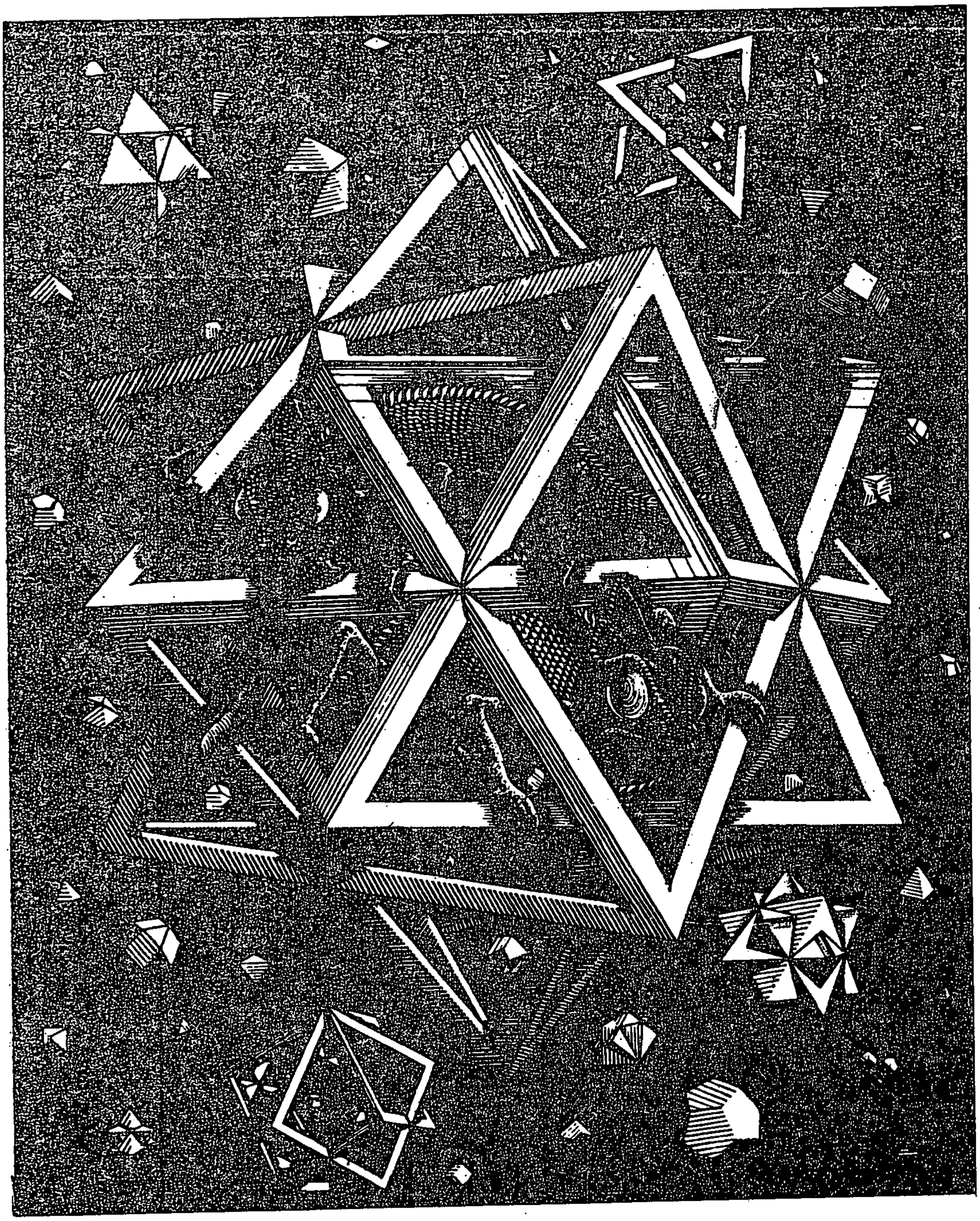
אתגר - גליונות מתמטיקה

גליון מס' 10 ספרית הוראת המדעים ניסן תשמ"ח - מרץ 1988



הפקולטות למתמטיקה

הטכניון
חיפה

מכון ויצמן
רחובות

בתמיכת המרכז המדעי י.ב.מ. ישראל

10084267

תוכן העניינים

* * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * *

אתגר - גליונות מתמטיקה
ISSN 0334 - 0201

מוצא לאור ע"י הפקולטה למתמטיקה בטכניון ובמכון ויצמן

המערכת: פרופ' א. ברמן וד"ר צ. הראל, הפקולטה למתמטיקה, הטכניון

פרופ' י. גיליס, המחלקה למתמטיקה שמושית, מכון ויצמן.

מען המערכת: הפקולטה למתמטיקה, הטכניון, מכון טכנולוגי לישראל,

חיפה 32000, טל': 294275(04).

דבר - המערכת

בחוברת שלפניכם מובא המשך המאמר בנושא הוקסודים, מאמר על נסחת פיק המבטאת שטח מצולע שקדקדיו הם נקודות סריג בעזרת מספר נקודות הסריג ומאמר המחשב את ההסתברות שהאנכים היוצאים מנקודה פנימית במשולש יקיימו את אי שוויון המשולש.

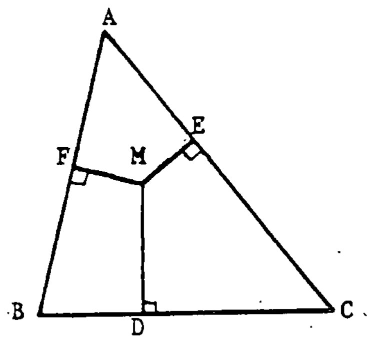
הבעיות הרבות המובאות בגליון כוללת את המשך בעיות האמון לאולימפיאדות מתמטיות, את הבעיות שהופיעו באולימפיאדה האחרונה שהתקיימה במכון וייצמן, פתרון בעיות מגליון מס' 8 וכמובן בעיות חדשות.

אנו מאחלים לכם הנאה מהבעיות ומהמאמרים וחג פסח כשר ושמח.

* * * * *

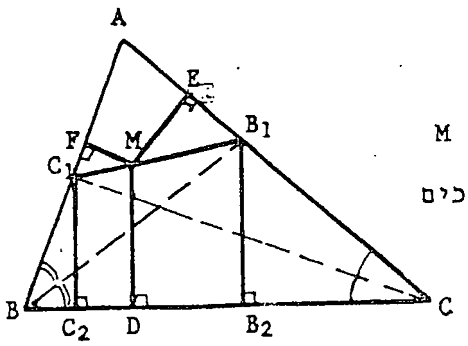
בעיה בהסתברות שפתרונה גאומטרי

א. סיגלר ברמן - ביה"ס הטכני של חיל האויר



יהיה נתון משולש ABC שצלעותיו a,b ו c.
תהי M נקודה פנימית למשולש ו ME,MD ו MF אנכים על a,b,c בהתאמה.
חשב כפונקציה של a,b ו c את ההסתברות שהקטעים MF,ME ו MD יקיימו את אי שוויון המשולש. הוכח גם שהסתברות זאת איננה גדולה מ $\frac{1}{4}$.

פתרון



טענה 1 חוצה הזוית B פוגש את AC ב B_1, חוצה הזוית C פוגש את AB ב C_1. תהי M נקודה על הקטע B_1C_1 ו MF, ME, MD אנכים על a,b,c בהתאמה: אזי קיים

$$MD = ME + MF$$

הוכחת טענה 1

יהי $\frac{C_1M}{MB_1}=\alpha$. משום ש CC_1 ו BB_1 חוצי זוויות, קל להוכיח בעזרת משפט חוצה הזווית את השוויונים הבאים:

$$AC_1=\frac{bc}{a+b}\ ,\quad C_1B=\frac{ac}{a+b}\ ,\quad AB_1=\frac{bc}{a+c}\ ,\quad B_1C=\frac{ab}{a+c} \qquad (1)$$

נעביר מ C_1 ו B_1 אנכים B_1B_2 ו C_1C_2 על BC.

בטרפז $C_1B_1B_2C_2$, MD מקביל לבסיסים ומחלק את השוק C_1B_1 ביחס α. אזי:

$$MD=\frac{\alpha\cdot B_1B_2+C_1C_2}{\alpha+1} \qquad \text{(הוכח!)}$$

אם נציב את (1) בשוויון האחרון בהתחשב בכך ש $C_1C_2=BC_1\cdot\sin\hat{B}$ ו $B_1B_2=B_1C\cdot\sin\hat{C}$

נקבל
$$MD=\frac{2S_{ABC}}{1+\alpha}\left(\frac{\alpha}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right) \qquad (2)$$

כאשר S_{ABC} מסמן את שטח המשולש ABC.

משום ש $\frac{C_1M}{MB_1}=\alpha$, קיים $\frac{S_{AC_1M}}{S_{AC_1B_1}}=\frac{\alpha}{\alpha+1}$ ו $\frac{S_{AMB_1}}{S_{AC_1B_1}}=\frac{1}{\alpha+1}$ (הוכח!)

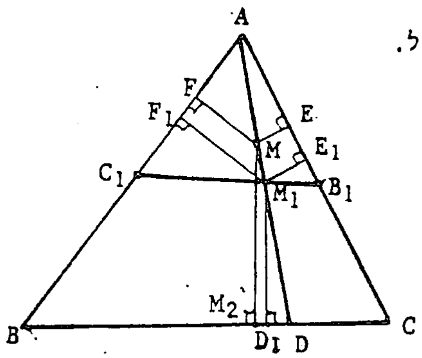
לכן FM שהוא גובה במשולש AC_1M מקיים $FM=\frac{2S_{AC_1M}}{AC_1}=\frac{2\alpha\cdot S_{AC_1M}}{(\alpha+1)AC_1}$

בהתחשב בעובדה ש $S_{AC_1M}=\frac{AC_1\cdot AB_1\cdot\sin\hat{A}}{2}$ ובהצבת (1) בערך של FM

נקבל:
$$FM=\frac{2\alpha\cdot bc\cdot bc\cdot\sin\hat{A}\cdot(a+b)}{(\alpha+1)(a+b)(a+c)\cdot(bc)\cdot 2}=\frac{\alpha\cdot bc\cdot\sin\hat{A}}{(a+c)(\alpha+1)}=\frac{2\alpha S_{ABC}}{(\alpha+1)(a+c)}$$

באותה דרך מוכיחים ש:
$$ME=\frac{2S_{ABC}}{(1+\alpha)(a+b)}$$

בהתחשב ב (2) נובע ש: $MD=ME+FM$ מ.ש.ל.



<u>טענה 2</u> יהיו C_1 ו B_1 עקבי חוצי הזוויות C ו B בהתאמה.

אזי: <u>א</u>) אם M פנימית למשולש AB_1C_1 ו MF ו ME ו MD אנכים על a,b,c בהתאמה, קיים: $MF+ME<MD$

<u>ב</u>) אם M פנימית למרובע BC_1B_1C

אזי: $MF+ME>MD$

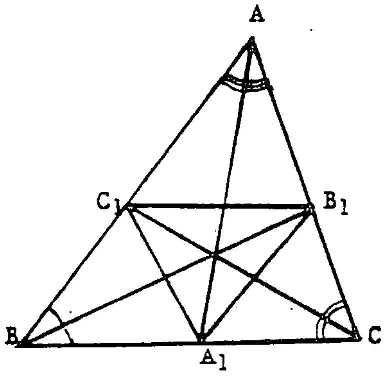
הוכחת טענה 2

א) נחבר את A ו M. AM פוגש את C_1B_1 ב M_1 ואת BC ב M_2. נעביר מ M_1 אנכים ל AB , AC ו BC ונקבל את הנקודות F_1 , E_1 , D_1 בהתאמה.

מכך שבמשולש AF_1M_1 קיים $\frac{FM}{F_1M_1} = \frac{AM}{AM_1}$ נובע ש $FM<F_1M_1$

בדרך דומה $ME<M_1E_1$ ו $MD>M_1D_1$. אבל לפי טענה 1 קיים $M_1D_1 = M_1F_1 + M_1E_1$ לכן נובע ש $MD > FM + EM$. מ.ש.ל.

ב) ההוכחה דומה ל א).



טענה 3 בנתוני השאלה, ההסתברות שהקטעים ME , MF ו MD יקימו את אי שויון המשולש היא: $\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}$

הוכחת טענה 3

יהיו A_1 , B_1 , C_1 עקבי חוצי הזויות A , B , C בהתאמה. לפי טענה 2 רק נקודות M פנימיות למשולש $A_1B_1C_1$ מתאימות.

נסמן ב p את ההסתברות המבוקשת וב S את שטח המשולש ABC.

אזי: $p = \frac{S_{A,B,C}}{S_{ABC}}$. באופן כללי אם: $\frac{BA_1}{A_1C} \equiv \alpha$, $\frac{CB_1}{B_1A} \equiv \beta$, ו $\frac{AC_1}{C_1B} \equiv \gamma$ אזי קיים $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{1+\alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}$ (הוכח!).

במקרה ספציפי זה $\alpha = \frac{c}{b}$, $\beta = \frac{a}{c}$, $\gamma = \frac{b}{a}$

לכן $$p = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \qquad (3)$$

מ.ש.ל.

טענה 4: בסימוני טענה 3: $p \le \frac{1}{4}$.

הוכחת טענה 4

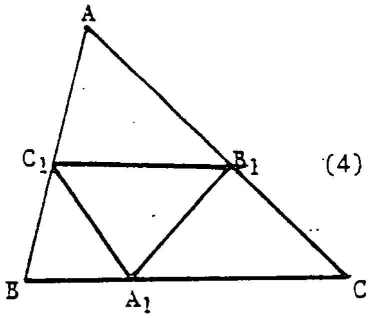
$$p = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \le$$

אי שויון ממוצעים

$$\le \frac{2abc}{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ac}} = \frac{1}{4}$$ מ.ש.ל

(השיויון קיים רק כאשר $a=b=c$).

ה ש ל מ ו ת



א. בהוכחת טענה 3 השתמשתי בנוסחא:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{1+\alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)} \qquad (4)$$

(כאשר $\frac{BA_1}{A_1C} = \alpha$, $\frac{CB_1}{B_1A} = \beta$, $\frac{AC_1}{C_1B} = \gamma$)

ובקשתי שהקוראים יוכיחו אותה. אביא כאן הוכחה קצרה:

קיים $S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} - (S_{AC_1B_1} + S_{BC_1A_1} + S_{CA_1B_1})$

בהתחשב בעובדה ש: $S_{AC_1B_1} = \frac{AC_1\cdot AB_1\cdot \sin\hat{A}}{2}$ ובהצבת $AC_1 = \frac{c\gamma}{\gamma+1}$

ו $AB_1 = \frac{b}{\beta+1}$ נקבל ש $S_{AC_1B_1} = \frac{bc\ \sin\hat{A}}{2}\cdot\frac{\gamma}{(\beta+1)(\gamma+1)}$

לכן $S_{AC_1B_1} = S_{ABC}\frac{\gamma}{(\beta+1)(\gamma+)}$. נקבל נוסחאות דומות לשטחי A_1B_1C ו BC_1A_1 ואז נקבל את הנוסחא (4) המבוקשת.

ב. נסיים בבעיה שניסוחה פיקנטי אך פתרונה נובע מידית מטענה 2.

בעיה הוכח שהגבהים במשולש חד זוית מקימים את אי שויון המשולש אם ורק אם נקודת מפגש התיכונים נמצאת בתוך משולש עקבי חוצי הזויות.

הוכחה מרחקי מרכז הכובד מצלעות המשולש c,b,a הם $\frac{h_c}{3}$, $\frac{h_b}{3}$, $\frac{h_a}{3}$

לכן לפי טענה 2 הוכחת הבעיה מידית.

ו ק ט ו ר י ם ב'

ד"ר מ. קורן, משרד החינוך

במאמר הראשון (וקטורים - א', בגליון הקודם), ראינו שמושים שונים של חיבור וקטורים ושל כפל וקטור בסקלר. בפרק הראשון במאמר זה נכיר תכונות נוספות של פעולות אילו. בפרק השני נכיר פעולה נוספת המוגדרת על וקטורים - המכפלה הסקלרית.

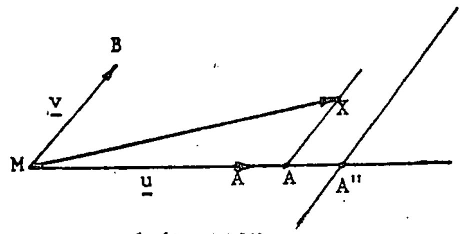
א. קומבינציות ליניאריות

במאמר הראשון הופיעו בטויים מן הצורה $\underline{w}=a\underline{v}+b\underline{u}$. כעת נתרכז במשמעות הגאומטרית של בטויים כאלו. תחילה נגדיר

<u>הגדרה:</u> אם וקטור $\underline{w}$ ניתן להצגה על ידי בטוי $\underline{w}=a\underline{v}+b\underline{u}$ אומרים ש $\underline{w}$ הוא קומבינציה ליניארית (צרוף ליניארי) של $\underline{u}$ ו־$\underline{v}$ (שמקדמיה הם b,a). באופן דומה אומרים שוקטור $\underline{u}$ הוא קומבינציה ליניארית של וקטור יחיד $\underline{v}$ אם $\underline{u}=a\underline{v}$. וקטור הוא קומבינציה ליניארית של שלושה וקטורים $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$, אם הוא ניתן לתאור $a\underline{u}+b\underline{v}+c\underline{w}$ וכו'.

תחילה נתרכז בקומבינציות ליניאריות של שני וקטורים קבועים $\underline{v}=\overrightarrow{MB}$, $\underline{u}=\overrightarrow{MA}$, המתחילים שניהם בנקודה M ואשר אינם נמצאים על ישר אחד. אוסף הקומבינציות של הוקטורים הקבועים v,u מתארים מישור, כפי שנראה במשפט הבא. יתרה מזה - התאור של כל וקטור במישור הוא יחיד.

<u>משפט:</u> אם $\underline{u}=\overrightarrow{MA}$, $\underline{v}=\overrightarrow{MB}$ הם שני וקטורים היוצאים מנקודה M ואינם על ישר אחד אז (א) אם $\overrightarrow{MX}$ הוא קומבינציה ליניארית שלהם אז X נמצאת במישור [A,M,B]. (ב) אם X נמצאת במישור [A,M,B] אז $\overrightarrow{MX}$ הוא קומבינציה ליניארית יחידה של $\overrightarrow{MA}$ ו $\overrightarrow{MB}$, כלומר ישנם מקדמים a,b עבורם $\overrightarrow{MX}=a\underline{v}+b\underline{u}$ ואם קיים גם $\overrightarrow{MX}=c\underline{v}+d\underline{u}$ אז b=d, a=c.



<u>איור מס' 1</u>

<u>הוכחה:</u> (א) נניח $\overrightarrow{MX}=a\underline{v}+b\underline{u}$, נבנה את X ונראה שהיא אכן במישור [A,M,B]: על הישר MA נמצא נקודה A' המקיימת $\overrightarrow{MA'}=a\overrightarrow{MA}$. דרך A' נעביר ישר מקביל לישר MB. על ישר זה

נקצה $\overrightarrow{A'X}=b\overrightarrow{MB}$. לפי הבניה, X היא הנקודה המבוקשת, כלומר $\overrightarrow{MX}=a\underline{v}+b\underline{u}$
לפי תכונות ידועות של ישרים ומישורים, אם שתי נקודות של ישר נמצאות במישור, אז כל נקודות הישר נמצאות במישור. כמו כן אם ישר נמצא במישור ומעבירים לישר זה מקביל דרך נקודה שאף היא במישור זה, אז המקביל נמצא אף הוא באותו מישור. מכאן הנקודה X אכן נמצאת במישור [A,M,B] כנדרש. (ראה איור 1).

(ב) אם X נמצאת במישור [A,M,B], נעביר דרכה מקביל לישר MB. ישר זה חותך את הישר MA בנקודה שנסמנה A'. קיימים a,b המקיימים בהתאמה $MA'=a\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{A'X}=v\overrightarrow{MB}$, ולכן $\overrightarrow{MX}=a\overrightarrow{MA}+v\overrightarrow{MB}$. נוכיח כעת את יחידות ההצגה:
נניח כי קיים גם $\overrightarrow{MX}=c\overrightarrow{MA}+d\overrightarrow{MB}$ וכי $a\neq c$. אז נוכל לכתוב:

$$c\overrightarrow{MA}+d\overrightarrow{MB}=a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}$$

$$(c-a)\overrightarrow{MA}=(b-d)\overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{MA}=(b-d)/(c-a)\overrightarrow{MB}$$

אך זו סתירה להנחה ששני הוקטורים אינם על ישר אחד. מכאן ההנחה $a\neq c$ אינה נכונה. באותו אופן אפשר כמובן להראות כי חייב להתקיים גם השוויון $b=d$.

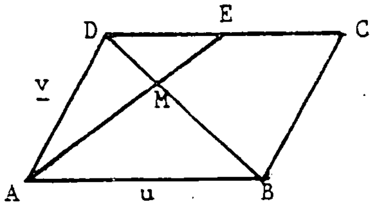
<u>הערה:</u> מאיור 1 אפשר לראות את המשמעות הגאומטרית של יחידות ההצגה: אם נחזור על בניית הקומבינציה הלינארית, כמו בחלק א' של ההוכחה - עבור הקומבינציה הלינארית שמקדמיה c,d נקבל על הישר MA נקודה A'', שונה מ A' וברור שבהמשך הבניה, המקביל ל MB דרך A' ומקביל ל MB דרך A'' אינם נפגשים, ולכן הנקודה X לא יכולה להמצא על שניהם.

המצב במרחב דומה, והוא מסוכם במשפט הבא שאת הוכחתו נשמיט.

<u>משפט:</u> אם $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ הם שלושה וקטורים היוצאים מנקודה M ואינם שלושתם באותו מישור, אז כל וקטור במרחב ניתן להצגה יחידה כקומבינציה לינארית שלהם.

נדגים כעת כמה שמושים של יחידות ההצגה ושל האפיון של נקודות מישור בעזרת שני וקטורים קבועים במישור זה.

דוגמא: במקבילית ABCD, E אמצע CD.
M נקודת החיתוך של AE עם האלכסון BD.
מצא באיזה יחס מחלקת M את האלכסון.
(ראה איור 2).



איור מס' 2

התרה: M נמצאת על AE ולכן יש t עבורו $\vec{AM}=t\vec{AE}$. באותו אופן, M על BD ולכן יש s עבורו $\vec{BM}=s\vec{BD}$. נתאר את AM באמצעות $\underline{u}=\vec{AB}$ ו $\underline{v}=\vec{AD}$ בשתי דרכים שונות, ואז נבצל את יחידות ההצגה למציאת הפרמטרים s ו t:

$$\vec{AM}=t\vec{AE}=t(\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{u})$$

מצד שני $$\vec{AM}+\vec{AB}+\vec{BM}=\underline{u}+s(\underline{v}-\underline{u})$$

ולכן $t=s$:u (השוואת מקדמי u)

$\frac{1}{2}t=1-s$:v

ומכאן נקבל על ידי התרת מערכת המשוואות כי $s=2/3$, $t=1/3$, כלומר M מחלקת את האלכסון ביחס 1/3:2/3 או 1:2.

תרגיל: במקבילית ABCD, E מחלקת את AB ביחס 2:3, F מחלקת את DC ביחס 1:2, מצא באיזה יחס מחלקת נקודת החיתוך של EF והאלכסון BD את האלכסון.

דוגמא: בטטראדר ABCD, 'D מרכז הכובד של הפאה ABC. נקודה E מחלקת את המקצוע BD ביחס 1:3, נקודה F היא אמצע CD. מצא באיזה יחס מחלק המישור [AEF] את התיכון 'DD של הטטראדר.

התרה: תהי X הנקודה בה הישר 'DD חותך את המישור [AEF]. נסמן $\underline{u}=\vec{DA}$, $\underline{v}=\vec{DB}$, $\underline{w}=\vec{DC}$. קיים: $\vec{DD'}=\frac{1}{3}(v+u+w)$ (ראה מאמר קודם), ולכן קיים t עבורו $\vec{DX}=\frac{1}{3}t(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$, לכן $\vec{AX}=-\underline{u}+\frac{1}{3}t(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$. מצד שני $\vec{AF}=\underline{u}+0.5\underline{w}$
$\vec{DE}=-\underline{u}+0.75\underline{v}$ ומאחר ש X במישור [AEF], $\vec{AX}$ הוא קומבינציה ליניארית של AE ו AF, ולכן ל a,b מתאימים קיים: $\vec{AX}=a\vec{AE}+b\vec{AF}$. ולכן $\vec{AX}=(-\underline{u}+0.75\underline{v})+b(-\underline{u}+0.5\underline{w})$. בגלל יחידות ההצגה, אפשר להשוות את מקדמי $\underline{w},\underline{v},\underline{u}$ בשתי ההצגות של $\vec{AX}$.

נקבל:

$\underline{u}$: $-a-b=-1+t/3$

$\underline{v}$: $0.75a=t/3$

$\underline{w}$: $0.5b=t/3$

פתרון המערכת הוא $t=9/13$, $a=4/13$, $b=6/13$ ולכן $\overrightarrow{DX}:\overrightarrow{XD} = \frac{9}{13} : \frac{4}{13} = 9:4$

ב. המכפלה הסקלרית

עד כה לא טפלנו בזויות בין וקטורים. הפעולות שהכרנו לא אפשרו להבדיל בין מלבן לבין מקבילית אחרת, או בין תיבה לבין מקבילון אחר. בפרק זה "נשלים את החסר" על ידי הגדרת פעולה נוספת - המכפלה הסקלרית.

הגדרה: לכל שני וקטורים $\underline{v},\underline{u}$ המכפלה הסקלרית $\underline{u}\cdot\underline{v}$ היא מכפלת אורכי הוקטורים בקוסינוס הזוית שביניהם.

אם נסמן אורך של וקטור בעזרת שני קווים זקופים, כסימן הערך המוחלט של מספרים, ואם α תסמן את הזוית בין $\underline{u}$ ו $\underline{v}$, נוכל לרשום:

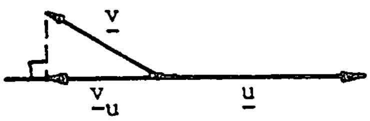
$$\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\,|\underline{v}|\cos\alpha$$

הערה: שים לב כי המכפלה הסקלרית מגדירה לכל שני וקטורים מספר ממשי (סקלר), ולא וקטור.

אם אחד משני הוקטורים הוא וקטור האפס, ערך המכפלה הסקלרית הוא אפס. נהוג למען הפשטות להסכים שהזוית בין וקטור האפס לבין כל וקטור היא 0.

הגדרה חילופית

באיור 3 רואים כי ערך המכפלה הסקלרית הוא מכפלת אורך הוקטור האחד $\underline{u}$, באורך ההיטל $\underline{v}_u$ של הוקטור האחר $\underline{v}$ עליו, כאשר אורך ההיטל נחשב חיובי אם ההיטל הוא בכוון הוקטור הראשון, ושלילי אם ההיטל הוא בכוון הנגדי לוקטור זה (כמו באיור). נתיחס לחישוב כזה של המכפלה כאל הגדרה חילופית של המכפלה הסקלרית. לפני שנדגים את שמושי הפעולה החדשה, נסכם את תכונותיה העקריות:



איור מס' 3

משפט: לכל שלושה וקטורים $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ וסקלר t קיים:

$$(1)\qquad (t\underline{u})\cdot\underline{v} = t(\underline{u}\cdot\underline{v})$$

$$(2)\qquad \underline{u}\cdot\underline{v} = \underline{v}\cdot\underline{u}$$

$$(3)\qquad \underline{u}\cdot(\underline{v}+\underline{w}) = \underline{u}\cdot\underline{v}+\underline{u}\cdot\underline{w}$$

$$(4)\qquad |\underline{u}| = \sqrt{\underline{u}\cdot\underline{u}}$$

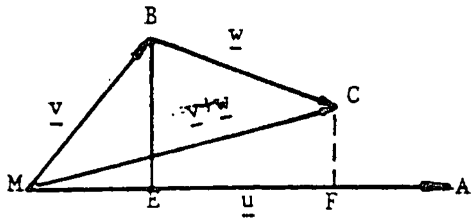
(5) $\underline{u}\cdot\underline{v} = 0$ אם ורק אם u ו v ניצבים זה לזה.

התכונות 5,4,2,1 נובעות ישירות מן ההגדרה. תכונה 3, נובעת מן ההגדרה החילופית, ומכך שהיטל של סכום וקטורים שווה לסכום ההיטלים שלהם, כמודגם באיור 4.

$$\underline{v}_{\underline{u}} = \overrightarrow{ME}$$

$$\underline{w}_{\underline{u}} = \overrightarrow{EF}$$

$$(\underline{v}+\underline{w})_{\underline{u}} = \overrightarrow{MF}$$



איור מס' 4

התכונות 3,2,1 מבטיחות שהמכפלה הסקלרית מתנהגת פורמלית כמו מכפלה רגילה של בטויים אלגבריים מן המעלה הראשונה. כך לדוגמא:

$$(\underline{u}+\underline{v})\cdot(\underline{u}-\underline{v})=\underline{u}\cdot(\underline{u}-\underline{v})+\underline{v}\cdot(\underline{u}-\underline{v})=\underline{u}\cdot\underline{u}-\underline{u}\cdot\underline{v}+\underline{u}\cdot\underline{v}-\underline{v}\cdot\underline{v}=\underline{u}\cdot\underline{u}-\underline{v}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|^2-|\underline{v}|^2$$

דוגמא: מקבילית היא מלבן אם ורק אם האלכסונים שווים זה לזה.

התרה: במקבילית ABCD נסמן $\underline{u}=\overrightarrow{AB}$, $\underline{v}=\overrightarrow{AD}$. אלכסוני המקבילית הם $\underline{u}+\underline{v}$, $\underline{u}-\underline{v}$. האלכסונים שווים אם ורק אם מתקיים

$(\underline{u}+\underline{v})\cdot(\underline{u}+\underline{v})=(\underline{u}-\underline{v})\cdot(\underline{u}-\underline{v})$ או

$|\underline{u}|^2+2(\underline{u}\cdot\underline{v})+|\underline{v}|^2=|\underline{u}|^2-2(\underline{u}\cdot\underline{v})+|\underline{v}|^2$ כלומר

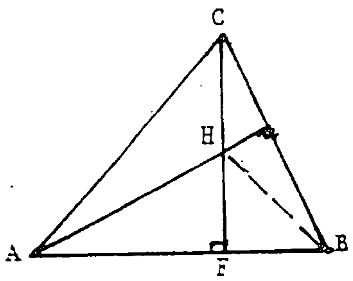
$2\,\underline{u}\cdot\underline{v}=-2\,\underline{u}\cdot\underline{v}$ או $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$, וזהו בדיוק התנאי לניצבות הצלעות.

תרגיל: מקבילית היא מעוין אם ורק אם אלכסוניה ניצבים זה לזה.

דוגמא: שלושת הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

הוכחה: באיור 5, H היא נקודת הפגישה של הגובה מ A עם הגובה מ C. נראה כי $\vec{BH}$ מאונך לצלע $\vec{AC}$. קל לראות לפי ההגדרה החילופית, כי מאחר וההיטל של $\vec{BH}$ על $\vec{BA}$ שווה להיטל של $\vec{BC}$ על $\vec{BA}$ (שניהם הם $\vec{BF}$), הרי $\vec{BH}\cdot\vec{BA}=\vec{BC}\cdot\vec{BA}$, ובאותו אופן

$$\vec{BH}\cdot\vec{BC}=\vec{BA}\cdot\vec{BC},$$



איור מס' 5

על ידי חיסור המשוואות נקבל כי $\vec{BH}\cdot\vec{BA}-\vec{BH}\cdot\vec{BC}=0$,

או $\vec{BH}\cdot(\vec{BA}-\vec{BC})=0$,

אך $\vec{BA}-\vec{BC}=\vec{CA}$, ולכן $\vec{BH}\cdot\vec{CA}=0$, כלומר BH מאונך לצלע AC.

תרגיל: במשולש ABC, אורך הצלע AB הוא 5 ס"מ, אורך הצלע AC הוא 7 ס"מ, והזוית $\measuredangle$BAC בת 80 מעלות. חשב את אורך הצלע BC ואת אורך התיכון לצלע זו.

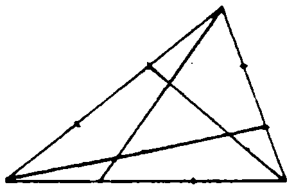
הדרכה: אם $\underline{u}=\vec{AB}$ $\underline{v}=\vec{AC}$ אז $\vec{BC}=\underline{u}+\underline{v}$, ולכן אורך $\vec{BC}$ הוא שורש המכפלה $(\underline{u}+\underline{v})\cdot(\underline{u}+\underline{v})$.

תרגיל: הוכח שחוצה זוית במשולש מחלק את הצלע שממול לזוית ביחס השווה ליחס בין הצלעות הכולאות את הזוית.

הדרכה: אם במשולש ABC נסמן כמקובל את אורך AB ב c, אורך AC ב b ואם נבחר וקטורים $\underline{u}=\vec{AB}'$ על AB, $\underline{v}=\vec{AC}'$ על $\vec{AC}$ המקיימים $|\underline{u}|=|\underline{v}|=1$ אז $\vec{AB}=c\underline{u}$, $\vec{AC}=b\underline{v}$ ואילו וקטור הסכום $\vec{AL}=\underline{u}+\underline{v}$ נמצא על חוצה הזוית BAC.

תרגילים

1. במשולש מחלקים כל צלע לשלושה קטעים שווים ומחברים כל קדקוד לנקודת החלוקה הראשונה על הצלע שממולו, בכוון הסיבוב החיובי (ראה ציור).



א. מצא באיזה יחסים מחלקים הקטעים מן הקדקודים זה את זה.

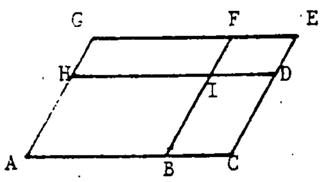
ב. הראה ששטח המשולש הפנימי שנוצר הוא $\frac{1}{7}$ משטח המשולש המקורי, וכל משולש קטן ליד קדקוד, שטחו הוא $\frac{1}{3}$ של שטח המשולש הפנימי.

2. בטטראדר, בשניים מן הזוגות של מקצועות נגדיים, המקצועות מאונכים זה לזה. הוכח שגם המקצועות בזוג הנותר הם מאונכים זה לזה.

3. הוכח את משפט הקוסינוסים.

4. הפרמידה ABCDS שבסיסה ABCD הוא מקבילית, הנקודה E היא אמצע המקצוע BS, F מחלקת את CS ביחס 1:3. מצא באיזה יחס מחלק המישור [AEF] את המקצוע DS.

5. מסגרת מורכבת מארבעה מוטות קשיחים המחוברים בקצותיהם בצורה המאפשרת סיבוב חפשי שלהם. הוכח שאם במצב אחד כלשהו האלכסונים של המסגרת מאונכים זה לזה, אז הם מאונכים זה לזה בכל מצב של המסגרת.



6. בציור הבאה $AG||BF||CE$, $AC||HD||GE$
הוכח שהישרים AE , HF , BD נפגשים שלושתם בנקודה אחת (או שהם מקבילים).

7. א. במקבילית ABCD, E נקודה על AB המקיימת $\vec{AE} = a\vec{AB}$, F נקודה על AD המקיימת $\vec{AF} = b\vec{AD}$, האלכסון AC והקטע EF נחתכים בנקודה M.
הוכח שאם $AM = mAC$ אז $\frac{1}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

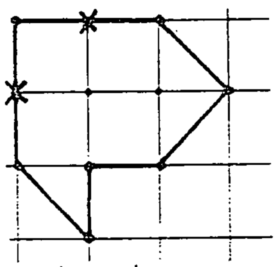
ב. נסח והוכח משפט דומה - למקבילון.

8. הוכח: בטרפז, נקודות אמצע של הבסיסים, נקודת הפגישה של המשכי השוקיים ונקודת הפגישה של האלכסונים, נמצאות כולן על ישר אחד.

נוסחת פיק

ו. גרשוביץ
ביה"ס התיכון ליד האוניברסיטה העברית בירושלים

נתבונן במשפחת ישרים מקבילים זה לזה במרחק יחידת אורך בין כל זוג, ובמשפחה שניה, זהה, הניצבת לראשונה - כמו בניר משבצות. נקודות החיתוך של הישרים יקראו "נקודות סריג". נקח מצולע שקדקדיו נקודות סריג (לא קמור בהכרח) אבל שצלעותיו לא חותכות זו את זו.



בדוגמא שבציור בחרנו במשובע; שבעת קדקדיו הם כמובן נקודות סריג. נוסף לכך יש עוד שתי נקודות סריג על הצלעות, ושתים נוספות בפנים המשובע.

ב 1899 גילה מתמטיקאי בשם פיק נוסחה פשוטה שמבטאת את שטח המצולע בתלות במספר נקודות הסריג.

$$S = \frac{m}{2} + n - 1$$

כאן, m היא מספר נקודות הסריג על היקף המצולע (הקדקדים והנקודות על הצלעות) ו n הוא מספר נקודות הסריג הפנימיות.

במקרה שלנו נקבל $S = \frac{7+2}{2} + 2 - 1 = 5.5$

וקל לודא את נכונות התוצאה על ידי ספירת משבצות.

למשפט פיק יש שימושים רבים, נוסף למציאת שטח מצולע. לדוגמא, נתבונן בבעיה שפורסמה באחד הגליונות הקודמים של "אתגר" בה הקורא התבקש להראות שאין משולש שוה צלעות שקדקדיו נקודות סריג.

לפי נוסחת פיק שטח משולש כזה צריך להיות מספר רציונלי, אבל ידוע ששטח של משולש שוה צלעות הוא

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

אבל a^2 תמיד שלם לפי משפט פיתגורס.

במאמר זה נציג הוכחה של משפט פיק וכן כמה שימושים נוספים.

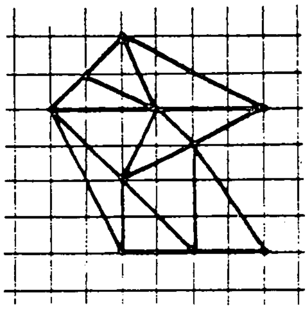
נתחיל בהסבר של כמה מושגים נוספים.

א. <u>טריאנגולציה</u> של מצולע היא חלוקתו למשולשים.

ב. נתון מצולע ותהי K קבוצת נקודות בפנים המצולע או על היקפו. נניח גם שכל קדקדי המצולע שיכים ל K. K – טריאנגולציה של המצולע היא טריאנגולציה שכל קדקדי משולשיה שיכים ל K, וכל נקודה של K היא קדקד של אחד ממשולשי הטריאנגולציה.

ברור כי מושג הטריאנגולציה הוא כללי, ואינו קשור דוקא לנקודות סריג.

ג. <u>משולש פשוט</u> הוא משולש שקדקדיו נקודות סריג, אבל אין שום נקודת סריג נוספת בפנים המשולש או על צלעותיו.



הוכחת משפט פיק מבוססת על שני המשפטים הבאים:

<u>משפט I</u>

תהיה K קבוצה של $m+n$ נקודות, m נקודות על היקפו של מצולע (כולל כל הקדקדים), ו n נקודות פנימיות. אז קימת K – טריאנגולציה אחת לפחות, וכל K – טריאנגולציה כזו כוללת $m+2n-2$ משולשים.

<u>הערה</u>: במקרה שלמצולע m קדקדים, ואין ב K כל נקודות נוספות (כלומר $n=0$), נקבל שהמצולע מחולק ל $n-2$ משולשים, שבמקרה הקמור זוהי תוצאה מוכרת.

<u>משפט II</u>

שטח של משולש פשוט הוא $\frac{1}{2}$.

ממשפטים אלה נובעת נוסחת פיק בקלות:

אם נקודות K הן כל נקודות הסריג שבפנים המצולע או על היקפו, אזי הטריאנגולציה היא ל $m+2n-2$ משולשים פשוטים ששטח כל אחד מהם הוא $\frac{1}{2}$, ולכן נקבל

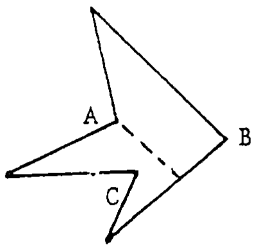
$$S = \frac{1}{2}(m+2n-2) = \frac{m}{2} + n-1 .$$

את המשפט נחלק לכמה טענות פשוטות:

(I_1) מקדקד של הזוית הגדולה ביותר של מצולע אפשר להעביר אלכסון שכולו בתוך המצולע.

<u>הוכחה:</u>

אם המצולע קמור הטענה ברורה. אם איננו קמור אז הזוית הגדולה ביותר היא בודאי גדולה מ 180^0; נעביר את חוצה הזוית הזו עד חיתוכו באחת הצלעות. אם זה קדקד - גמרנו. ולא, נסובבו לאחד הכוונים עד שיפגע בקדקד. (בדוגמא, אם נסובב את חוצה הזוית בכוון השעון נקבל את האלכסון AC, ואם בכוון הפוך - את האלכסון AB).



(I_2) אם נחלק k - צלעון באמצעות אלכסון ל p - צלעון ו q - צלעון, אז $k=p+q-2$

(I_3) כל k - צלעון אפשר לחלק באמצעות אלכסונים ל k-2 משולשים.

(I_4) סכום זויות k - צלעון (לאו דוקא קמור!) הוא $180^0(k-2)$.

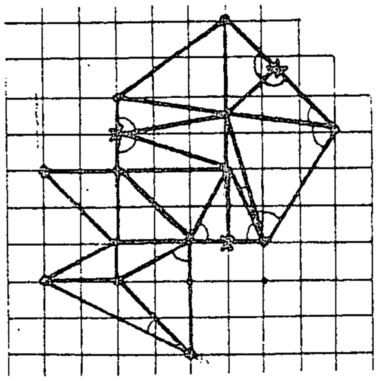
(I_5) אם על היקפו של משולש ובתוכו מסמנים כמה נקודות, כולל קדקדיו, אזי קיימת K - טריאנגולציה.

(I_6) הטענה I_5 מתקיימת לגבי מצולע כללי.

<u>תרגיל</u>

הוכח טענות $I_2 - I_6$.

כדי להשלים את הוכחת משפט I, יש לספור את המשולשים ב K - טריאנגולציה. נניח שלמצולע יש K קדקדים, אזי $m=k+\ell$ כאשר ℓ מספר הנקודות על הצלעות. בנוסף לכך יש n נקודות ופנימיות. נקח K - טריאנגולציה כלשהי, ונסמן את מספר משולשיה ב x. סכום זויות כל המשולשים הוא 180^0x. נחלק זויות אלו לשלש קבוצות:



א. זויות ליד קדקדי המצולע המקורי. לפי I_4 סכומן $180^0(k-2)$.

ב. זויות ליד הנקודות שעל צלעות המצולע. ברור שסכומן $180^0\ell$

ג. זויות ליד נקודות פנימיות סכומן הוא 360^0n.

מכאן נקבל

$$180^0x = 180^0(k-2) + 180^0\ell + 360^0n$$

$$\begin{aligned} x &= k-2 + \ell + 2n \\ &= (k+\ell) + 2n - 2 \\ &= m+2n - 2 \end{aligned}$$

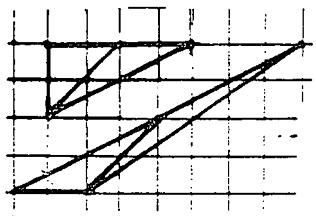
הוכחת משפט II

נתון משולש פשוט שקדקדיו נקודות סריג, ונזכור ששטח כל משבצת הוא יחידה אחת.

נציג עוד שני מושגי עזר:

(א) משולש נקרא מינימלי אם קדקדיו נמצאים בשלשה מקדקדי משבצת. משולש כזה הוא משולש ישר זוית שצלעותיו $\sqrt{2},1,1$ ושטחו $\frac{1}{2}$.

(ב) משולש נקרא בר-השגה אם אפשר להגיע אליו ממשולש מינימלי על ידי מספר סופי של צעדים מהסוג הבא: ממשולש ABC נתון עוברים למשולש חדש A'BC, כאשר B היא אמצע הקטע AA'.



לכל צעד כזה נקרא "קפיצה". אפשר להוכיח יותר מהדרוש למשפט II:

(II) שלש התכונות הבאות של משולשים שקדקדיהם נקודות סריג הן שקולות:

(א) שטח המשולש הוא $\frac{1}{2}$

(ב) המשולש פשוט ,

(ג) המשולש בר-השגה. (ראה בעיה מס' 3 בהמשך).

כמו במשפט I נחלק את משפט II לכמה טענות פשוטות

(II_1) כל "קפיצה" לא משנה את שטח המשולש.

(II_2) שטח של משולש בר-השגה הוא $\frac{1}{2}$.

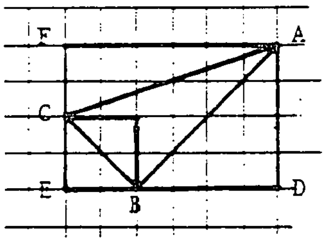
(II_3) אם נשלים משולש פשוט למקבילית, בתוכה ועל צלעותיה אין נקודות סריג, מלבד הקדקדים.

(II_4) כל "קפיצה" מעבירה משולש פשוט למשולש פשוט.

(II_5) בכל משולש פשוט, אחת מהזויות היא ישרה או קהה. במקרה של זוית ישרה הוא מינימלי.

הוכחה:

על ידי העברת ישרי הסריג נבנה מלבן החוסם את המשולש ABC. ברור שאחד הקדקדים של המשולש הוא גם קדקד של המלבן, נניח שזה A, והמלבן הוא ADEF. נראה שגם הקדקד הנגדי E של המלבן הוא קדקד של המשולש.



נניח בשלילה כי B נמצאת על ED ו C על EF (ולא בקצות הקטע). נעביר דרך B ו C ניצבים לצלעות, הם יפגשו בתוך המשולש, ומאחר ש B ו C נקודות סריג, גם פגישת האנכים תהן נקודת סריג, בנגוד לפשטות המשולש.

לכן, נניח כי C מתלכדת עם E. אם B מתלכדת עם D או F, המשולש ישר זוית ומינימלי. אחרת B במקום כלשהו בתוך המלבן או על היקפו וקל לראות שהזוית ב B היא קהה.

(II_6) אם משולש פשוט אינו מינימלי, בעזרת "קפיצה" אחת אפשר להעבירו למשולש חדש שהצלע הגדולה ביותר שלו קטנה מהצלע הגדולה ביותר של המצולע המקורי.

(II_7) משולש פשוט ניתן להעביר למשולש מינימלי בעזרת מספר סופי של קפיצות.

הוכחה:

ריבועי הצלעות הן מספרים שלמים, וסדרה יורדת שלהן חיבת להיות סופית.

(II_8) מטענות 2 ו-7 נובע כי כל משולש פשוט הוא בר-השגה ושטחו $\frac{1}{2}$ וזהו משפט II.

דוגמא:

מצא את מספר הפתרונות הטבעיים למשואה $x + y + z = 100$.

נסתכל במערכת אי השוונות

$$x + y < 100$$

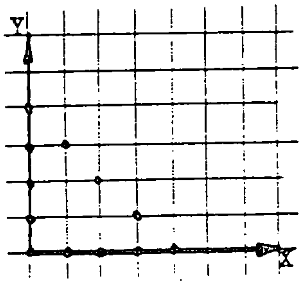
$$x > 0$$

$$y > 0$$

ונחפש את מספר הנקודות בעלות שעורים שלמים שמקימים אותה.

שטח המשולש הוא

$$s = \frac{1}{2} \cdot 100^2 = 5000$$



על ההיקף יש 300 נקודות (מדוע?), ולפי משפט פיק נקבל

$$5000 = \frac{300}{2} + n-1$$

כלומר

$$n = 4851$$

ב ע י ו ת

1) למצא מספר הפתרונות הטבעיים למשואות:

א) $x + y + z = K$

ב) $x_1 + .. + x_n = K$

2) כל מסלול סגור שבנוי מקטעי הרשת אורכו הוא מספר זוגי. (קל).

3) א) כל משולש סריג ניתן לחלק למשולשים פשוטים

ב) שטח משולש של סריג הוא $\frac{x}{2}$, כאשר x מספר המשולשים מא'.

ג) אם שטח משולש סריג הוא $\frac{1}{2}$, הוא פשוט.

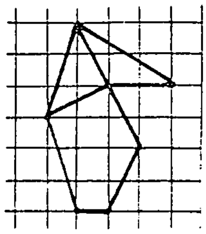
4) (הכללה של משפט I). נתון מצולע וקבוצה K של $m+n$ נקודות (כמו בסריג), ומחלקים אותו ל p - צלעונים, כך שכל קדקד של אחד המצולעים שייך ל K ולהפך, אזי מספר הצלעונים הוא

$$X = \frac{m + 2n - 2}{p - 2}$$

5) (משפט אוילר). אם נתונות s נקודות, t קטעים שמחברים נקודות אלה ונוצרים r אזורים, אז

$$s - t + r = 1$$

דוגמא:



r + 33

t = 10

s = 88

10 - 8 + 3 = 1

6) נתון מצולע ואחת מצלעותיו a. אם $\frac{S}{a^2}$ הוא אירציונלי, אי אפשר לבנות שום מצולע הדומה לו וקדקדיו בנקודת סריג.

7) למצא מרחק נקודת הסריג הקרובה ביותר לישר ששפועו $\frac{q}{p}$.

8) על לוח שחמט 8×8 נקח סריג שנקודותיו מרכזי המשבצות. המלך יוצא מנקי כלשהי ועובר דרך כל משבצות הלוח, כל אחת פעם אחת, וחוזר למשבצת הראשונה, כך שמסלולו לא חותך את עצמו.

א) מצא את השטח המוגבל בתוך המסלול.

ב) מצא את האורך המכסימלי של המסלול.

* * * * *

* * * *

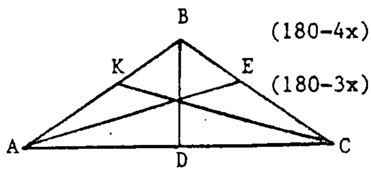
מכתב - למערכת

ב. יפה, חיפה

מצורפת בזה הוכחה שאי אפשר <u>לבנות</u> משולש ע"י שלשה חוצי זוית:

נתון משולש ΔABC ובו: $AB=BC$, $\sphericalangle BCA=2x$,

חוצה זוית $AE=CK=\ell$, $\sphericalangle AEB=3x$, $BD=h$.



לפי משפט הסינוסים $\frac{AB}{\sin 3x} = \frac{AE}{\sin 4x}$

$h = BD = AB\sin 2x$

$AB = AE\,\frac{\sin 3x}{\sin 4x}$,$h = \ell\,\frac{\sin 3x}{\sin 4x}\cdot \sin 2x$

$(h = AE)$

נניח שחוצה הזוית ℓ שווה ל $4h$.

$$\ell = 4h$$

$$h = 4h\,\frac{\sin 3x}{\sin 4x}$$

$$1 = 4\,\frac{\sin 3x \cdot \sin 2x}{2\sin 2x \cos 2x}$$

$$1 = \frac{2\sin 3x}{\cos 2x}$$

$$\cos 2x = 2\sin 3x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin(x+2x)$$

$$1 - 2\sin^2 x = 2(\sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x)$$

$$1 - 2\sin^2 x = 2\sin x(1 - 2\sin^2 x) + 4\cos^2 x\sin x$$

$$1 - 2\sin^2 x = 2\sin x(1-2\sin^2 x) + 4\sin x(1 - \sin^2 x)$$

$$1 - 2\sin^2 x = 2\sin x - 4\sin^3 x + 4\sin x - 4\sin^3 x$$

$$8\sin^3 x - 2\sin^2 x - 6\sin x + 1 = 0$$

נציב $\sin x = \frac{u}{4}$

$$8\,\frac{u^3}{64} - 2\,\frac{u^2}{16} - 6\,\frac{u}{4} + 1 = 0$$

$$\frac{u^3}{8} - \frac{u^2}{8} - \frac{3}{2} + 1 = 0$$

$$u^3 - u^2 - 12u + 8 = 0$$

למשוואה הזאת אין <u>פתרון רציונלי</u>

כי אלו היה פתרון כזה הוא היה מהצורה $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ או ± 8

ואף אחד מהמספרים האלו איננו מאפס את המשוואה.

הערת המערכת

נראה עתה כי הפולינום הוא פולינום מינימלי של u. כלומר לא קיים פולינום עם מקדמים רציונליים ממעלה קטנה מ 3 ש u הוא שורש שלו. דבר זה נובע מהעובדה הכללית הבאה:

<u>משפט:</u> יהא $f(x)$ פולינום ממעלה 3 עם מקדמים רציונליים ויהא a שורש של $f(x)$. אם אין ל $f(x)$ שורשים רציונליים אז $f(x)$ הוא פולינום מינימלי של a.

<u>הוכחה:</u> נניח ש $m(x)$ הוא פולינום של a. מעלתו של $m(x)$ היא קטנה או שווה ל 3. נחלק את $f(x)$ ב $m(x)$ ונסמן ב $r(x)$ את שארית החילוק. כיון ש $f(x)$ ו $m(x)$ פולינומים עם מקדמים רציונליים, גם המקדמים של $r(x)$ הם רציונליים. כמו כן מעלתו של $r(x)$ קטנה ממעלתו של $m(x)$, אלא אם כן $r(x)$ הוא פולינום האפס. נביט בשוויון: $f(x)=q(x)m(x)+r(x)$, כאשר $q(x)$ היא מנת החילוק. נציב a בשוויון זה ונזכור ש a הוא שורש של $f(x)$ ושל $m(x)$. נקבל כי $f(a)=q(a)m(a)+r(a)$ ומכיוון ש $m(a)=f(a)=0$ נקבל כי $r(a)=0$. לכן a הוא שורש של $r(x)$. כיוון ש $m(x)$ הוא פולינום מינימלי של a הרי מעלת $r(x)$ לא יכולה להיות קטנה יותר ממעלת $m(x)$ ומכאן ש $r(x)$ הוא פולינום האפס. אם כך הרי $f(x)=q(x)m(x)$.

כדי להראות ש $f(x)$ הוא פולינום מינימלי של a עלינו להראות שמעלת $m(x)$ אף היא 3 אם אין הדבר כך (כלומר אם מעלת $m(x)$ הוא 1 או 2) אז אחד מהשניים $m(x)$ או $q(x)$ הוא ממעלה 1 וצורתו, על כך, היא $ax+b$ כאשר a ו b הם רציונליים. אך זה גורר ש $-(a/b)$ הוא שורש רציונלי של $f(x)$, בניגוד לכך של $f(x)$ אין שורשים רציונליים.

עתה הסיבה לכך שלא ניתן לבנות את u היא המשפט המפורסם הבא שנביא ללא הוכחה.

<u>משפט:</u> נניח שניתן לבנות קטע באורך a. אז מעלתו של פולינום מינימלי של a היא חזקה של 2.

אצלנו מעלתו של פולינום מינימלי של u היא 3, ועל כן לא ניתן לבנות קטע באורך u.

בעיות אימון לאולימפיאדות מתמטיות - המשך

פרופ' מ.ס. קלמקין - אוניברסיטת אלברטה.

6. קבע, ללא שמוש במחשבון, איזה מספר גדול יותר $\sqrt[3]{413}$ או $6+\sqrt[3]{5}$.

7. מצא את כל הפתרונות הרציונליים (x,y,z,t) של

$$(x+y\sqrt{2})^2 + (z+t\sqrt{2})^2 = 5+4\sqrt{2}.$$

8. מצא את כל הפתרונות הממשיים (x,y,z) של

$$(1-x)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 + z^2 = 1/4.$$

9. הוכח ש $\binom{2n}{n} < \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}$ עבור כל מספר טבעי n, $n>1$.

10. הוכח כי $1988^n \ge \left(1988 - \frac{1987}{n+1}\right)^{n+1}$ עבור $n=0,1,2,\ldots$.

11. יהיו $a \ge b \ge c \ge 0$. הוכח כי

$$b^m c + c^m a + a^m b \ge bc^m + ca^m + ab^m$$

א. כאשר m מספר טבעי

ב. כאשר m מספר ממשי, $m>1$.

12. הוכח כי $65 \nmid 2^n-3$ (65 אינו מחלק .) עבור $n=1,2,3,\ldots$.

13. הוכח כי אם $7|(a^2+b^2)$ (7 מחלק ..) אז $7|a$ ו $7|b$.

14. הוכח כי המספר $11\ldots1$ (בבסיס 10) אינו יכול להיות רבוע שלם.

הערה: השאלה האם הוא יכול להיות חזקה של מספר שלם היא בעיה פתוחה!

15. הוכח שיש אינסוף מספרים איזוגיים חיוביים k כך שכל המספרים מהצורה

$2^{2^n} + k$, $(k=,1,2,\ldots)$ הם פריקים.

16. מהי הספרה הראשונה מהסוף, השונה מאפס, ב $1000!$?

האולימפיאדה לנוער במתמטיקה תשמ"ח

(מכון ויצמן למדע בשיתוף עם תכניות חסכון לנוער של בנק הפועלים בע"מ)

התקיימה ברחובות ב - 29 בפברואר 1988

להלן שאלון התחרות. המספר בסוגריים אחרי מספר השאלה הוא מספר הנקודות שהוענקו בעד תשובה מלאה ומדויקת על השאלה.

הפתרונות יפורסמו בגליון הבא.

1. (7) הוכח שאין למצוא מספר שלם כך שכאשר מעבירים את הספרה הראשונה של משמאלו לימינו מקבלים מספר שהוא גדול פי 4 מהמספר המקורי.

2. (7) מצא את כל הפתרונות של המשוואה:

$$[(\alpha^2x+\alpha^2-1)/2] = (2x+3)/5$$

כאשר α מספר שלם ו-x ממשי.

נ.ב.

(עבור כל t ממשי מסמן $[t]$ את המספר השלם הגדול ביותר שאיננו גדול מ-t.

דוגמא: $[2.01]=2$, $[-1.5] = -2$).

3. (9) מצא את כל הזוגות (x,y) של מספרים שלמים שונים מ-0 המקיימים

$$(x^2+y)(x+y^2) = (x-y)^3$$

4. (10) המשולש ABC מסתובב במישור שלו סביב לקדקד A. בכל מצב של המשולש המסתובב, נגיד $AB'C'$, מגדירים M כנקודת המפגש של הישרים BB',CC'.

א) מהו המקום ההנדסי של M?

ב) איפה נמצא M במסלול הזה אחרי שהמשולש הסתובב ב-90^0.

5. (14) אם מפתחים את שני הפולינומים

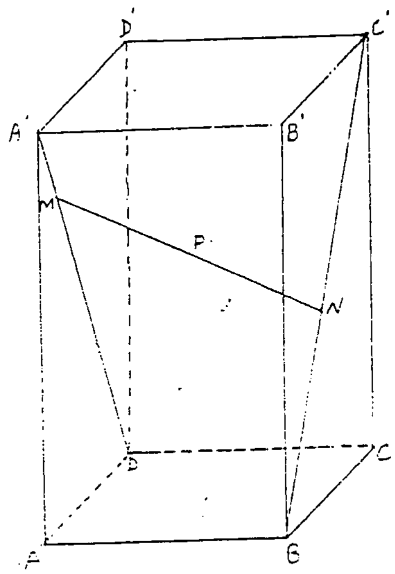
$$f_1(x) = (1-x^{19}+x^{88})^{1988}$$

$$f_2(x) = (1-x^{19}-x^{88})^{1988}$$

באיזה מהשנים יהיה המקדם של x^{5748} יותר גדול? נמק.

6. (16) הוכח כי אם $x = \frac{\pi}{2(n+1)}$, אזי

$$\sum_{j=2}^{n} \sec jx \sec(j-2)x = 3\cos 2x \operatorname{cosec}^2 2x$$



7. (17) נתונה תיבה ABCDA'B'C'D' (ראה ציור). M היא נקודה כלשהי על האלכסון A'D של הפיאה ADD'A' ו-N היא נקודה כלשהי על האלכסון BC' של הפיאה BCC'B'; P הוא אמצע הקטע MN.

מצא את המקום ההנדסי של P.

8. (20) קבוצת אנשים בקרו בתערוכה של 200 ציורים. אף מבקר לא ראה את כל הציורים אבל מאידך לא היה אף ציור אשר אף אחד לא הסתכל בו. הוכח כי היו לפחות זוג אחד של מבקרים, נגיד A ו-B, וזוג אחד של ציורים, נגיד α ו-β, כך ש-A ראה את α ולא את β בעוד B ראה את β ולא את α.

ת ז כ ר ת

האולימפיאדה ע"ש פרופ' ירמיהו גרוסמן תתקיים בטכניון ביום ג', ט"ז באייר תשמ"ח, 3 במאי 1988.

נפגשים בכניסה הראשית לבנין אולמן בשעה 11.00 בבוקר.

פרטים טל. 294281(04)

פתרון בעיות מגליון מס' 8

49. הוכח כי ניתן להציג כל מספר טבעי n בצורה

$$n = \epsilon_1 \cdot 1^2 + \epsilon_2 \cdot 2^2 + \epsilon_3 \cdot 3^2 + \dots + \epsilon_m \cdot m^2$$

כאשר m הוא מספר טבעי מתאים ו - $\epsilon_i = \pm 1$ $(i=1,2,\dots,m)$.

פתרון

עבור כל a קיים

$$a^2-(a+1)^2-(a+2)^2+(a+3)^2 = 4 .$$

נסמן ב $F(a,k)$ את הבטוי

$$F(a,k)=\sum_{r=0}^{k-1} \{(a+4r+1)^2-(a+4r+2)^2-(a+4r+3)^2+(a+4r+4)^2\}$$

עבור $n=4k$ נוכל לכתוב $4k=F(0,k)$ וזאת ההצגה המבוקשת.

אם $n = 4k + 1$, נרשום $n = 1^2+F(1,k)$

אם $n = 4k + 2$, נרשום $n = -1^2-2^2-3^2+4^2+F(4,k)$

אם $n = 4k + 3$, נרשום $n = -1^2+2^2+F(2,k)$

50. אם a , b הם מספרים ממשיים ו - $b>a>0$, נגדיר $x_o=a$, $y_o=b$.

עבור כל $n\geq 1$, נגדיר

$$x_n = \left\{x_{n-1}(x_{n-1} + y_{n-1})/2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$y_n = \left\{y_{n-1}(x_{n-1} + y_{n-1})/2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

הוכח כי x_n , y_n שואפים שניהם, כאשר n שואף לאינסוף,

לערך

$$2^{-\frac{1}{2}}(b^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}(\ln b - \ln a)^{-\frac{1}{2}}$$

<u>פתרון</u>

נסמן $b=a(1+\beta)$, $\beta>0$

$$(y_n/x_n) = (y_{n-1}/x_{n-1})^{\frac{1}{2}}$$

ולכן קל להסיק, למשל בעזרת אינדוקציה, כי

$$(y_n/x_n) = (1+\beta)^{2^{-n}}$$

מאידך גם קל לראות, שוב בעזרת אינדוקציה, כי, עבור כל $n\geq 1$,

$$y_{n-1} > y_n > x_n > x_{n-1}$$

ולכן הסדרה $\{x_n\}$ היא סדרה עולה, בעוד $\{y_n\}$ היא סדרה יורדת,

שתיהן חסומות, ולכן שתיהן שואפות לגבול, נגיד $x_n\to\xi$, $y_n\to\eta$,

מאידך

$$x_n^2 - y_n^2 = \frac{x_{n-1}^2 - y_{n-1}^2}{2}$$

ולכן, שוב בעזרת אינדוקציה

$$x_n^2 - y_n^2 = \frac{a^2 - b^2}{2^n}$$

יוצא כי $x_n^2 - y_n^2\to 0$ ולכן $\xi=\eta$. נשאר לחשב את ξ.

ראינו כבר כי

$$y_n = x_n(1+\beta)^{2^{-n}}$$

ולכן

$$x_n^2\{(1+\beta)^{2^{-n+1}} - 1\} = (a^2 - b^2)\cdot 2^{-n}$$

ז.א.

$$x_n^2 = \frac{(a^2 - b^2)}{2^n\{(1+\beta)^{2^{-n+1}} - 1\}}$$

נעיר כי

$$(1+\beta)^{2^{-n+1}} = e^{2^{-n+1}\ln(1+\beta)}$$

$$= 1+2^{-n+1}\ln(1+\beta) + O(2^{-2n})$$

כאשר $O(2^{-2n})$ הוא בטוי מסדר גדל של 2^{-2n}

ולכן

$$x_n^2 = \frac{(a^2 - b^2)}{2^n\{2^{-n+1}\ln(1+\beta) + O(2^{-2n})\}}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{2\ln(1+\beta) + O(2^{-n})}$$

ומכאן

$$\xi^2 = \frac{a^2 - b^2}{2\{\ln b - \ln a\}}$$

51. הוכח כי אי אפשר לרצף קבוצה קמורה במישור על ידי מספר סופי של מרובעים לא קמורים.

<u>פתרון</u>

אחוד של מספר סופי של מרובעים הוא מצולע לכן די להוכיח כי אי אפשר לרצף מצולע קמור בעל n צלעות ע"י k מרובעים לא קמורים. בכל מרובע יש זוית גדולה מ π וקדקדי זויות אלו הן k נקודות פנימיות של המצולע. סכום זויות המצולע הוא $\pi(n-2)$ ולכן אלו היה הרצוף אפשרי הרי סכום זויות המרובעים צריך להיות לפחות $\pi(2k+(n-2))$ בעוד שהוא רק $2k\pi$.

52. n תחנות דלק מסודרות במעגל. בכולן יחד יש כמות דלק המספיקה בדיוק לסבוב שלם. להוכיח שיש תחנה בה ניתן להתחיל ולסיים את הסבוב.

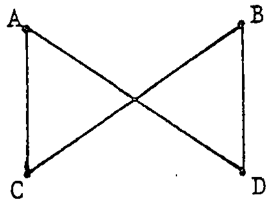
<u>פתרון</u>

נסמן את התחנות ב $T_1, T_2, \ldots, T_n$. עבור $1\le i\le n$ נסמן ב R_i את המרחק שנתן לעבר אם מתחילים בתחנה T_i ויהיה $R=\max R_i$. ללא הגבלת הכלליות נניח ש $R=R_1$ יהיה X המקום אליו נתן להגיע כאשר מתחילים ב T_1. יש להראות ש $X=T_1$. נניח שלא. פרוש הדבר הוא שעדיין נותר דלק כלומר בין X ל T_1 יש תחנות דלק ובהן די דלק המספיק למרחק מ X ל T_1, מכאן, ע"י התחלה באחת מתחנות אלו היה מתקבל מסלול ארוך יותר בסתירה להנחת המכסימליות של R_1.

53. נתונות n נקודות אדומות ו - n נקודות ירוקות במצב כללי במישור (אין ישר שעובר דרך יותר משתי נקודות).
להוכיח שניתן לחבר נקודות אדומות לנקודות ירוקות על ידי קטעים ישרים, בלי שהקטעים יחתכו.

<u>פתרון</u>

נסתכל בכל האפשרויות לחבר נקודות אדומות עם נקודות ירוקות. יש מספר סופי של אפשרויות כאלו (כמה?) ולכן יש כזו שבה סכום ארכי הקטעים הוא מינימלי. במקרה זה הקטעים אינם נחתכים כי אם A ו B נקודות אדומות ו C ו D ירוקות אז



$$|AC| + |BD| < |AD| + |BC|$$

כי סכום ארכי שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.

בעיות חדשות

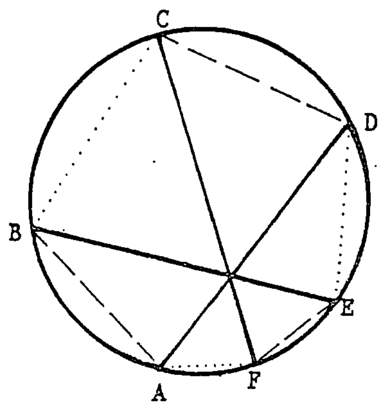
שתי השאלות הראשונות הוצעו ע"י ד"ר ב. גרנובסקי מהטכניון. שתי השאלות הגאומטריות הוצעו ע"י א. סיגלר ברמן מביה"ס הטכני של חיל האויר והשאלה האחרונה ע"י דרור אייגר מקבוץ עמיר.

את הפתרונות יש לשלוח למערכת "אתגר-גליונות מתמטיקה" בטכניון עד 31 במאי 1988.

.60 תהיה $F=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ קבוצה של n מספרים ממשיים שונים. נסמן $a_{ij} = a_i+a_j$. נסמן ב $N(F)$ את עצמת הקבוצה $\{a_{ij}\ ;\ i=1,\dots,n\ ;\ j=1,\dots,n\}$ כלומר מספר המספרים <u>השונים</u> מהצורה a_{ij}.

מהו הערך המינימלי של $N(F)$? עבור אלו קבוצות F הוא מתקבל?

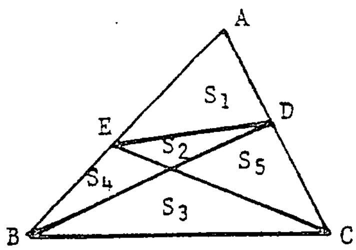
.61 תהיה $F = \{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ קבוצה של n מספרים שונים, שונים מ 0. נסמן $b_{ij} = a_i \cdot a_j$. נסמן ב $M(F)$ את עצמת הקבוצה $\{b_{ij}\ ;\ i = 1,\dots,n\ ;\ j = 1,\dots,n\}$. מהו הערך המינימלי של $M(F)$? עבור אלו קבוצות F הוא מתקבל?



.62 המיתרים BE,FC,AD נפגשים בנקודה M במעגל.

<u>הוכח:</u>

$$AB\cdot CD\cdot EF = AF\cdot BC\cdot ED$$



63, במשולש נתון ABC, הנקודה D נמצאת על הצלע AC והנקודה E על הצלע AB ו CE ו BD נפגשים ב F.

נסמן את שטחי המשולשים AED , EOF , BFC , EFB , CFD , ב S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , S_5 בהתאמה.

הוכח:

א) $S_2 < S_1$

$S_2 < S_3$

$S_4 \cdot S_5 < S_3^2$.

64. יהיו $a_1,\dots,a_n$ מספרים חיוביים שמכפלתם שוה ל 1.

הוכח כי

$$(1+a_1)(1+a_2)\ \dots\ (1+a_n) \geq 2^n.$$

מתי מתקיים שויון?