d ולכן $K(K \pm d)$ יתחלקו שניהם ב-AB.

9. יש להוכיח כי

$$\frac{3}{2}(b+c)(c+a)(a+b) \le a(c+a)(a+b) + b(a+b)(b+c) + c(b+c)(c+a) < 2(b+c)(c+a)(a+b$$

נכתוב $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, $\alpha=s-a$, $\beta=s-b$, $\gamma=s-c$.

$$\begin{aligned}
&2(b+c)(c+a)(a+b) - a(c+a)(a+b) - b(a+b)(b+c) - c(b+c)(c+a)\\
&= 2(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma) - (s-\alpha)(s+\beta)(s+\gamma) - (s-\beta)(s+\gamma)(s+\alpha)\\
&\qquad - (s-\gamma)(s+\alpha)(s+\beta)\\
&= -(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma) + 2\{\alpha(s+\beta)(s+\gamma) + \beta(s+\gamma)(s+\alpha) + \gamma(s+\alpha)(s+\beta)\}\\
&= s^3 + 3s(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta) + 5\alpha\beta\gamma > 0
\end{aligned}$$

מאחר ש-α,β,γ הם כולם חיוביים.

מאידך

$$\begin{aligned}
&2\{a(c+a)(a+b) + b(a+b)(b+c) + c(b+c)(c+a)\} - 3(b+c)(c+a)(a+b)\\
&= 2(a^3+b^3+c^3) - (b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2)\\
&= (b^3-b^2c-bc^2+c^3) + (c^3-c^2a-ca^2+a^3) + (a^3-a^2b-ab^2+b^3)\\
&= (b+c)(b-c)^2 + (c+a)(c-a)^2 + (a+b)(a-b)^2 \ge 0
\end{aligned}$$

* * * * *

10. נוכיח את המשפט בעזרת אינדוקציה לגבי i, עבור $i=1$ הדבר נתון.

נניח שהוא נכון עבור i כלשהו. אם, עבור מספרים טבעיים x,y כלשהם נסמן ב- (x,y) הגורם המשותף המירבי שלהם וב-$[x,y]$ המכפלה המשותפת המזערית, הרי ידוע כי

$$(x,y)[x,y] = xy$$

לכן, במקרה שלנו

$$(a_i, a_{i+1}) \ge \frac{a_i a_{i+1}}{N}$$

ומכאן ש

$$a_i - a_{i+1} \ge \frac{a_i a_{i+1}}{N}$$

ז.א.

$$a_{i+1} - \frac{Na_i}{N+a_i} = \frac{N}{\frac{N}{a_1} + 1}$$

מהנחת האינדוקציה יוצא כי $i \geq \frac{N}{a_i}$ ומכאן ש- $\frac{N}{i+1} \leq a_{i+1}$.

* * * * *

האולימפידה הבאה תערך ב-13.2.1986. המבקשים להשתתף בתחרות השנה יפנו בכתב אל היחידה לפעולות נער, מכון ויצמן למדע, רחובות 76100.

* * * * *

* * * *

מספר משוכלל נוסף

הקורא דני בונה, מכתה י"א בביה"ס הריאלי בחיפה, הפנה את תשומת לבנו לכך ש $2^{132049}-1$ הוא מספר ראשוני, (ראה Scientific American מאוקטובר 1985, עמ' 69). לפיכך $2^{132048}(2^{132049}-1)$ הוא מספר משוכלל הגדול מהמספרים המשוכללים שהוזכרו בגליון הקודם.

* * * * *

* * * *

a מחלק את b - רמז

יהיה c המספר הקטן ביותר בקבוצה. אם בקבוצה אין שני מספרים a ו b כמבוקש אז 2c איננו איבר בקבוצה וגם בקבוצה המתקבלת ע"י החלפת c ב 2c אין מספרים a ו b כאלה.

תחרות הבעיות

תחרות הבעיות

פתרון בעיות מגליון מס' 1: המשך

4. הוכח שלכל קבוצה של $2n-1$ מספרים שלמים יש תת קבוצה של n מספרים שסכום איבריה מתחלק ב n.

פתרון: א. כמו בחלק (א) של הפתרון שפורסם בגליון הקודם.

ב. לפי חלק (א) נתן להניח ש n ראשוני. יהיו $a_1,\ldots,a_{2n-1}$ המספרים הנתונים. יש להראות שלפחות אחד הסכומים $a_{i_1}+\ldots+a_{i_n}$ $(1\le i_1\le\ldots\le i_n\le 2n-1)$ שוה ל 0 מודולו n. אם לא, אז כל בטוי $(a_{i_1}+\ldots+a_{i_n})^{n-1}$ שוה, לפי משפט פרמה, ל 1 מודולו n.

לכן

$$\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_n\le 2n-1} (a_{i_1}+\ldots+a_{i_n})^{n-1}\equiv\binom{2n-1}{n}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ n)$$

אבל בחשוב ישיר של סכום זה מקבלים שהוא שוה ל 0 (מודולו n) סתירה.

5. (הוצעה ע"י פרופ' קלמקין). יהי $p(x)$ פולינום ממעלה n, המקיים $p(k)=3^k$ עבור $k=0,1,\ldots,n$. חשב את $p(n+1)$.

רמז: עבור כל פונקציה $f(x)$ נגדיר פונקציות הפרשים

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta\,[\Delta f(x)]$$

ובאנדוקציה

$$\Delta^n f(x) = \Delta[\Delta^{n-1} f(x)]$$

קל לבדק ש

$$\Delta^2 f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)$$

ולהוכיח, למשל בדרך האנדוקציה, כי

$$\Delta^n f(x)=f(x+n)-\binom{n}{1}f(x+n+1)+\binom{n}{2}f(x+n+2)\ldots$$

עבור כל k,

$$\Delta x^k = (x+1)^k - x^k = kx^{k-1}+\binom{k}{2}x^{k-2}+\ldots$$

מכאן, אם $p(x)$ הוא פולינום ממעלה n, אזי $\Delta p(x)$ הוא פולינום ממעלה $n-1$, $\Delta^2 p(x)$ הוא פולינום ממעלה $n-2$, ... ובסוף $\Delta^n p(x)$ הוא פולינום ממעלה 0, דהיינו קבוע.

במקרה שלנו נקבל

$$\Delta^n p=p(n)-\binom{n}{1}p(n-1)+\ldots=$$

$$=3^n-\binom{n}{1}3^{n-1}+\binom{n}{2}3^{n-2}\ldots=$$

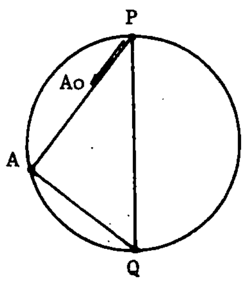
$$=(3-1)^n=2^n$$

כיון ש $\Delta^n p$ קבוע, $\Delta^n p(x)\equiv 2^n$ עבור כל x.

ונשאיר לקורא להראות שמכאן נובע ש

$$p(n+1) = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

6. (הוצעה ע"י פרופ' קלמקין). נתבונן בכל הארבעונים ABCP החסומים בכדור נתון, כך ששלוש זויות הפאה ב P ($\sphericalangle APB$ וכו') נתונות אף הן. מצא מתי סכום ארכי המקצועות הנפגשים ב P, AP+BP+CP יהיה מכסימלי.



__פתרון__: יהיו $\vec{PA}_0$, $\vec{PB}_0$ ו $\vec{PC}_0$ וקטורי יחידה בכוון A B ו C בהתאמה, ויהיה PQ קטר A בכדור, אזי (כיון ש $\sphericalangle PAQ=90^0$)

$$\vec{PA} = \vec{PA}_0 \cdot \vec{PQ}$$

$$\vec{PB} = \vec{PB}_0 \cdot \vec{PQ}$$

$$\vec{PC} = \vec{PC}_0 \cdot \vec{PQ}$$

($\cdot$ מסמן מכפלה סקלרית)

$$PA+PB+PC = (\vec{PA_0}+\vec{PB_0}+\vec{PC_0})\cdot\vec{PQ}$$

הגדלים של PQ ושל $\vec{PA_0}+\vec{PB_0}+\vec{PC_0}$ נתונים, ויש לקבע את האוריינטציה של A,B,C ביחס לקטר PQ כך השמכפלה הסקלרית תהיה מכסימלית.

דבר זה יקרה כאשר הסכום $\vec{PA_0}+\vec{PB_0}+\vec{PC_0}$ יהיה מקביל לקטר.

* * * * *

* * * *

בעיות חדשות

כתוב בכתב יד ברור ונקי ובצידו האחד של הדף. את הפתרונות יש לשלוח עד ליום 28.2.86 לפי הכתובת: מערכת "אתגר-גליונות מתמטיקה", היחידה לפעולות נוער, מכון ויצמן למדע, רחובות, ולציין את שם הפותר, שם בית הספר (או צה"ל) והכתה בה הוא לומד. נשמח לקבל גם פתרונות חלקיים. שמות הפותרים יפורסמו, ובין הפותרים המצטיינים יוגרל פרס.

* * * *

* * *

13. יהיו a,b,n מספרים טבעיים כך ש

$$(2+\sqrt{3})^n = a+b\sqrt{3}$$

הוכח כי a ו b הם זרים.

* * *

14. הוכח כי המספר $2222^{5555} + 5555^{2222}$ מתחלק ב 7.

* * *

15. נתון מלבן המחולק למלבנים קטנים, כך שבכל מלבן קטן ארכה של לפחות אחת מהצלעות הוא מספר שלם. הוכח שגם במלבן הגדול, ארכה של לפחות אחת הצלעות הוא מספר שלם.

* * *

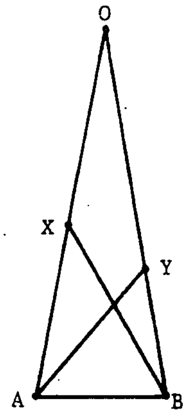
16. יהיה ΔOAB משולש שוה שוקים.

נתון:

$\measuredangle AOB = 20^0$

$\measuredangle ABX = 60^0$

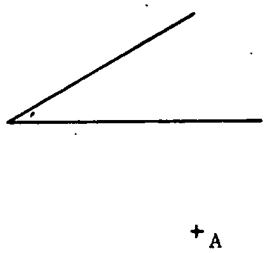
$\measuredangle BAY = 50^0$



חשב את הזוית $\measuredangle BXY$

* * *

17. נתונים זוית, נקודה A מחוץ לזוית וקטע באורך p. העבר (בעזרת סרגל ומחוגה) ישר דרך A שיחתך מהזוית משולש שהיקפו p.



* * *

18. נתונות n נקודות במישור, לא כולן על אותו ישר.
הוכח שיש ישר שעובר דרך <u>בדיוק שתים</u> מהנקודות.

* * *